

PROPAGACIÓ DEL CAMP ELECTROMAGNÈTIC

Enric Bertran Serra, José Luis Andújar Bella,
José Miguel Asensi López

Departament de Física Aplicada



PROPAGACIÓ DEL CAMP ELECTROMAGNÈTIC

Enric Bertran Serra
José Luis Andújar Bella
José Miguel Asensi López

Índex

AGRAÏMENT.....	9
PREFACI.....	11
PART 1. PROPAGACIÓ EN MEDIS LLIURES.....	13
1. LLEIS FONAMENTALS DE L'ELECTROMAGNETISME	15
1.1. Creació del camp electromagnètic	15
1.1.1. Equacions de Maxwell.....	15
1.1.2. Medis materials.....	17
1.2. Acció del camp electromagnètic.....	21
2. PRINCIPIS DE CONSERVACIÓ DE L'ENERGIA I DEL MOMENT.....	23
2.1. Principi de conservació de l'energia	23
2.2. Principi de conservació del moment	27
3. PROPAGACIÓ DEL CAMP ELECTROMAGNÈTIC.....	39
3.1. Equació de propagació dels camps	39
3.2. Propagació en un medi indefinit	42
3.2.1. Propagació en un dielèctric perfecte	44
3.2.2. Propagació en un medi conductor	49
3.3. Constant de propagació i impedància intrínseca	52
3.3.1. Constant de propagació complexa K	52
3.3.2. Impedància intrínseca η	52
3.4. Densitat i flux d'energia en medis indefinits.....	60
3.5. Incidència normal en la interfície entre dos medis.....	63
3.5.1. Impedància d'ona. Coeficients de reflexió i coeficients de transmissió	64
3.5.2. Cas límit: incidència sobre un conductor perfecte	66
3.6. Problemes de propagació en medis lliures	68
PART 2. PROPAGACIÓ GUIADA.....	73
4. LÍNIES DE TRANSMISSIÓ.....	75
4.1. Equacions generals de les línies de transmissió	75
4.1.1. Línia de transmissió sense pèrdues	76
4.2. Coeficient de reflexió	86
4.3. Relació d'ones estacionàries	87
4.4. Adaptació d'impedàncies	90
4.5. Diagrama de Smith	94
4.6. Determinació d'impedàncies	98
4.7. Línies ressonants i línies antiressonants	100
4.8. Problemes de línies de transmissió	104
5. GUIES D'ONA CONDUCTORES.....	121
5.1. Condicions de contorn del camp electromagnètic.....	121
5.2. Teoria general de les guies d'ona conductores.....	126
5.2.1. Camp electromagnètic en una guia conductora	126

5.2.2.	Guia rectangular.....	138
5.2.3.	Guia plana	143
5.2.4.	Guia cilíndrica	147
5.2.5.	Guia coaxial	152
5.2.6.	Potència transmesa per una guia d'ones.....	158
5.2.7.	Atenuació en una guia d'ones	159
5.3.	Problemes de propagació en guies d'ona conductores	162
6.	CAVITATS RESSONANTS.....	175
6.1.	El camp electromagnètic en una cavitat.....	175
6.2.	Cavitat rectangular.....	179
6.3.	Cavitat cilíndrica.....	181
6.3.1.	Cavitat circular.....	185
6.4.	Cavitat esfèrica	191
6.5.	Factor de qualitat	195
6.6.	Problemes de cavitats ressonants.....	198
7.	GUIES D'ONA DIELECTRIQUES	201
7.1.	Propagació en una guia dielèctrica	201
7.2.	Guies dielèctriques planes	201
7.3.	Guies dielèctriques cilíndriques.....	208
7.4.	Aplicacions de les guies dielèctriques	213
7.5.	Dispersió i amplificadors òptics	215
7.6.	Òptica integrada	218
7.7.	Problemes de guies dielèctriques.....	220
8.	TECNOLOGIA I APLICACIONS DE LES ONES ELECTROMAGNÈTIQUES	221
8.1.	Espectre electromagnètic	221
8.2.	Ones guiades	221
8.3.	Aplicacions de la tecnologia electromagnètica.....	221
	PART 3. RADIACIÓ ELECTROMAGNÈTICA. ANTENES	231
9.	RADIACIÓ ELECTROMAGNÈTICA	233
9.1.	Emissió a partir de les fonts. Potencials electromagnètics.....	233
9.1.1.	Equacions dels potencials electromagnètics	234
9.1.2.	Camps emesos. Energia emesa	237
9.1.3.	Potencials de Hertz i desenvolupament multipolar de la radiació	242
9.1.4.	Radiació dipolar	245
9.2.	Camp d'una càrrega en moviment uniforme.....	250
9.2.1.	Potencials de Lienard-Wiechert	250
9.2.2.	Expressió dels camps de radiació (en el buit)	255
9.3.	Camp e-m creat per una càrrega accelerada	260
9.3.1.	Càrregues amb velocitats baixes	266
9.3.2.	Càrrega amb velocitat i acceleració paral·leles	270
9.3.3.	Càrrega amb velocitat i acceleració perpendiculars.....	280
9.3.4.	Cas general. Càrrega amb velocitat i acceleració qualsevol	282
9.4.	Problemes de radiació electromagnètica	283

