

nou**biaix**⁴⁹

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Desembre 2022



Consell de redacció:
Marianna Bosch / Carlos Giménez (coords.)
Montserrat Alsina
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Manuel Udina

© dels articles, els seus autors

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM),
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat

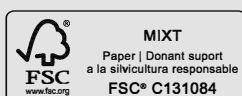
noubiaix@gmail.com



Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
*Noves perspectives de Barcelona
a través d'una esfera*
Pol Albarrán Sánchez

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012
Impressió: Gráficas Rey



Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
comercial.edicions@ub.edu
www.edicions.ub.edu



sumari

1 Editorial

articles

6 Com dividir quan no n'hi ha prou per a tothom? El problema de les emissions de CO₂ José Manuel Giménez-Gómez Cori Vilella-Bach

16 Dissenyar un tipi. Una activitat competencial per treballar la geometria amb el GeoGebra Édgar Ribot-Llobet Neus Heras Navarro

31 Com ho farem? Descripció d'un taller amb diverses activitats artístiques i matemàtiques per desenvolupar la creativitat en alumnes de primària Queralt Viladevall Valdeperas Salvador Linares Mustarós Joan Carles Ferrer Comalat

45 Els mons impossibles de M. C. Escher Toni Sellarès

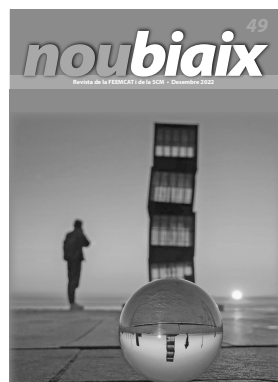
62 Per què entonen bé les guitarres amb trasts no paral·lels? Miquel Albertí Palmer

76 Les mates al billar i una situació d'exploració per treballar a l'aula de matemàtiques Guillem Bonet Carbó

seccions

88 Per pensar d'un minut a una hora Jordi Deulofeu

93 Aprendre matemàtiques amb jocs de taula *Jocs de taula per a l'aula de matemàtiques: per què?* SET, Grup de Jocs d'ABEAM





Ens trobem davant d'un nou número de la revista *NouBiaix*, el 49, en el qual hem donat protagonisme a aportacions que situen les matemàtiques com a element clau en contextos diversos: el repartiment de recursos, el disseny, l'art, la música i el joc. Aquests contextos estan molt presents en la vida social i poden donar resposta a la demanda de situacions d'aprenentatge riques, variades i rellevants per a l'alumnat.

De la lectura atenta dels articles presents en aquest volum, els i les docents en podran extreure tant idees generals que podran concretar en funció de les condicions d'implementació i de la seva pròpia experiència, com exemples complets *prêt-à-porter* que haurien de poder incorporar sense gaire dificultat —i de ben segur amb molt bons resultats— a la seva pràctica a l'aula.

En relació amb l'article amb el qual obrim aquest nou número de la revista *NouBiaix*, «Com dividir quan no n'hi ha prou per a tothom? El problema de les emissions de CO₂», cal, en primer lloc, presentar les nostres disculpes més sinceres tant als seus autors, Cori Vilella i José Manuel Gómez, com a tots els nostres lectors i lectores. A causa d'una errada imperdonable en el procés d'edició, el seu article, tot i haver estat revisat, acceptat i ressenyat en l'editorial, per alguna causa incomprensible va «desaparèixer» de la versió impresa. Una errada que és només nostra com a responsables finals de l'edició de la revista i per la qual reiterem la nostra petició de disculpes.

