445 TEXTOS DOCENTS

PROGRAMACIÓN LINEAL: ANÁLISIS POST-ÓPTIMO

Marcelino García Solera

Departamento de Econometría, Estadística
y Economía Aplicada

UNIVERSITAT DE BARCELONA

PROGRAMACIÓN LINEAL: ANÁLISIS POST-ÓPTIMO

Marcelino García Solera

Departamento de Econometría, Estadística
y Economía Aplicada

445 TEXTOS DOCENTS

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Edicions

Índice

1. **Introducción** 7
1.1. Planteamiento y resolución visual 7
1.2. Aproximación formal 10
1.2.1. Planteamiento 10
1.2.2. Solución óptima 13
1.3. Tabla simplex 20
1.3.1. Construcción 20
1.3.2. Interpretación 25
1.4. Óptimos alternativos para la región descrita 28
1.4.1. Preferencia por fabricar P_2 28
1.4.2. Preferencia por no fabricar 33
1.4.3. Consideraciones finales 38

2. **Análisis post-óptimo** 43
2.1. Ejemplo inicial 43
2.2. Adición de restricciones 48
2.3. Adición de variables 61
2.4. Variación en los coeficientes de la función objetivo 69
2.4.1. Cambios individuales: sensibilidad 69
2.4.2. Modificaciones simultáneas 72
2.5. Variación en los términos independientes 81
2.5.1. Cambios individuales: sensibilidad 81
2.5.1.1. Disponibilidad de mano de obra 81
2.5.1.2. Montante del pedido pendiente 85
2.5.1.3. Disponibilidad de materia prima 88
2.5.2. Caso particular: realización de horas extra 90
2.5.2.1. Enfoque inicial 90
2.5.2.2. Modelización alternativa 103
2.5.2.3. Análisis comparado de ambas aproximaciones 108
2.6. Variación de los coeficientes técnicos 110
2.6.1. Modelo de partida 110
2.6.2. Modificación en una variable secundaria 112
2.6.3. Cambio en una variable básica 117

3. **Modelo de mínimo** 135
3.1. Planteamiento 135
3.2. Solución óptima 137
3.3. Análisis post-óptimo 141
3.3.1. Cambio en el sentido de una restricción 141
3.3.2. Variación simultánea de coeficientes en la función objetivo 149
3.3.3. Variación simultánea de términos independientes 156
3.3.4. Modificación de coeficientes técnicos 161

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Planteamiento y resolución visual

El objetivo de estas primeras líneas consiste en proponer un planteamiento de reducidas dimensiones que aborde una problemática que se pueda resolver, incluso intuitivamente, con el fin de facilitar la interpretación económica de los sucesivos resultados que se vayan discutiendo.

Sea una empresa dedicada a la fabricación de dos productos (P_1 y P_2) a partir de la manipulación de cierta materia prima común.

Pensemos que las necesidades unitarias (por caja de producto final, por ejemplo) de material (digamos, kilos por caja) y mano de obra (horas por caja) son las que recoge el cuadro, donde aparece, asimismo, el precio de venta de los productos (unidades monetarias por caja), el coste de la materia prima (unidades monetarias por kilo) y la disponibilidad (diaria, por ejemplo) de la mano de obra (horas).

Producto	Mano de obra	Materia prima	Precio
P_1	2	4	50
P_2	4	1	15
Disponibilidad	800		
Coste		10	

Así, obtener una caja de producto P_1 requiere la manipulación durante 2 horas de 4 kg de materia prima, siendo 10 u. m. el coste por kilo de material y 50 u. m. el precio de venta de cada unidad de producto.

Supongamos que se desea determinar, a la vista de la información facilitada, el plan óptimo de producción para el horizonte temporal al que se refiere la disponibilidad de personal.

Antes de abordar la cuestión planteada, tal vez, en primer lugar, haya que comentar el potencial contenido de los dos recuadros que aparecen en blanco: el coste de la mano de obra y la disponibilidad de materia prima.