10. ANTENES	287
10.1. Camp emès per una antena elemental	287
10.2. Emissió de l'antena lineal	291
10.3. Resistència de radiació d'una antena	296
10.4. Agrupació d'antenes lineals	297
10.5. Antenes circulars	302
10.6. Problemes d'antenes	302
BIBLIOGRAFIA	305
ÍNDEX ALFABÈTIC	307

AGRAÏMENT

Els autors agraeixen el suport a tots els professors de les matèries relacionades amb l'electromagnetisme del Departament de Física Aplicada de la Universitat de Barcelona i als professors ja jubilats que han contribuït de manera fonamental al disseny i la programació d'aquesta part de l'electromagnetisme, en particular al professor Josep M. Codina Vidal, que va ser el principal pioner d'aquesta assignatura, al professor Josep Lluís Morenza Gil, que va reorganitzar la matèria tal com s'ha impartit fins ara, i al Dr. Arturo Lousa Rodríguez, que va contribuir en la preparació de bastants dels problemes de la col·lecció impartida fins al present. L'assignatura també disposa d'un laboratori de tecnologia electromagnètica, muntat inicialment pel professor Josep M. Codina i el qual ha comptat amb la col·laboració activa del Dr. Xavier Compte Valls i la Dra. Carmen Martín Torres, amb diverses contribucions puntuals del Dr. Josep Graells Casanellas, del professor Joan Esteve Pujol i del Dr. Carles Corbella Roca i, en els dos últims cursos, amb l'assistència del Dr. Islam Alshaikh, del Dr. Stefanos Chaitoglou i, darrerament, del Dr. Jordi Gomis Brescó. Entre tots han fet possible que s'imparteixin unes pràctiques de laboratori complementàries dels continguts teòrics que encara avui dia estan reiteradament considerades pels estudiants com unes pràctiques de laboratori il·lustratives i d'un nivell força elevat. Volem expressar el nostre profund agraïment als companys del Departament de Física Aplicada pel seu suport constant. La seva ajuda i la seva col·laboració han estat imprescindibles sempre que les hem necessitades. En particular, volem agrair al nostre director de Departament, el professor Manuel Varela Fernández, els ànims que sempre ha donat i que ens han impulsat a finalitzar aquest llibre i a publicar-lo i el seu aval, cosa que l'ha convertit en una referència de la docència impartida al nostre departament.

També voldríem fer arribar el nostre agraïment als més de mil estudiants que han cursat l'assignatura durant els darrers trenta anys. Les seves aportacions i participació han contribuït de manera significativa a la millora contínua del nostre ensenyament.