Recuperem, ara sí, l'article en qüestió i en reproduïm aquí la ressenya que ja figurava en el número anterior. En el seu article, Cori Vilella i José Manuel Gómez posen fil a l'agulla per aportar un enfocament matemàticament rigorós a un problema pràctic força habitual, conegut com el problema de la fallida, en el qual es tracta d'establir el mecanisme més just per repartir una certa quantitat d'un recurs concret (herència, embargament, quota pesquera, etc.) entre tots els agents que el demanen, quan la quantitat total de les demandes supera la quantitat disponible del recurs que s'ha de repartir. Es presenten quatre mecanismes diferents aplicats habitualment en aquestes situacions i es comparen els resultats que assigna cadascun d'ells a cada agent demandant, intentant establir de manera qualitativa el grau de justícia present

en cada cas, a partir del compliment o no de fins a cinc regles relatives a l'equitat en el repartiment. L'exemple concret al qual s'apliquen els mecanismes indicats, el de les emissions de CO_2 , de gran actualitat i summa importància, és ideal per il·lustrar el guany de qualitat en la presa de decisions que comporta incorporar criteris matemàtics per sobre d'altres de tipus polític.

El segon article presenta una activitat de classe sobre el disseny d'un tipí per a una classe de segon d'ESO amb materials i el GeoGebra. Èdgar Ribot-Llobet i Neus Heras fan una contribució magnífica a la necessitat, no sempre ben entesa, de presentar al nostre alumnat activitats realment competencials, en les quals es parteix d'una situació problemàtica contextualitzada en un entorn conegut pels alumnes però encara poc determinada. Això promou la necessitat de formular noves qüestions per abordar el problema, fer estimacions per concretar les mesures del producte que es vol dissenyar, utilitzar un conjunt de coneixements i habilitats adquirits prèviament i desenvolupar-ne de nous amb l'ajuda del professorat, etc. Sens dubte, exemples com aquest poden servir a molts docents per decidir-se a desenvolupar les seves pròpies situacions d'aprenentatge, que tan necessàries hauran de ser amb el nou currículum.

En el seu article sobre tallers de creativitat per a alumnes de primària, Queralt Viladevall, Salvador Linares i Joan Carles Ferrer posen el focus en una qualitat que massa sovint el sistema educatiu tendeix a soterrar amb el pes de la precisió, el formalisme i el rigor mal entesos, de manera més o menys activa i decidida o passiva i no volguda.

Ens presenten una experiència ja experimentada i amb prou detalls i recursos per ser directament implementada a les aules. En aquesta experiència, les matemàtiques apareixen al costat d'activitats diverses, com la lectura d'un conte, el treball amb dibuixos i il·lustracions i l'assaig i error, dins d'un treball específic de desenvolupament de la creativitat i la producció d'idees disruptives.

Segueix un article també sobre la creació artística i les matemàtiques, on Toni Sellarès ens obsequia amb una aproximació molt entenedora als mons impossibles d'Escher, disseccionant geomètricament els elements que l'artista neerlandès utilitzava com a base de les seves obres. Així podem aconseguir presentar de manera racional allò que a qualsevol observador no entrenat geomètricament li sembla simplement impossible. De ben segur que tenim a les nostres aules força estudiants que podran aproximar-se d'una manera molt més clara i precisa a l'obra d'aquest artista peculiar i eixamplaran així la seva concepció de la geometria. A més, podrem treballar el problema de la representació plana de la realitat espacial, amb els artificis que aporten les matemàtiques per abordar-la i les argücies visuals que aquests artificis permeten.

De la pintura passem a la música en el quart article d'aquest número. Miquel Albertí ens mostra un nou i interessant exemple de la relació entre la música, la física i les matemàtiques en un estudi original sobre l'afinació en les guitarres amb trasts no paral·lels. Mostrar al nostre alumnat contextos tan diversos com sigui possible on les matemàtiques expliquin i modelitzin allò que veiem (o, en aquest cas, sentim) és sens dubte una manera molt interessant de posar en valor la necessitat dels coneixements matemàtics en àmbits professionals molt diversos, un fet no sempre ben entès per la nostra societat.