En cuanto al primer dato, se asume que la nómina que se paga a los trabajadores es independiente de la actividad que realicen, es decir, van a cobrar lo mismo si su tiempo se destina a fabricar un producto u otro, e incluso si permanecen por algún motivo inactivos. Otras hipótesis también serían aceptables, como pagar exclusivamente las horas trabajadas y/o hacerlo a coste diferenciado según la ocupación, o cualquier combinación de todas ellas. En todo caso, para el problema planteado se asume que el importe del coste de personal es fijo para el periodo.

Respecto a la omisión de una referencia explícita a la disponibilidad de material, cabe interpretar que la oferta es lo bastante amplia como para permitir prescindir de su cuantía a la hora de decidir el plan óptimo. En otras palabras, es posible atender sin problemas cualquier pedido que pueda cursar la empresa del ejemplo. Hipótesis que simplifica el problema y que más tarde será relajada.

Así, de momento, se acepta la existencia de una única condición para considerar que determinado plan es posible: que satisfaga la limitación de mano de obra.

Sea x_j^D $(j = 1, 2)$ la cantidad que se decide fabricar de cada uno de los productos. Postulada la proporcionalidad y la independencia en el empleo de personal, podemos escribir:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D \leq 800$$

Es decir, se afirma que el consumo de recurso (2 horas por unidad elaborada de P_1, por ejemplo) es constante e independiente de la cantidad que se produzca del otro (P_2). Se eliminan, así, posibles efectos de «aprendizaje» o «sinérgicos».

Añadamos a la restricción específica la condición de no negatividad:

$$x_1^D,\ x_2^D \geq 0$$

Condición general en los modelos aquí considerados y que, para el ejemplo, resulta aplicable de manera natural: si se trata de decidir la cantidad que fabricar, podemos coincidir en que el montante mínimo es «nada».

Nótese que la hipótesis de no negatividad no limita la aplicabilidad del modelo a cualquier contexto: basta reemplazar las variables no restringidas en signo por otras que sí lo estén. Es el caso, en el mundo de la física, de los grados Celsius, o centígrados, cuando son sustituidos por los grados Kelvin (magnitud no negativa). En un contexto económico, si la variable del modelo es, por ejemplo, el saldo de una cuenta de crédito, puede expresarse como la diferencia entre abonos y cargos en la cuenta (ambos no negativos) o, como alternativa, puede sumarse al saldo el límite del descubierto permitido, con lo que la variable transformada tomará valor nulo cuando se haya dispuesto el total de la línea de crédito.

El conjunto de soluciones posibles, o región de factibilidad para el agente decisor es, pues:

$$\begin{gathered} 2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D \leq 800 \\ x_1^D, \quad x_2^D \geq 0 \end{gathered}$$

Dentro de las alternativas viables, se trata de seleccionar la más conveniente, que, para nuestro enunciado, puede ser la que maximice el margen total (z):

$$z = 10 \cdot x_1^D + 5 \cdot x_2^D$$

donde los coeficientes (c_j^D) se han obtenido de restar al ingreso unitario (precio de venta: 50 u. m. por caja para P_1) el coste variable unitario (40 u. m. por caja para P_1, pues se precisan 4 kg de material a 10 u. m./kg):

$$\begin{gathered} c_1^D = 50 - 4 \cdot 10 = 10 \\ c_2^D = 15 - 1 \cdot 10 = 5 \end{gathered}$$

Es decir, al igual que en la especificación lineal propuesta para la utilización de mano de obra, en la expresión funcional del beneficio bruto conjunto (z), se acepta de nuevo la proporcionalidad e independencia para los márgenes unitarios procedentes de cada uno de los productos.

Como se ha mencionado, la omisión de la información relativa al coste del personal exige asumir que dicho importe es fijo para cualquier plan de producción que se decida.

Por ejemplo, porque el personal percibe su salario en función del tiempo contratado, preestablecido y del que se deriva la disponibilidad de horas contemplada en la restricción.

El comentario es extensible a otros costes. Pensemos, por ejemplo, en un hipotético alquiler por las instalaciones, cuya cuantía varía con el plan de producción. En estas condiciones, su comportamiento debería necesariamente incluirse en el modelo. Exigencia que desaparece si se considera constante.

