

*nou*biaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Desembre 2024



Consell de redacció:
Noemí Ruiz / Carlos Giménez (coords.)
Montserrat Alsina
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Manuel Udina

© dels articles, els seus autors

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM),
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat

noubiaix@gmail.com



Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
Il·lusió de salt finit
Oriol Bote Vila
Vedruna Vall (Terrassa)

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012
Impressió: Gráficas Rey

Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
comercial.edicions@ub.edu
www.edicions.ub.edu



sumari

1 Editorial

articles

- 4 Del tot al no-res: divulgant el pensament
borrós a partir d'una exposició al Museu
de Matemàtiques
Queralt Viladevall
Àngel Alsina
Joan Carles Ferrer Comalat

- 19 Algemat: àlgebra amb materials
Anna Vilaró Utrillo

- 32 Connexió entre el 2D i el 3D...
amb GeoGebra!
Bernat Ancochea Millet
Guillem Bonet Carbó

- 41 Viatge interplanetari:
aprendre matemàtiques amb
l'univers com a escenari
Roser Matas Nadal
Xavier Sánchez Carrasco
Marc Faüchs Xifra

- 52 La pastisseria, la guerra de les
galàxies i les matemàtiques
Jordi Arnau i Ballestar

- 66 Les construccions geomètriques
euclidianes. La papiroflèxia i les
matemàtiques cartesianes
Josep Pla Carrera





Dels sis articles basats en experiències personals que recopilem en aquest número 51 del NouBiaix, n'hi ha tres que corresponen a docents de secundària que debuten en el món de les publicacions, i que presenten propostes que, prèviament, han treballat amb l'alumnat respectiu.

Volem agrair l'esforç que els ha comportat aquest repte i animem a tothom a compartir experiències que puguin ser inspiradores, i que proposin una reflexió rigorosa sobre les matemàtiques. També volem demanar disculpes als autors del primer article pel retard en la previsió inicial de publicació, degut a l'endarreriment que va afectar el número 50.

El primer article, «Del tot al no-res», de Queralt Viladevall, Àngel Alsina i Joan Carles Ferrer, mostra que alguns conceptes que cal introduir a edats primerenques són la base per desenvolupar nocions matemàtiques complexes en un futur no gaire llunyà: la clusterització, la idea de regressió logística, la lògica de «no A no implica el contrari», etc. L'exposició d'exemples es complementa amb una clara justificació matemàtica. Finalment, a més de l'agradable lectura que convida a la reflexió, cal posar en valor els magnífics dibuixos d'una de les autores per la força comunicativa que desprenen.

En el segon article, titulat «Algemat: àlgebra amb materials» i escrit per Anna Vilaró, creadora del material, lectors i lectores descobriran l'origen d'aquest projecte tan personal i les seves característiques principals (peces, tauler...). L'article planteja unes quantes idees, però heu de saber que si tafanegeu a la pàgina web www.annahelpme.com tindreu a disposició un món més extens. Esperem que el coneixement d'Algemat, un material amb autoria catalana, pugui ser una bona ajuda a l'hora de treballar les tècniques algebraïques que, ja en secundària, comporten un esforç d'abstracció que de vegades els estudiants troben difícil de fer.

El tercer article, titulat «Connexió entre el 2D i el 3D. . . amb GeoGebra!», ha estat escrit per Bernat Ancochea i Guillem Bonet, ben coneguts pels seguidors del programari de geometria dinàmica GeoGebra. A través de la seva experiència mostren una proposta que permet completar activitats que se solen desenvolupar a primària i secundària sobre la construcció 3D de figures amb cartolina. Ara bé, el mètode d'indagació que fa de fil conductor de l'article, la

manera com es van desenvolupant les preguntes, el fet de mirar les coses del dret i del revés, també pot inspirar els lectors en una metodologia per crear propostes pròpies. Finalment, com és característic de la comunitat GeoGebra, el codi és lliure i a l'abast de tothom.

El quart article, escrit per Roser Matas, Xavier Sánchez i Marc Faüchs, ens descriu amb tot detall el disseny i la implementació a l'aula d'una situació d'aprenentatge de l'àmbit STEAM amb els seus alumnes de primer d'ESO d'un centre d'alta complexitat. Aquesta activitat és plenament replicable: qualsevol equip de professors motivat la pot plantejar si vol promoure un ús significatiu de les matemàtiques en un entorn STEAM, potenciant la col·laboració tant de docents de diferents àmbits com dels alumnes mateixos, un objectiu que no sempre és fàcil assolir.