Guillem Bonet enceta amb el seu article una petita sèrie sobre les matemàtiques al billar. Un cop més, estem davant d'un estudi interessant sobre una situació lúdica —o esportiva— que es pot experimentar amb objectes materials o amb simuladors virtuals. L'autor fa malabars amb una seqüència de qüestions de cinemàtica, geometria i divisibilitat, i mostra un procés molt ric de matemàtiques experimentals on es modelitzen situacions físiques amb models geomètrics i configuracions geomètriques amb sèries de lletres i taules de nombres, fins a arribar a una inversió total on les taules de billar s'utilitzen com a models per calcular el mínim comú múltiple de dos nombres i la suma de fraccions. Esperem amb delit les entregues següents d'aquesta sèrie.

Tanquen el número dos articles de l'apartat «Seccions». Una nova proposta de problemes per pensar d'un minut a una hora de Jordi Deulofeu, sens dubte un dels nostres col·laboradors més fidel i regular. També inaugurarem la nova secció «Aprendre matemàtiques amb jocs de taula», a càrrec de SET, Grup de Jocs d'ABEAM, que s'estrena precisament presentant-nos el joc SET, que dona nom al grup.

Amb aquest SET al quadrat tanquem el número 49, esperant que us resulti tan interessant com ens ho ha semblat a nosaltres. Quedem a les portes del proper número 50, que arribarà amb l'any 2023 encetat i amb més de trenta anys de vida per celebrar, vint dels quals amb el format actual com a *NouBiaix*!

articles
articles



articles

Com dividir quan no n'hi ha prou per a tothom? El problema de les emissions de CO₂

José Manuel Giménez-Gómez i Cori Vilella-Bach

Departament d'Economia i Departament de Gestió d'Empreses
ECO-SOS, Universitat Rovira i Virgili

Resum

En situacions en què els recursos disponibles no són suficients per satisfer les demandes de tothom, la teoria dels problemes de demanda tracta d'introduir certa objectivitat i justícia en la distribució dels recursos. Aleshores, es defineixen diferents maneres (regles) de repartir la quantitat disponible de recursos i l'aplicació de les regles es defensa no pel repartiment final del recurs, sinó per la filosofia del repartiment (axiomes). Aquest article se centra en l'aplicació del repartiment d'emissions de CO₂ per mostrar com funciona l'art de repartir recursos escassos.

Abstract

In situations where the available resources are not sufficient to satisfy all demands, the conflicting claims theory seeks to introduce some objectivity and fairness into their distribution. Thus, different ways of distributing the available quantities (rules) are defined, and their application is upheld, not by the final distribution of the resource, but by the philosophy of allocation (axioms). This article focuses on the application of CO₂ emission sharing to show how the art of allocating scarce resources works.

1. Introducció

El canvi climàtic es pot veure com el resultat d'una fallida pressupostària de carboni sense resoldre. Limitar el CO₂ acumulat global a 1.440 gigatonelades (Gt), durant el període 2000-2050 produiria una probabilitat del 50 % de superar els 2 °C de temperatura mitjana per sobre dels nivells preindustrials [11]. Tot i així, s'estima que les emissions acumulades mundials per al període en qüestió oscil·laran entre 1.758 i 2.736 Gt [13]. En conseqüència, la governança ambiental es trobarà en una situació de fallida del carboni: si seguim actuant com fins ara, l'any 2050 els països hauran reclamat més emissions acumulades (1.758-2.736 Gt) de les que hi ha disponibles.

Situacions com aquesta es coneixen com a problemes de demanda, els que es donen quan un grup de persones reclamen un cert dret sobre un bé comú i la quantitat del bé que s'ha de repartir no és suficient per satisfer la demanda de tots els agents. Aquest tipus de problemes han preocupat la societat des de fa segles. A l'època d'Aristòtil ja hi havia documents que parlaven d'aquest tema i els exemples procedents del Talmud, l'antiga llei dels jueus, de Maimònides, que descriurem més endavant, també en són un exemple de l'època medieval. No obstant això, el primer treball formal sobre aquesta problemàtica és l'article de Barry O'Neill (1982) [14].