Con estos supuestos, el resultado (*RTDO*) se obtendrá de restar al margen bruto (z) el conjunto de costes considerados fijos (F):

$$RTDO = z - F$$

En resumen, el modelo de programación lineal del ejemplo puede ser el siguiente:

$$MAX\, z = 10 \cdot x_1^D + 5 \cdot x_2^D$$

sujeto a:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D \leq 800$$

$$x_1^D,\ x_2^D \geq 0$$

Nótese que x_j^D en la restricción de mano de obra hace referencia a unidades fabricadas: es en la producción donde se emplea al personal disponible. Por el contrario, la misma variable x_j^D en la función objetivo representa las unidades vendidas. Es evidente que la ganancia se obtiene al lograr colocar el producto en el mercado.

La utilización de una única variable para los dos conceptos comporta sostener que todo lo que se fabrica se vende. Los desajustes temporales entre ambas magnitudes podrían recogerse a través de la inclusión de *stocks* de producto acabado en el modelo. En todo caso, cabe destacar que la pretensión del ejemplo de referencia, que se mantendrá en los diferentes apartados, no es otra que la de disponer de un planteamiento de reducidas dimensiones que ayude a la interpretación de los resultados que se vayan presentando.

En esta línea, a primera vista, dado que la ganancia con P_1 es mayor y, además, su obtención requiere menos tiempo, parece claro que, en el óptimo, conviene destinar la mano de obra disponible en exclusiva a su fabricación. Esto es, al tardar 2 horas en fabricar cada unidad de P_1 y disponer de 800 horas, el plan óptimo consiste en fabricar 400 unidades de ese producto. Estrategia que conduce a un margen bruto de 4.000 u. m.:

$$x_1^{D^{Opt}} = 400$$

$$x_2^{D^{Opt}} = 0$$

$$z^{Opt} = 4.000$$

Modifiquemos ligeramente el enunciado inicial para incorporar la existencia de acuerdos contractuales que obliguen a satisfacer un pedido diario de 150 unidades de P_2.

Producto	Mano de obra	Materia prima	Precio	Pedido
P_1	2	4	50	
P_2	4	1	15	150
Disponibilidad	800			
Coste		10		

De nuevo, a simple vista, se aprecia que el plan óptimo consiste ahora en fabricar 100 unidades del producto P_1, dado que sigue siendo preferible. Así, al requerirse 4 horas por unidad, atender el pedido implica utilizar 600 horas, con lo que quedan libres 200; lo que permite elaborar 100 unidades de P_1, pues se emplean 2 horas por caja.

En resumen, el plan óptimo asociado al modelo pasa por fabricar justo lo exigido de P_2 y todo lo que se pueda de P_1 es el plan óptimo asociado al modelo:

$$MAX\, z = 10 \cdot x_1^D + 5 \cdot x_2^D$$

sujeto a:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D \leq 800$$

$$x_2^D \geq 150$$

$$x_1^D,\ x_2^D \geq 0$$

Es decir,

$$x_1^{D^{Opt}} = 100$$

$$x_2^{D^{Opt}} = 150$$

$$z^{Opt} = 1.750$$

1.2. Aproximación formal

1.2.1. Planteamiento

A fin de justificar analíticamente la solución intuitiva del planteamiento, procedamos, en primer lugar, a transformar el conjunto de restricciones específicas del modelo en un sistema de ecuaciones lineales. Para ello, con respecto a la restricción de mano de obra:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D \leq 800$$

basta con añadir una variable que recoja la diferencia entre el lado izquierdo de la inecuación (en este caso, horas de mano de obra ocupada) y el importe que aparece a la derecha (mano de obra disponible):

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800$$

donde la variable añadida (x_1^H: holgura de la primera ecuación) representa aquí el tiempo ocioso.

Nótese que valores negativos en la variable x_1^H delatan el incumplimiento de la condición de partida. Por ejemplo, para:

$$x_1^H = -100$$

Tal cuantificación implica que la mano de obra ocupada por el hipotético plan de producción contemplado precisa 100 horas de las que no se dispone. En efecto:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800$$

$$900 + [-100] = 800$$

En otras palabras, la condición de signo sobre la variable de holgura controla el cumplimiento de la restricción original. En suma,

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D \leq 800$$

se ha sustituido por:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800$$
$$x_1^H \geq 0$$

Así, la inecuación específica se convierte en una ecuación, extendiendo la condición general de no negatividad a la variable de holgura.