En el cinquè article, Jordi Arnau ens mostra com es pot abordar el tema de la modelització matemàtica amb tot el rigor necessari i partint d'objectes ben coneguts pels alumnes, com ara el «dònut» i la mítica Estrella de la mort de la saga de *La guerra de les galàxies*. Propostes com aquesta han de servir, sens dubte, per a què el treball de la modelització matemàtica, inclosa de manera explícita en el nou currículum de les matemàtiques de batxillerat, comenci a ser vista com un objectiu a l'abast de qualsevol docent i alhora com una font de motivació per als alumnes en plantejar-los reptes basats en l'anàlisi d'objectes que els són molt propers.

Finalment, l'últim article, titulat «Les construccions geomètriques euclidianes i la papiroflèxia: una fusió matemàtica», és un text captivador escrit per Josep Pla Carrera que explora la connexió entre les matemàtiques clàssiques i l'art de la papiroflèxia. L'autor ens introdueix a les «construccions geomètriques euclidianes» i les «matemàtiques cartesianes», i hi detalla les tècniques que es basen en el regle i el compàs, i com han establert el punt de partida per trobar la solució de molts dels problemes geomètrics clàssics.

El lector descobrirà que aquestes eines fonamentals, que es remunten a l'escola de Plató i els «Elements» d'Euclides, són, encara ara, bàsics en la resolució de problemes geomètrics actuals. A més, l'obra posa de manifest que la papiroflèxia, aparentment simple, amaga estructures matemàtiques sorprenents. Aquest text és una invitació a explorar la bellesa de la matemàtica i a fer-la accessible i interessant tant a experts com a persones que expressen curiositat en aquest sentit.

Voldríem que gaudíssiu de tots els articles i esperem que us facin aprendre, o potser reaprendre, aspectes relacionats amb aquest món de les matemàtiques, present arreu i tan extens.

articles
articles



articles

Del tot al no-res: divulgant el pensament borrós a partir d'una exposició al Museu de Matemàtiques

Queralt Viladevall

Estudiant del doctorat en Educació de la UdG
i professora de Multimèdia a la UOC
qviladevall@uoc.edu

Àngel Alsina

Formador de mestres i catedràtic de Didàctica
de les Matemàtiques a la Universitat de Girona
angel.alsina@udg.edu

Joan Carles Ferrer Comalat

Professor de Matemàtiques de la UdG i
màster en Didàctica de les Matemàtiques
joancarles.ferrer@udg.edu

Resum

Aquest article presenta els resultats de l'aprenentatge no formal generats en una exposició al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) al voltant dels principals quantificadors i el pensament borrós. S'infereix que les exposicions de contingut matemàtic fomenten aquest tipus d'aprenentatge matemàtic, i per tant, se'n desprèn la importància de poder comptar amb espais que promoguin activitats d'aquesta mena, com ara el Museu de Matemàtiques.

Abstract

This paper presents the non-formal learning generated by an exhibition at the Museum of Mathematics of Catalonia. The topic was the relationship between quantifiers and fuzzy thinking. It is inferred that exhibitions of mathematical content encourage this type of mathematical learning, and therefore that it is important to have places that promote this type of activity, such as the Museum of Mathematics.

1. Introducció

El poc, molt o res (o cap) són quantificadors que s'utilitzen per designar quantitats indefinides relacionades amb la numeració, els quals poden ser introduïts a l'escola des d'edats primerenques (Canals, 1992). Per aquest motiu, no se'ns ha de fer estrany trobar tasques a partir de recursos gràfics (fitxes clàssiques) com les de les figures 1, 2 i 3, que permeten treballar el significat d'aquests quantificadors a l'aula.



Figura 1. Tasca d'encerclar la solució.



Figura 2. Tasca d'introduir text en caselles.



Figura 3. Tasca d'unir amb fletxes.

Tanmateix, en els quaderns i llibres de text de matemàtiques d'infantil o primària difícilment es proposen tasques similars per treballar els *poc*, *bastant* o *gens* relacionats amb la idea de graduació d'una qualitat, tot i que Canals (1992) exposa que a partir dels cinc anys els menors tenen la capacitat ben desenvolupada d'ordenar elements d'un conjunt segons la parcialitat de la propietat que el defineix. Addicionalment, cal tenir present també que els currículums oficials actuals d'infantil i primària (MEFP, 2022a; MEFP, 2022b) dediquen escassa atenció a la graduació i es continuen centrant a desenvolupar el pensament segons la lògica binària i la teoria de conjunts clàssica. En un futur proper, gràcies en bona mesura a l'impuls del moviment social de sexe no binari (Wilchins, 2007; Wilchins *et al.*, 2020), aquesta tendència podria canviar, i ho podria fer seguint la proposta d'acceptar noves idees genèriques (Vendrell, 2009), de la mà de la teoria dels conjunts borrosos (Zadeh, 1965), que accepta que els elements d'un conjunt hi poden pertànyer parcialment.