Aquest llibre recull els aspectes més fonamentals de la propagació electromagnètica en medis lliures i la propagació guiada (línies de transmissió i guies d'ona) en el marc de l'electromagnetisme clàssic. Els continguts corresponen a la primera part del curs d'Electromagnetisme Aplicat (actualment Tecnologia Electromagnètica) impartit pels autors des del curs 1992-1993, inicialment en la llicenciatura de Física de la Universitat de Barcelona i actualment en el Grau de Física d'aquesta universitat. Els continguts d'aquest llibre s'han ampliat a partir dels apunts dels professors Josep M. Codina Vidal i Josep Lluís Morenza Gil, que van ser els que inicialment van elaborar el programa d'Electromagnetisme a l'antic Departament d'Electricitat i Electrònica de la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona en les dècades dels setanta i vuitanta i després com a Departament de Física Aplicada i Òptica fins a mitjans dels noranta. Els continguts exposats en aquest llibre serveixen perquè els estudiants del curs, que ja tenen una formació prèvia en els fonaments d'electricitat i magnetisme, acabin d'establir els conceptes de la propagació electromagnètica i d'unificar la notació amb la utilitzada en l'estudi dels materials dielèctrics i conductors. Les unitats utilitzades en aquest llibre corresponen al sistema internacional d'unitats o MKSA.

En la primera part del llibre comencem amb la propagació en medis oberts o lliures, descrivim les equacions de Maxwell i les condicions de contorn del camp electromagnètic en el buit i en medis perfectes, especifiquem els casos ideals de dielèctric perfecte (amb constants ϵ i μ , lineals, homogènies i isòtropes, i conductivitat nul·la) i medi conductor perfecte (cas ideal amb conductivitat γ infinita), per a després veure el cas més real de material conductor (amb constants ϵ , μ i γ) i l'aproximació al cas real d'un bon conductor. A continuació descrivim les propietats de conservació derivades de les equacions de Maxwell, conservació de l'energia i introducció del vector de Poynting, conservació del moment cinètic i propagació a través d'una interfície plana que separa dos medis diferents, per als casos de medis absorbents i no absorbents. En la segona part estudiem la propagació guiada, començant per les línies de transmissió tractades amb magnituds de circuit deslocalitzades, i després abordem la propagació del camp electromagnètic en guies conductores, cavitats ressonants i guies dielèctriques, amb la descripció de les condicions de contorn dels camps elèctric i magnètic, necessàries per a la integració de l'equació de propagació del camp electromagnètic dins de les guies i de les cavitats ressonants. Un capítol al final de la segona part parla d'algunes aplicacions tecnològiques de les ones guiades. La tercera part tracta sobre la radiació del camp electromagnètic. En aquesta secció, introduïm els potencials retardats i expliquem com determinar els camps a partir de la integració de l'equació dels potencials. També introduïm el potencial de Hertz i mostrem com es deriven els potencials electromagnètics (vectorial i escalar) a partir d'aquest. El desenvolupament multipolar de la radiació produïda per fonts harmòniques ens permet obtenir l'expressió de la radiació dipolar a partir del primer terme del desenvolupament. L'estudi continua amb l'anàlisi de la radiació generada per una càrrega en moviment uniforme i per una càrrega accelerada. Finalment, utilitzant els conceptes estudiats, detallem el camp electromagnètic emès per una antena elemental, així com alguns exemples del camp emès per sistemes d'associació d'antenes.

L'electromagnetisme clàssic requereix el coneixement del càlcul diferencial amb funcions de més d'una variable i això s'imparteix en cursos previs al de Propagació Electromagnètica. Els conceptes bàsics necessaris per escriure les equacions vectorials de Maxwell en forma diferencial i integral són introduïts i discutits en el curs anterior d'Electromagnetisme. El llibre planteja alguns exemples per resoldre i una llista de problemes en cada capítol, representatius dels que es plantegen a classe i en els exàmens.