Algo similar con relación a la restricción que recoge la existencia de un pedido pendiente:

$$x_2^D \geq 150$$

La conversión en ecuación precisa aquí la sustracción a la izquierda del exceso respecto al término independiente, es decir,

$$x_2^D - x_2^E = 150$$

Donde la notación elegida (x_2^E: variable «excedente» de la segunda condición) representa, en el contexto actual, la elaboración voluntaria del producto P_2 o exceso fabricado por encima del volumen exigido.

Como antes, un valor negativo de x_2^E evidencia el incumplimiento de la restricción original. En este caso, que la fabricación no alcanza el mínimo pactado.

Por ejemplo, para:

$$x_2^E = -10$$

se tiene:

$$x_2^D - x_2^E = 150$$
$$140 - [-10] = 150$$

Así,

$$x_2^D \geq 150$$

se sustituye por:

$$x_2^D - x_2^E = 150$$
$$x_2^E \geq 0$$

De igual manera se procedería con el resto de las inecuaciones que contuviera el modelo hasta convertir el conjunto de restricciones específico en un sistema de ecuaciones.

En nuestro caso:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800$$
$$x_2^D - x_2^E = 150$$

Mencionemos, por último, que el valor asociado a los coeficientes de las variables de holgura (x_i^H) y excedentes (x_i^E) en la función objetivo es nulo para mantener la cuantificación y significado de z.

Así, el modelo queda:

$$MAX\, z = 10 \cdot x_1^D + 5 \cdot x_2^D$$

$$\textit{sujeto a:}$$

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800$$

$$x_2^D - x_2^E = 150$$

$$x_1^D,\ x_2^D,\ x_1^H,\ x_2^E \geq 0$$

En términos genéricos:

$$OPT\, z = \sum_{x_j \in X^D} c_j^D \cdot x_j^D$$

$$\textit{sujeto a:}$$

$$\sum_{x_j \in X} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Con notación matricial:

$$OPT\, z = c' \cdot x$$

$$\textit{sujeto a:}$$

$$A \cdot x = b$$

$$x \geq 0$$

donde el vector de incógnitas (x) incluye variables de decisión (x^D), de holgura (x^H) y excedentes (x^E).

Para el ejemplo

$$MAX\, z = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix}$$

$$\textit{sujeto a:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2.2. Solución óptima

Centremos la atención en el sistema de ecuaciones lineales o conjunto de restricciones específicas que, junto con la condición general de no negatividad, definen la región de factibilidad del modelo.

En términos matriciales:

$$A \cdot x = b$$

Lo que equivale a:

$$\sum_{x_j \in X} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

para el ejemplo:

$$\begin{aligned} &2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800 \\ &x_2^D - x_2^E = 150 \end{aligned}$$

Dado que el primer producto precisa menor cantidad del recurso escaso (mano de obra) y, además, proporciona mayores ganancias, podemos concluir que interesa destinar todo el personal a la fabricación de la mayor cantidad posible de tal producto, con lo que la fabricación voluntaria del segundo será nula, al igual que el montante de mano de obra ociosa.

Esto es:

$$\begin{aligned} &x_1^{H^{Opt}} = 0 \\ &x_2^{E^{Opt}} = 0 \end{aligned}$$

Debido a la reducida dimensión del problema, podemos calcular mentalmente que, al ser la cantidad fabricada de P_2 la mínima posible (150), pues se prefiere fabricar el primero, como se acaba de comentar, la fabricación óptima de P_1 ascenderá a 100 unidades.

Para explicitar de manera más formal los resultados apuntados, despejemos las dos variables de decisión en el sistema.