Considerant aquests antecedents, la finalitat de l'article és presentar i analitzar una exposició temporal al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) que pretén divulgar els conjunts borrosos com un coneixement rellevant que de mica en mica s'ha d'anar introduint en el currículum de matemàtiques si es vol trencar la visió binària de la realitat. Així, en la primera part es fonamenten teòricament els conjunts borrosos; en la segona es presenten les obres de l'exposició temporal *Del tot al no-res*; i, finalment, en la tercera, s'exposen els resultats esperats i els no esperats a partir d'aquesta exposició.

2. Els conjunts borrosos

Formalment, els conjunts borrosos es representen matemàticament amb una expressió que identifica cada element de l'univers amb el grau de pertinença al conjunt.

$$\tilde{A} = \{(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), (x_3, \mu_{\tilde{A}}(x_3)), \dots\}$$

Quan s'accepta la parcialitat de pertinença, els nombres $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ poden ser valors reals entre 0 i 1. El barret en $\tilde{A}$ identifica els valors $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ com a possibles nombres entre 0 i 1, tots dos inclosos.

En la figura 4 es representa visualment un conjunt borrós. A partir d'una selecció d'imatges del conjunt univers, els x_i del conjunt, es fixa per a cadascun d'aquests elements un grau de veritat del predicat «ser granota» i que representaria els nombres $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ definits anteriorment.

A més de l'estudi de com trobar un possible grau de veritat per a cada element, hi ha mol·tíssims altres temes d'estudi relacionats amb aquesta teoria, com per exemple les múltiples alternatives que se'ns presenten quan es tracta de definir el complementari, la unió i la intersecció de conjunts borrosos. Les més habituals solen ser les definides per Zadeh (1965):

$$\begin{aligned}\tilde{A}' &= \{(x_i, \mu_{\tilde{A}'}(x_i))\} \quad \text{amb} \quad \mu_{\tilde{A}'}(x_i) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) \\ \tilde{A} \cup \tilde{B} &= \{(x_i, \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x_i))\} \quad \text{amb} \quad \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x_i) = \text{màxim}(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i)) \\ \tilde{A} \cap \tilde{B} &= \{(x_i, \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x_i))\} \quad \text{amb} \quad \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x_i) = \text{mínim}(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i))\end{aligned}$$

				
1	0	0	0	0
				
0	0,5	0,25	0	0,75
			...	
0	0	0		

Figura 4. El conjunt borrós *Ser granota*.

Tenint en compte aquests antecedents, ja s'ha iniciat un debat en àmbits educatius sobre la introducció dels conjunts borrosos i la seva teoria associada en el currículum formal (Blanco *et al.*, 2016; Trillas i García-Honrado, 2019; Viladevall *et al.*, 2023a).

La nostra aportació en aquest debat, fruit de les investigacions en el marc d'una tesi doctoral en curs, és la d'introduir a les primeres etapes educatives el tema del grau de pertinença conjuntament amb els adverbis de quantitat, és a dir, els quantificadors. Aquesta idea permetria, per exemple, no haver de treballar amb nombres entre 0 i 1 o entre cap escala homomòrfica tipus 0 a 100. La proposta és coherent amb el fet que en la investigació amb teoria de conjunts borrosos és permès que en experiments de determinació de graus s'utilitzin termes lingüístics per establir els valors numèrics dels graus (Kaufmann i Aluja, 1988; Alsina, C. i Trillas, 1991).

Sobre aquesta possible transformació curricular, de moment el que ja es pot afirmar és que, a mesura que el nen creix, el seu raonament lògic traspasa el binarisme i comença a percebre que és el gris, i no el blanc o el negre, el que pot ser més ajustat quan es tracta de descriure moltes de les situacions que l'envolten. També sabem que, amb uns anys més, el menor arriba a tenir prou coneixements per aplicar de la manera correcta tot de termes de graduació qualitativa a multitud de situacions quotidianes. Aleshores, ens preguntem: de quina manera els nens adquireixen aquest aprenentatge?