ENRIC BERTRAN

JOSÉ LUIS ANDÚJAR

JOSÉ MIGUEL ASENSI

Departament de Física Aplicada

Universitat de Barcelona

Barcelona, juny de 2024

PART 1
PROPAGACIÓ EN
MEDIS LLIURES

LLEIS FONAMENTALS DE L'ELECTROMAGNETISME

Per tal de proporcionar una comprensió completa de la propagació electromagnètica en medis lliures, cal començar amb les lleis fonamentals que governen aquesta propagació. En aquest capítol introduïrem les equacions de Maxwell, que són el pilar de l'electromagnetisme clàssic, i explicarem com aquestes equacions descriuen la creació i la propagació dels camps elèctrics i magnètics. Abordarem les lleis fonamentals de l'electromagnetisme, que són crucials per entendre com els camps electromagnètics es propaguen en medis lliures. La comprensió d'aquestes lleis ens permetrà explorar la dinàmica dels camps elèctrics i magnètics en diferents entorns, especialment en medis oberts, on no hi ha parets conductores o interfícies dielèctriques que alterin la propagació dels camps.

La comprensió d'aquestes equacions i condicions permet entendre com es propaguen els camps electromagnètics en diferents situacions, des de medis lliures fins a medis guiats. Les conseqüències d'aquests estudis inclouen aplicacions tecnològiques com la transmissió de ràdio, la comunicació per microones i tota una sèrie de fenòmens físics fonamentals basats en les ones electromagnètiques i la seva interacció amb la matèria. Aquesta base teòrica permet als estudiants de física comprendre i aplicar els conceptes d'electromagnetisme en una àmplia varietat de contextos científics i tecnològics.

Començarem considerant la interacció entre diferents càrregues i corrents mitjançant dos processos: *creació* del camp i *acció* del camp.

1.1. Creació del camp electromagnètic

El camp electromagnètic es pot entendre com la combinació d'un camp elèctric $\vec{E}$ i un camp magnètic $\vec{B}$, que es genera a partir de les fonts, constituïdes per distribucions de càrrega i corrent. Les equacions de Maxwell descriuen com es crea el camp electromagnètic en presència d'aquestes distribucions. Les *fonts* per a la creació del camp electromagnètic són: la densitat volúmica de càrrega elèctrica ρ , la densitat superficial de càrrega elèctrica σ , la densitat de corrent $\vec{j}$ i el corrent superficial $\vec{k}$. Les fonts queden definides en cada punt i en cada instant de temps (x, y, z, t) , i hi farem referència mitjançant les expressions següents:

$$\begin{array}{ll} \rho(x, y, z, t) & \sigma(x, y, z, t) \\ \vec{j}(x, y, z, t) & \vec{k}(x, y, z, t) \end{array}$$

En les equacions de Maxwell tenim que en els primers membres hi ha les incògnites (els camps) i en els segons termes hi ha les dades (fonts). Estudiarem el cas del buit i dels medis materials amb un parell d'exemples bàsics: medis normals i medis perfectes.

1.1.1. Equacions de Maxwell

L'electromagnetisme es basa en quatre lleis experimentals fonamentals que descriuen la interacció entre els camps elèctrics i els magnètics, així com les càrregues i els corrents que els

generen. Aquestes lleis, anomenades llei de Gauss, llei d'Ampère-Maxwell i llei de Faraday, són conegudes com les equacions de Maxwell i es poden expressar en forma integral de la manera següent:

$$\begin{aligned}
 \text{Llei de Gauss per al camp } \vec{E}: & \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \\
 \text{Llei de Gauss per al camp } \vec{B}: & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\
 \text{Llei d'Ampère-Maxwell:} & \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I_D) \\
 \text{Llei de Faraday:} & \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