En la segunda ecuación:

$$x_2^D = 150 + x_2^E$$

Y ahora, sobre la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x_1^D &= 400 - 4 \cdot x_2^D - \frac{1}{2} \cdot x_1^H = \\ &= 400 - 4 \cdot \left[150 + x_2^E\right] - \frac{1}{2} \cdot x_1^H = \\ &= 100 - \frac{1}{2} \cdot x_1^H - 2 \cdot x_2^E \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} &x_1^D = 100 - \frac{1}{2} \cdot x_1^H - 2 \cdot x_2^E \\ &x_2^D = 150 + x_2^E \end{aligned}$$

El sistema reescrito de este modo facilita encontrar soluciones posibles al problema dando valores arbitrarios a las variables no despejadas (x_1^H y x_2^E), que podemos calificar de «libres», y calculando el de las despejadas (x_1^D y x_2^D), denominadas «básicas», frente al carácter «secundario» del resto. Lo afirmado es cierto siempre que el valor elegido para las secundarias y el correspondiente calculado para las básicas no sea, en ningún caso, negativo, en atención a la establecida condición general de no negatividad.

El cuadro anterior permite confirmar, por ejemplo, que si se agota la mano de obra y no se fabrica cantidad alguna de P_2 por encima del mínimo exigido, se dispone de personal para elaborar 100 unidades de P_1.

Nótese que si, por ejemplo, el problema constase de ocho condiciones específicas con, digamos, 15 variables en total, se procedería a despejar el valor de ocho de ellas en términos de las siete restantes.

A fin de confirmar analíticamente la optimalidad de la solución anticipada, sustituyamos las expresiones alcanzadas en la función objetivo:

$$\begin{aligned} z &= 10 \cdot x_1^D + 5 \cdot x_2^D = \\ &= 10 \cdot \left(100 - \frac{1}{2} \cdot x_1^H - 2 \cdot x_2^E\right) + 5 \cdot \left(150 + x_2^E\right) = \\ &= 1.750 - 5 \cdot x_1^H - 15 \cdot x_2^E \end{aligned}$$

De la lectura del resultado obtenido, es decir,

$$z = 1.750 - 5 \cdot x_1^H - 15 \cdot x_2^E$$

se desprende que, en el óptimo, conviene que las dos variables no despejadas tomen valor nulo, ya que, en caso contrario, disminuiría el valor de la función objetivo (z) que se pretende maximizar.

Se comprueba, pues,

$$\begin{aligned} z^{Opt} &= 1.750 \\ x_1^{H^{Opt}} &= 0 \\ x_2^{E^{Opt}} &= 0 \end{aligned}$$

es decir, interesa agotar la mano de obra disponible y no fabricar voluntariamente cantidad alguna del producto P_2.

Con lo que, a partir del sistema despejado:

$$\begin{aligned} x_1^D &= 100 - \frac{1}{2} \cdot x_1^H - 2 \cdot x_2^E \\ x_2^D &= 150 + x_2^E \end{aligned}$$

se deriva:

$$\begin{aligned} x_1^{D^{Opt}} &= 100 \\ x_2^{D^{Opt}} &= 150 \end{aligned}$$

Reproduzcamos los pasos seguidos, ahora en notación matricial.

Se ha partido del sistema de ecuaciones original asociado a las restricciones específicas del modelo:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800$$
$$x_2^D - x_2^E = 150$$

Matricialmente,

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Adviértase que el sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas descrito, en caso de ser compatible, tendrá infinitas soluciones posibles. Situación coherente con la existencia de una función objetivo encargada de seleccionar la alternativa más conveniente entre las disponibles.

Ya se procedió a despejar dos incógnitas (tantas como ecuaciones) en función del resto (otras dos en nuestro caso particular).

Recordemos:

$$x_1^D = 100 - \frac{1}{2} \cdot x_1^H - 2 \cdot x_2^E$$
$$x_2^D = 150 + x_2^E$$

Reservando el lado derecho a los términos independientes:

$$x_1^D + \frac{1}{2} \cdot x_1^H + 2 \cdot x_2^E = 100$$
$$x_2^D - x_2^E = 150$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Esto es, en las columnas correspondientes a las variables despejadas (las dos primeras en el ejemplo), se ha pasado de una matriz concreta (distinta según las variables despejadas):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1/2 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es decir, se ha premultiplicado el sistema original por la inversa de la matriz de coeficientes de las variables que se ha decidido despejar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esto es, a partir del planteamiento inicial:

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 150 \end{bmatrix}$$

se ha llegado al sistema:

$$B_q^{-1} \cdot A \cdot x = B_q^{-1} \cdot b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 800 \\ 150 \end{bmatrix}$$

donde B_q representa la matriz de coeficientes de las variables despejadas y donde el subíndice q intenta poner de manifiesto que su contenido es arbitrario al depender de la partición (q-ésima) que se haga entre variables que despejar y libres. Formalmente,

$$x = \begin{bmatrix} x^{Bq} \\ x^{Nq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Calculada la inversa:

$$B_q^{-1} \cdot A \cdot x = B_q^{-1} \cdot b$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 800 \\ 150 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$A^q \cdot x = b^q$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

donde A^q y b^q representan los valores transformados de la matriz de coeficientes y del vector de términos independientes, respectivamente, es decir, el resultado de la premultiplicación:

$$A^q = B_q^{-1} \cdot A$$
$$b^q = B_q^{-1} \cdot b$$

Resultado que coincide con el alcanzado al despejar, que hemos visto antes:

$$x_1^D = 100 - \frac{1}{2} \cdot x_1^H - 2 \cdot x_2^E$$
$$x_2^D = 150 + x_2^E$$

En resumen, el sistema inicial:

$A \cdot x = b$	
$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800$ $x_2^D - x_2^E = 150$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 150 \end{bmatrix}$

se ha transformado en:

$B_q^{-1} \cdot A \cdot x = B_q^{-1} \cdot b$ $A^q \cdot x = b^q$	
$x_1^D + \frac{1}{2} \cdot x_1^H + 2 \cdot x_2^E = 100$ $x_2^D - x_2^E = 150$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^D \\ x_2^D \\ x_1^H \\ x_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix}$

Cabe destacar que las dos formas alternativas de expresar el conjunto de soluciones posibles son del todo equivalentes. Representan la misma región de factibilidad. Si acaso, la única «ventaja» del sistema transformado radica en facilitar la obtención rápida del valor para las variables despejadas (aquí, x_1^D y x_2^D) a partir del que libremente se decida otorgar al resto (x_1^H y x_2^E).

En el contexto de la optimización lineal, si el valor que interesa para las variables libres o secundarias (x_1^H y x_2^E) es nulo (como en el ejemplo), se concluye que el valor óptimo de las despejadas o básicas (x_1^D y x_2^D) se corresponde con los términos independientes transformados:

$$x_1^H = 0$$
$$x_2^E = 0$$
$$\left[x_1^D = 100 - \frac{1}{2} \cdot x_1^H - 2 \cdot x_2^E\right] \Longrightarrow x_1^D = 100$$
$$\left[x_2^D = 150 + x_2^E\right] \Longrightarrow x_2^D = 150$$
$$B_q^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Abordar de manera explícita la resolución de programas lineales comportaría sugerir procedimientos para alcanzar la partición más conveniente del vector de incógnitas entre básicas y secundarias. Partición que, en el contexto del presente documento, se asume como ya conocida, en cuanto que, como se recoge en la presentación, el interés se centra en el análisis post-óptimo.

Adviértase, para concluir el apartado, que la matriz inversa:

$$B_q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aparece prácticamente reproducida en el sistema transformado:

$$A^q = B_q^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1/2} & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Ello se debe a que, al estar planteadas las restricciones originales como desigualdades, la inclusión de variables de holgura y excedentes hace que la matriz de coeficientes técnicos casi contenga la matriz identidad:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Así, al ser premultiplicada por B_q^{-1}, mantiene tal inversa en el resultado:

$$B_q^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1/2} & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

En concreto, la primera columna de B_q^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aparece en la tercera columna de:

$$B_q^{-1} \cdot A$$

pues esta columna en A es el vector unitario:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por estar asociada a la variable x_1^H de holgura de la primera ecuación:

$$2 \cdot x_1^D + 4 \cdot x_2^D + x_1^H = 800$$

Así, la transformación para esta tercera columna equivale al producto:

$$B_q^{-1} \cdot A_{x_1^H} = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$