Baroody (1987) explica que els infants comencen a construir aquest coneixement en un entorn informal, no escolar, a partir de les interaccions amb el medi físic i social, on es presenten escenaris com els jocs, els contes o les exposicions, els quals generen aprenentatges d'una manera natural i espontània. Autors com Alsina, À (2015), Alsina, À. *et al.* (2023), Geist (2014) o Clements i Sarama (2015), entre d'altres, han explicitat aquests coneixements emergents de naturalesa intuïtiva i informal.

L'experiència que presentem mostra un cas particular d'aprenentatge no formal ofert en un context d'exposició al Museu de Matemàtiques de Catalunya.

3. L'exposició temporal *Del tot al no-res*

L'exposició temporal *Del tot al no-res* es va originar a partir de la proposta de la Unitat de Matemàtiques de la Universitat de Girona. Aquesta exposició va ser anunciada en el web de la Setmana de la Ciència 2021 i seguia la idea de popularitzar el pensament borrós, tal com s'havia fet en les exposicions *Fuzzy Art*, exhibida en el Museu de la Ciència CosmoCaixa (Viladevall, 2018) i *L'increïble enginy dels animals* (Viladevall, 2020), que ha estat exposada en diverses biblioteques públiques municipals.

Als jardins de la que actualment és la seu principal del MMACA (Imatge 1) es van mostrar deu obres de creació pròpia per part de la primera autora de l'article (Queralt Viladevall), les quals tenien per objectiu mostrar deu situacions quotidianes on es passava del tot al no-res.



Imatge 1. Obres de l'exposició.

El cartell de l'exposició que acompanyava les obres (figura 5) presentava una ampliació de l'obra *Glaçons*, feta amb la finalitat que el visitant pogués copsar que les obres es podien ampliar amb molts més elements intermedis.

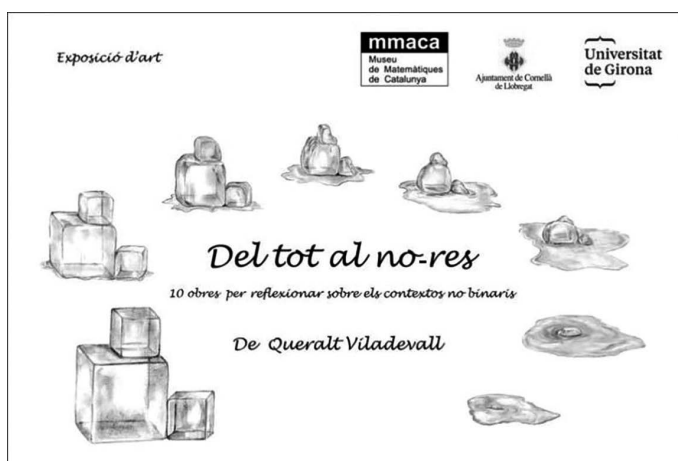


Figura 5. Cartell de l'exposició.

La inauguració de l'exposició es va acompanyar amb un taller de creació d'un zoòtrop. Més d'un centenar de persones hi van participar. En una tira de paper, calia dibuixar els diversos estadis d'un ull obrint-se i tancant-se, decorar l'exterior del zoòtrop i enganxar-ne les parts, que acabaven formant aquesta joguina òptica inventada per William George Horner (imatge 2).



Imatge 2. El taller.

La tira del zoòtrop (figura 6) era un primer exemple que permetia reflexionar sobre el concepte de graduació, ja que contenia una seqüència d'un ull obrint-se i tancant-se, i permetia també treballar com expressar amb paraules l'evolució del procés: ull no obert, ull una mica obert, ull més obert que l'anterior, ull gairebé obert del tot o ull completament obert.

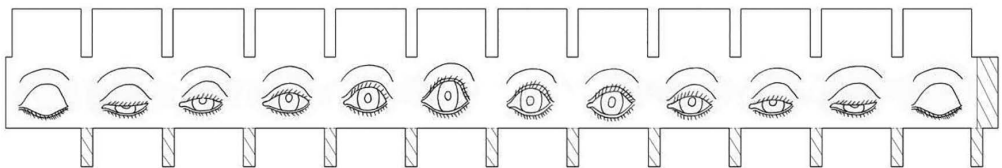


Figura 6. Seqüència d'un ull obrint-se i tancant-se.

En l'àmbit científic, cadascuna de les obres tenia relació amb el pensament borrós, el qual permet deixar de pensar en termes de veritat o falsedat absolutes i classificar les situacions en una escala qualitativa de graus entre les dues possibilitats.