La llei de Gauss del camp elèctric ve expressada per la proporcionalitat del *flux del camp elèctric* a través d'una superfície tancada S i la càrrega neta Q_{int} continguda dins d'aquesta superfície, la qual comporta tant les càrregues puntuals com les distribucions de càrrega $\int_V \rho_{\text{int}} dV$ continguda en el volum V tancat per la superfície S . En la primera expressió de (1.1), ϵ_0 és la *permitivitat del buit*. La llei de Gauss per al camp magnètic estableix que no existeixen *monopols magnètics*, és a dir, que les línies de camp magnètic sempre formen llaços tancats. La llei d'Ampère-Maxwell descriu com els camps magnètics són generats tant per corrents elèctrics de càrregues en moviment, I , com per camps elèctrics variables en el temps, que produeixen un corrent I_D . En aquesta llei, el corrent $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$, on $\vec{j}$ representa la densitat de corrent associada a les càrregues que travessen la superfície S , envoltades pel circuit d'integració c , i el corrent $I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ és el *corrent de desplaçament* introduït amb la *hipòtesi de Maxwell*. En la tercera expressió de (1.1), μ_0 és la permeabilitat del buit. La llei de Faraday, la darrera expressió de (1.1), descriu com un camp magnètic variable en el temps (expressat amb la variació del flux magnètic a través d'una superfície S) genera un camp no electroestàtic (no generat per càrregues elèctriques), que es configura formant línies de força tancades al voltant de les línies de camp $\vec{B}$.

Aquestes lleis formen el fonament experimental de l'electromagnetisme i s'apliquen a una àmplia varietat de fenòmens de la física i la tecnologia, des de la generació i transmissió d'energia elèctrica fins a les ones electromagnètiques i la radiocomunicació.

Les equacions de Maxwell s'expressen en *forma local* i s'obtenen directament a partir d'aquestes lleis experimentals (1.1), aplicant el teorema de la divergència (o teorema d'Ostrogradsky) a les dues primeres lleis de Gauss i el teorema de Stokes a les lleis tercera i quarta, lleis d'Ampère-Maxwell i de Faraday, respectivament.

Les **equacions de Maxwell en el buit**, on no hi ha altra cosa que les fonts $(\rho, \vec{j})$, es poden expressar en funció d'aquestes de la manera següent:

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
 \end{aligned} \right\} \tag{1.2}$$

Les condicions de contorn són necessàries per determinar com es comporten els camps electromagnètics en les superfícies que separen diferents medis. Aquestes condicions estan

implícitament contingudes en les equacions de Maxwell i són crucials per resoldre problemes pràctics d'electromagnetisme. Les condicions de contorn del camp a les superfícies són:

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \vec{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= \mu_0 \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

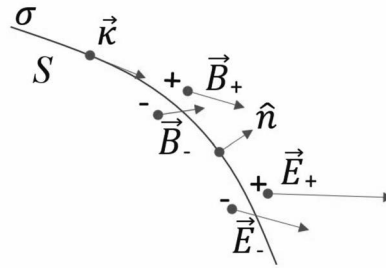


Figura 1.1. Discontinuitat del camp elèctric en travessar una superfície S que separa dues regions amb una densitat de càrrega σ i un corrent superficial $\vec{k}$.

Aquestes equacions de superfície (1.3) s'obtenen a partir d'un pas al límit de les equacions de Maxwell (1.2), i descriuen com els components dels camps elèctrics i magnètics canvien quan travessen superfícies de discontinuïtat, com ara superfícies amb densitats de càrrega σ i de corrent superficial $\vec{k}$, o, com veurem més endavant, quan tractem amb medis materials, les fronteres entre diferents materials o medis. Per exemple, observem que el component normal del camp magnètic i el component tangencial (o paral·lel a la superfície S) del camp elèctric són continus en travessar una superfície de discontinuïtat S (fig. 1.1). Aquestes expressions (1.2) i (1.3) constitueixen les lleis del camp electromagnètic en el buit en *forma local* i, per tant, es compleixen en cada punt.