En la vida real trobem multitud de situacions que són molt difícils o impossibles de classificar en un conjunt, com per exemple distribuir un conjunt de fruites en grups de madures o no madures; classificar tots els moments de la posta de sol en dia o nit; o, fins i tot, classificar els instants d'existència d'un ésser considerant-lo viu o mort.

I és que, en uns contextos determinats, es pot acceptar que les coses poden ser al mateix temps en un cert grau i no ser en un altre grau. L'exposició pretenia ser un petit recull d'aquestes situacions amb l'objectiu subjacent de fer reflexionar el visitant sobre els problemes que ocasiona voler-ho classificar tot binàriament.

A continuació, es presenten detalladament cadascuna de les deu situacions i les obres actuals dissenyades específicament per il·lustrar-les. Amb elles, és fàcil introduir en un públic adult les idees presents als supòsits de la teoria de conjunts borrosos, com ara la no existència de la paradoxa sorites (situacions 3.3. i 3.4) o la subjectivitat de la determinació dels valors del grau de pertinença al conjunt.

Prèviament, cal dir que avui dia i en alguns àmbits es considera que una exposició, més que explicar, ha de despertar preguntes en el visitant (Wagensberg, 2000). Aquesta idea és la que ens va guiar a presentar al visitant les dues primeres obres abans d'entrar en explicacions de caràcter matemàtic.

Esperàvem que el visitant, amb aquestes dos primers exemples de situacions reals molt conegudes per a tothom, hi tornés tard o d'hora per preguntar-se quina relació tenien amb la resta de l'exposició.

3.1. Primera situació. Capgròs



Figura 7. Obra *Capgròs*, de Queralt Viladevall.

En la figura 7 es poden observar diferents estats de la metamorfosi de capgròs a granota: les cinc situacions presents, d'esquerra a dreta, es poden etiquetar com a capgròs, capgròs amb dues potes, capgròs amb cos de granota o granota amb cua llarga, granota amb cua curta i granota.

3.2. Segona situació. Glaçons

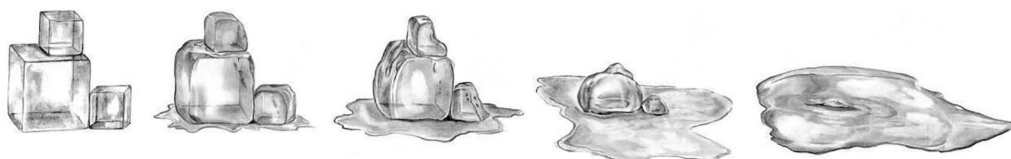


Figura 8. Obra *Glaçons*, de Queralt Viladevall.

L'obra *Glaçons* (figura 8) mostra el desglaç d'uns cubs de gel perfectes. Ja en la segona imatge, s'observa que les cares i les arestes han perdut una mica la forma, i a mesura que l'aigua dels glaçons passa de sòlida a líquida la deformació va a més i més.

El pas de sòlid a líquid és una segona situació icònica coneguda per grans i petits des de sempre. No hi solem reflexionar, però en les situacions intermèdies hi ha una part sòlida i una part líquida a la vegada. Per tant, tenim un segon bon exemple de context real en el qual és acceptable afirmar amb pensament borrós que les coses poden ser i no ser en un cert grau.

3.3. Tercera situació. Del munt al no munt



Figura 9. Obra *Del munt al no munt*, de Queralt Viladevall.

Aquesta obra tenia per objectiu presentar formalment el que es coneix com a paradoxa sorites o paradoxa del munt.

La pregunta que aquesta paradoxa planteja és la següent: en quin moment un munt de sorra deixa de ser un munt quan en traiem granets? (figura 9) Si tenim un munt de sorra i en traiem un granet, seguirem tenint un munt. Això sembla inqüestionable. Per tant, un munt de sorra menys un granet és també un munt de sorra. El problema sorgeix en pensar que això és contradictori amb el fet que si anem traient un granet darrere l'altre tard o d'hora ens quedarem amb només un o dos granets, i ningú consideraria que un o dos granets formen un munt de sorra.

En pensament binari, on les situacions només es poden classificar com a veritat o mentida, s'espera que si es passa de veritat a mentida de manera seguida, en algun moment s'ha de passar de mentida a veritat. Aleshores, té sentit intentar trobar la resposta a quin és el moment exacte en què es deixa de tenir un munt.

3.4. Quarta situació. De la poma a la no poma

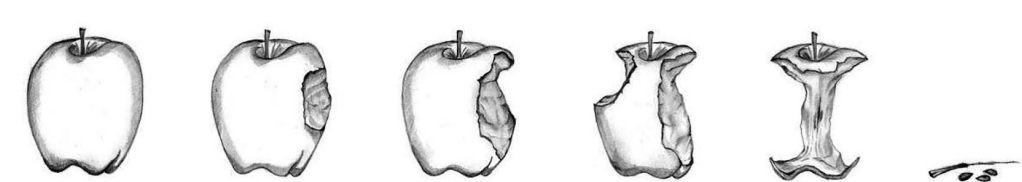


Figura 10. Obra *De la poma a la no poma*, de Queralt Viladevall.

La paradoxa sorites apareix en moltes situacions on hi ha una disminució gradual d'un objecte. Per exemple, si ens anem menjant una poma a poc a poc, en quin moment deixem de poder considerar que és una poma?

El matemàtic Bart Kosko va ser el primer a comentar, en el seu llibre *Pensament borrós* (Kosko, 1995), que en aquest pensament, el qual accepta que el grau de pertinença d'un objecte a un conjunt pot ser un valor entre el 0 % i el 100 %, no es produeix aquesta paradoxa atès que simplement s'accepta que a cada mossegada tenim menys poma, però que sempre es pot veure com a poma en un grau o en un altre.

L'obra de la figura 10 correspon a una visualització d'aquesta idea: en la primera imatge tenim poma al 100 %; en la segona, aproximadament al 95 %; en la tercera, al 60 %; en la quarta, al 35 %; en la penúltima, al 8 %; en la darrera a l'1 %; i si ens mengéssim també les llavors i la cua tindríem poma al 0 %. Kosko dedueix que en acceptar el grau de pertinença entre un 100 % fins a un 0 % sempre podem dir que tenim poma, encara que sigui en molt poc grau o en un grau igual a zero. Aleshores, si sempre tenim poma, no té sentit que ens preguntem quan deixem de tenir-ne.

3.5. Cinquena situació. Alegria

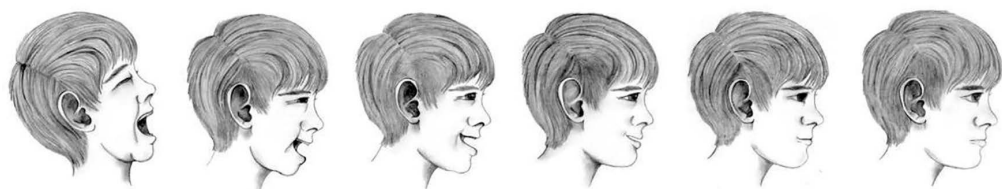


Figura 11. Obra *Alegria*, de Queralt Viladevall.

L'obra de la figura 11 pretén mostrar que hi ha multitud de situacions que es poden graduar entre el 100 % i el 0 %; en aquest cas, hem triat l'alegria. A més, pretenia obrir la reflexió que no estar alegre no implica haver d'estar enfadat.

El problema de confondre la negació de les afirmacions amb les afirmacions contradictòries (Linares *et al.*, 2018) produeix errors, com per exemple a l'hora de construir correctament les escales de Likert, que són unes escales de qualificació per graduar el grau d'acord o desacord amb algun tema o alguna característica (Viladevall *et al.*, 2023b).

Cal tenir present que, a través dels gestos de la cara i del cos, transmetem una gran quantitat d'informació que mostra les emocions que sentim. De fet, en l'ésser humà podem identificar set emocions bàsiques que es transmeten a través de l'expressió facial: l'alegria, la tristesa, la por, l'enuig, el fàstic, el menyspreu i la sorpresa, sentiments molt subjectius i personals.

El riure és la manifestació externa humana de l'emoció d'alegria. Es compon bàsicament d'una expressió facial acompanyada d'un so discontinu. Si no hi ha so, es parla de somriure. La seva expressió màxima es coneix com a gran riallada.

Somriure, riure o gran riallada expressen, doncs, diferents graus d'intensitat del mateix estat emocional. El somriure suposa el grau més lleu, és d'àmbit més local, i sol manifestar més sovint emocions de satisfacció i bons desitjos. El riure, a diferència del somriure, té volum sonor, és públic i notori, i pot implicar tot el cos. De fet, en català i en molts altres idiomes, la

paraula somriure ve de son- i riure, on son- és un prefix que prové de la forma llatina *sub-*, que significa «per sota», i que mostra la graduació de l'emoció.