1.1.2. Medis materials

Per descriure el comportament dels **camps en medis materials** podem utilitzar les equacions de Maxwell, però cal tenir en compte que *els camps polaritzen el medi material*. Per això, hem de considerar dues observacions:

- La càrrega Q_{int} que apareix en la llei de Gauss per al camp elèctric en forma integral (1.1), així com la densitat de càrrega que apareix en l'expressió local de la llei de Gauss (1.2), en el cas de medis materials es refereixen a **tota la càrrega**, incloent-hi tant la *càrrega lligada* com la *càrrega lliure*.
- El corrent $\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ que travessa la superfície S en la llei d'Ampère-Maxwell en forma integral (1.1), així com la densitat de corrent volúmica $\vec{j}$ que apareix en la llei local d'Ampère-Maxwell (1.2), en el cas de medis materials es refereixen a **tots els corrents**, incloent-hi els associats a les càrregues *lligades* i de *polarització elèctrica i magnètica*, així com els associats a les càrregues *lliures*.

Aquestes consideracions es poden expressar amb la introducció de dos camps vectorials que descriuen les característiques dels medis materials, $\vec{P}(x, y, z, t)$ (vector de polarització elèctrica) i $\vec{M}(x, y, z, t)$ (vector de polarització magnètica o imantació), on:

$\vec{P}$ (polarització elèctrica)
 $\vec{M}$ (polarització magnètica o imantació)

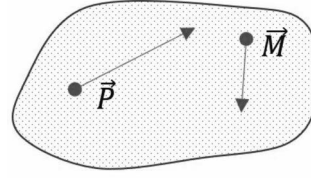


Figura 1.2. Medi material polaritzat, $\vec{P}$, $\vec{M}$, per càrregues i corrents.

El medi crea camps elèctrics i magnètics, els quals, amb vista al càlcul, són equivalents als creats per unes certes densitats de càrrega i de corrent:

$$\vec{P} \begin{cases} \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \sigma_P = P_n \\ \vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{cases} \quad \vec{M} \begin{cases} \vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ \vec{\kappa}_M = \vec{M} \times \vec{n} \end{cases} \quad (1.4)$$

La utilització d'aquestes quantitats associades a la polarització elèctrica i la magnètica ens permet considerar les mateixes equacions que en el cas del buit, i llavors tindrem:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{(\rho + \rho_P)}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_P + \vec{j}_M + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

i les condicions de contorn per al camp:

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= \frac{(\sigma + \sigma_P)}{\epsilon_0} \\ \vec{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= \mu_0 (\vec{\kappa} + \vec{\kappa}_M) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Aquestes equacions, que són vàlides per a qualsevol medi material, s'han de completar amb les equacions constitutives del medi, les quals expressen les dependències dels vectors polarització elèctrica $\vec{P}$ i imantació $\vec{M}$ amb els camps elèctric $\vec{E}$ i magnètic $\vec{B}$:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= f(\vec{E}) \\ \vec{M} &= g(\vec{B}) \end{aligned}$$

Les funcions $f(\vec{E})$ i $g(\vec{B})$ són característiques de cada medi. En aquestes equacions hi figuren els dos camps i totes les densitats de càrrega lliure i les densitats associades a la polarització del medi:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{p-} &= P_{n-} \\ \sigma_{p+} &= -P_{n+} \end{aligned} \right\} \sigma_p = P_{n-} - P_{n+} = \vec{n} \cdot (\vec{P}_- - \vec{P}_+) = \sigma_{p+} + \sigma_{p-} \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\kappa}_{M-} &= \vec{M}_- \times \vec{n} \\ \vec{\kappa}_{M+} &= \vec{M}_+ \times \vec{n} \end{aligned} \right\} \vec{\kappa}_M = \vec{M}_- \times \vec{n} - \vec{M}_+ \times \vec{n}$$

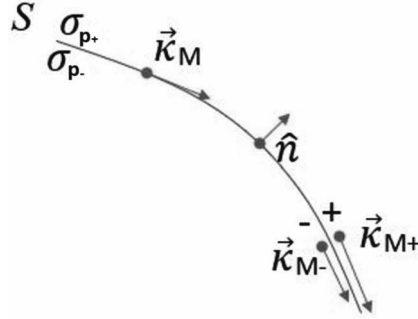


Figura 1.3. Discontinuitat de la densitat de càrrega superficial de polarització σ_p i del corrent superficial $\vec{\kappa}$ en travessar una superfície S , amb dues cares, que separa dos espais amb densitats de càrrega σ_{p-} (cara $-$) i σ_{p+} (cara $+$) i corrents superficials $\vec{\kappa}_{M-}$ (cara $-$) i $\vec{\kappa}_{M+}$ (cara $+$).