3.6. Sisena situació. Plenitud

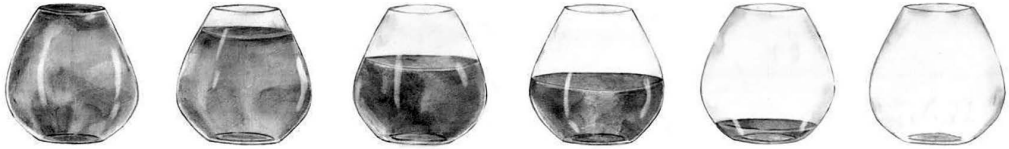


Figura 12. Obra *Plenitud*, de Queralt Viladevall.

L'obra que es mostra en la figura 12, a banda que segueix presentant exemples quotidians on es passa del tot al res gradualment, pretenia plantejar el que s'anomena vaguetat de les paraules i que, a causa d'aquesta vaguetat, pot esdevenir complicat decidir en quin moment assignem el 100 % o el 0 % a una situació i, per tant, cal admetre una certa arbitrarietat en aquesta assignació.

Quan demanem que ens omplin un got d'aigua, normalment no esperem que ens l'omplin com a la primera de les imatges. De fet, ja considerem el got ple en una situació com la que mostra la segona imatge.

De la mateixa manera, en la penúltima o darrera imatge es podria considerar que el got és buit, malgrat que encara hi quedi un cul d'aigua.

3.7. Setena situació. Vellesa



Figura 13. Obra *Vellesa*, de Queralt Viladevall.

En aquesta obra (figura 13), amb una possible graduació del 100 % al 0 %, es reflexiona també sobre l'ús de les paraules.

Quan diem que una persona és vella, no tenim una edat exacta al cap, però no hi ha dubte que una persona d'aspecte com la de la primera imatge es pot considerar vella. Si estem a prop dels 50 considerarem que la segona de les imatges representa una persona propera a la vellesa però que encara conserva joventut. Ara bé, des del punt de vista d'una persona jove de 15 anys, tots els que passen de 40 o 50 ja són vells.

Així, aquesta obra mostra que persones diferents poden tenir percentatges d'acceptació diferents i, per tant, presenta la idea que l'assignació de la graduació pot ser una assignació subjectiva relacionada amb el món real que ens envolta.

3.8. Vuitena situació. Vent fort

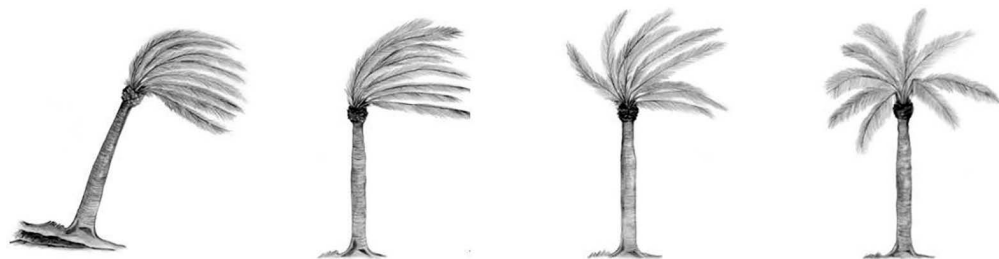


Figura 14. Obra *Vent Fort*, de Queralt Viladevall.

L'obra que es mostra en la figura 14 serveix per introduir la classificació de situacions segons l'expressió «fa un vent fort». Científicament, segons l'escala de la força del vent, es considera vent fort el que bufa a més de 39 km/h, velocitat en la qual ja tenim problemes per mantenir un paraigua obert.

Ara imaginem que el vent bufa a 38,999999 km/hora. Qualsevol persona diria que el vent és fort, però la classificació en pensament binari diria que no, que la situació s'ha de classificar dient que no fa un vent fort encara que sigui incapaç de diferenciar, amb els sentits, aquesta situació de la de 39 km/h.

L'establiment de valors exactes de classificació provoca sovint situacions absurdes com aquesta.

3.9. Novena situació. Nivell de duresa

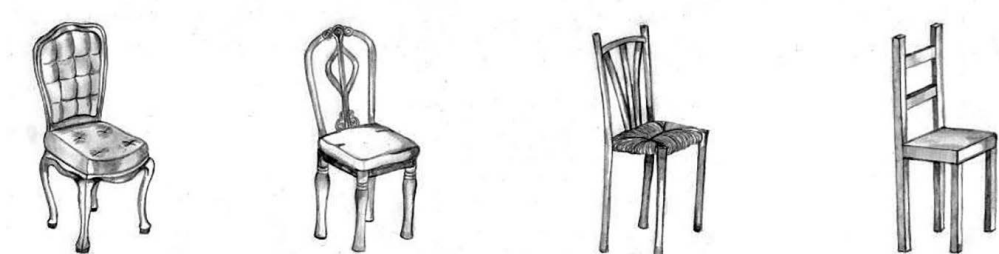


Figura 15. Obra *Nivell de duresa*, de Queralt Viladevall.

L'obra està inspirada en un dels contes amb què els infants aprenen pensament no bivalent: *La Rinxols d'Or*. Aquesta narració conté una gran quantitat d'exemples del fet que no totes les característiques del món real es poden classificar en un es té o no es té (Viladevall *et al.*, 2023a). Així, la Rinxols d'or troba un plat de sopa massa calenta, un plat de sopa gens calenta i un plat de sopa en el seu punt ideal; una cadira massa tova, una de massa dura i una amb el seient d'una duresa justa (figura 15); un llit molt alt, un llit poc alt i un llit a l'alçada que considera ideal...

El conte ens porta a la reflexió de com, de manera informal, és a dir, fora de l'escola, a poc a poc anem aprenent que la vida té molts tons de gris i que les coses no són sempre blanques o negres.

3.10. Desena situació. Forma circular

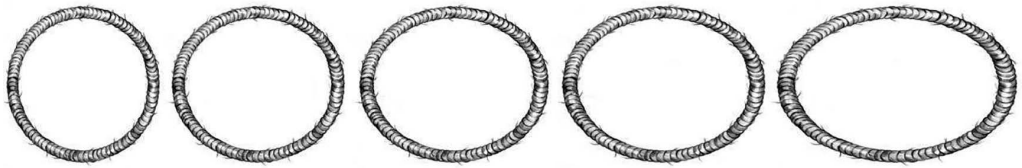


Figura 16. Obra *Forma circular*, de Queralt Viladevall.

Aquesta obra (figura 16) tancava l'exposició i estava inspirada en els treballs de Natalia R. Shenger-Krestovnikova, una estudiant de doctorat d'Ivan Pàvlov que va descobrir un fet sorprenent relacionat amb la classificació binària.

Ivan Pàvlov va ser professor de Fisiologia en l'Acadèmia Mèdica Imperial i director del Departament de Fisiologia de l'Institut de Medicina Experimental de Sant Petersburg, i va formular el que es va anomenar «condicionament clàssic», que es basa en l'estudi sobre com és possible provocar unes respostes determinades a partir d'uns estímuls prèviament neutres. A tall d'exemple, és molt conegut l'experiment consistent a fer sonar un metrònom (popularment es creu que es va utilitzar una campana) just abans de donar aliment a un gos. Es va arribar a observar que, quan el gos tenia gana, començava a salivar en el mateix instant que sentia el so del metrònom.

L'alumna de Pàvlov, Shenger-Krestovnikova, també treballava amb cans, condicionant-los amb cercles i el·lipses. Quan el gos veia un cercle sabia que li donarien menjar, però si la figura es corresponia amb una el·lipse, l'animal no rebia aliment. D'acord amb els processos normals de discriminació, el gos va aprendre a salivar quan veia el cercle i a no salivar quan veia l'el·lipse.

Després d'aquest condicionament, Shenger-Krestovnikova va seguir l'experiment presentant a l'animal el·lipses bastant circulars, de manera que era difícil determinar quan hi hauria menjar i quan no. En un d'aquests experiments, en el moment que l'el·lipse va adoptar una forma molt circular, alguns dels gossos van mostrar sobtadament un comportament força estrany: udolaven, gemegaven, presentaven conductes destructives... La situació d'extrema incertesa va ser massa estressant en algun cas. Pàvlov va anomenar aquest fenomen «neurosi experimental» i va plantejar la hipòtesi que les neurosis humanes es podrien desenvolupar d'una manera semblant. El dubte patològic d'un subjecte sobre l'estat de neteja de les seves mans és un típic exemple de neurosi humana (Laín, 1984). El pensament borrós pot ajudar a evitar l'aparició d'aquestes neurosis (Linares *et al.*, 2020) i, per tant, es pot justificar la inclusió del seu estudi en el currículum.

4. Resultats esperats, no esperats i conclusions

Amb l'exposició s'esperava oferir la possibilitat de comprendre diversos punts de la teoria de conjunts borrosos (Zadeh, 1965).

En primer lloc, s'esperava que el visitant adult pogués arribar a comprendre que la teoria de conjunts borrosos accepta que els elements d'un conjunt poden pertànyer en un grau