Si un dels medis és el buit, la $\vec{P}$ i la $\vec{M}$ corresponents seran nul·les. En el cas de medis materials és útil considerar les magnituds següents:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Utilitzant el *vector de desplaçament* $\vec{D}$ i la *intensitat del camp magnètic* $\vec{H}$, les equacions de Maxwell seran:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

i les condicions de contorn seran:

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_+ - \vec{D}_-) &= \sigma \\ \vec{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) &= \vec{\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

En aquestes equacions hi figuren els quatre camps i les densitats de càrrega lliure ρ i de corrent $\vec{j}$ associat al moviment de càrregues lliures; les densitats associades a la polarització del medi han desaparegut de la forma explícita.

Medis normals

Els medis normals són medis lineals i isòtrops (medis *li*) en els quals es verifica la linealitat dels vectors polarització $\vec{P}$ i $\vec{M}$ amb els camps elèctric i magnètic, respectivament:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \chi \vec{E} & (\chi = \text{susceptibilitat elèctrica}) \\ \vec{M} &= \chi_M \vec{H} & (\chi_M = \text{susceptibilitat magnètica})\end{aligned}$$

on els factors χ i χ_M són constants respecte als camps (si no, no hi hauria proporcionalitat) però poden variar d'un punt a un altre:

$$\begin{aligned}\chi &= \chi(x, y, z) \\ \chi_M &= \chi_M(x, y, z)\end{aligned}$$

Podem escriure:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \rightarrow \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon_r, \text{ permitivitat elèctrica absoluta, } \epsilon_0, \text{ i relativa del medi, } \epsilon_r. \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \rightarrow \mu = \mu_0(1 + \chi_M) = \mu_0 \mu_r, \text{ permeabilitat absoluta, } \mu_0, \text{ i relativa del medi, } \mu_r.\end{aligned}$$

Amb aquestes noves constants, les equacions dels camps es poden escriure com a:

$$\left. \begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} / \mu &= \vec{j} + \epsilon \partial \vec{E} / \partial t \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t\end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

i les condicions de contorn corresponents seran:

$$\left. \begin{aligned}\vec{n} \cdot (\epsilon_+ \vec{E}_+ - \epsilon_- \vec{E}_-) &= \sigma \\ \vec{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{B}_+ / \mu_+ - \vec{B}_- / \mu_-) &= \vec{\kappa}\end{aligned}\right\} \quad (1.12)$$

on veiem que apareixen només els camps $\vec{B}$ i $\vec{E}$ i les densitats reals. La influència dels medis materials està representada globalment pels coeficients ϵ i μ .

Medis perfectes

Els medis perfectes són medis normals i homogenis (medis *lih*), és a dir, χ i χ_M , i ϵ i μ són constants respecte a les variables espacials i al temps (x, y, z, t). En aquestes condicions les equacions de Maxwell s'escriuran com a:

$$\left. \begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon & \vec{n} \cdot (\epsilon_+ \vec{E}_+ - \epsilon_- \vec{E}_-) &= \sigma \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{n} \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu (\vec{j} + \epsilon \partial \vec{E} / \partial t) & \vec{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t & \vec{n} \times (\vec{B}_+ / \mu_+ - \vec{B}_- / \mu_-) &= \vec{\kappa}\end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

on les condicions de contorn són les mateixes que en els medis normals, amb l'única diferència que μ_+ , ϵ_+ , μ_- i ϵ_- són constants en els desplaçaments al llarg de la superfície. Les equacions de Maxwell són les mateixes que en el buit però canviant ϵ_0 i μ_0 per ϵ i μ , respectivament. Amb les expressions integrals passa el mateix.