Com s'hauran de repartir els recursos que tenim? Utilitzarem regles de repartiment que associen a cada problema de demanda un repartiment dels recursos que tenim entre els agents. El nostre objectiu és trobar una regla de repartiment que s'adapti tan bé com sigui possible a cada situació. Per aquest motiu, analitzarem algunes de les regles més importants que s'han estudiat en la bibliografia sobre aquest tema i formularem algunes propietats, anomenades axiomes, que voldrem que les regles satisfacin. Volem comparar les regles amb les propietats que satisfan i buscar les regles que satisfan les propietats desitjades en cada situació. El cas més conegut d'aquest tipus de problema és el d'una empresa que fa fallida, conegut en la literatura com un *bankruptcy problem*, i el seu valor de liquidació no és suficient per assumir les demandes dels seus creditors. No obstant això, aquest model es pot aplicar a molts altres casos, com podrien ser el repartiment de pressupostos per part del Banc Mundial als diferents països, el repartiment d'ajut humanitari per part de la Creu Roja en situacions de guerra o de desastres naturals. També, en el marc universitari, quan els diferents grups de recerca demanem diners a l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca (AGAUR) per als nostres projectes de recerca, com s'han de repartir? També s'ha aplicat aquesta metodologia a diferents temes ambientals, com ara la reducció de les quotes de pesca [9], el repartiment de les possibles emissions de CO₂ que poden fer els països [5] i [4] i la distribució del pressupost de sanitat de la Generalitat de Catalunya [16]. La regla més coneguda i potser fins i tot la més utilitzada és la regla proporcional, on els recursos es reparteixen proporcionalment a la demanda de cada agent. Aquesta regla ja va ser utilitzada per Aristòtil i sempre s'ha fet servir molt de manera natural. Però hi ha motius per pensar que aquesta és la millor? De fet, a part d'Aristòtil, hi ha literatura molt antiga, en particular el Talmud, on es poden trobar exemples numèrics en els quals posteriorment s'han inspirat diverses regles de repartiment que difereixen de la proporcional.

En aquest article expliquem la distribució de les emissions de CO₂ entre diferents regions mitjançant aquesta teoria. Concretament, la dotació (els recursos que s'han de distribuir) és el pressupost de carboni disponible. Utilitzem el model probabilístic de [11], on es proporcionen diferents pressupostos de carboni amb diferents riscos associats per al període 2000-2050. En aquest cas, els agents que reclamen els recursos estan representats pels països emissors i el pressupost de carboni disponible no pot satisfer plenament la suma de les seves demandes globals. Les demandes dels països s'aproximen a les projeccions d'emissions fetes pel Grup Intergovernamental sobre el Canvi Climàtic (Intergovernmental Panel on Climate Change, IPCC) per a diferents regions del món [13]: concretament, suposem que el comportament més natural dels països, en un marc de fallida del carboni, seria reclamar les seves emissions màximes (per a més informació, vegeu [5]).

El conjunt de demandants (els agents) està format pels quatre grups mundials de l'IPC Special Report on Emissions Scenario, SRES que normalment es consideren en models climàtics: països de l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (OECD) del 1990 (OECD90), Àsia (ASIA), Àfrica i Amèrica Llatina (ALM) i països en curs de canvis econòmics (REF). Podem veure les agrupacions dels països a la figura 1.

Per definir les demandes dels agents utilitzarem les dades del futur acumulat de CO₂ projectat que es poden trobar al SRES [13] com a valoració del que poden reclamar els països. Concretament, ens situem en l'escenari on els països reclamen el màxim que poden. En aquest cas, les emissions acumulades mundials ascendiran a 2.736 Gt de CO₂ el 2050 (una xifra superior a qualsevol dels tres possibles escenaris previstos).

Com podem observar a la taula 1, la suma de les demandes dels quatre països és de 2.736 Gt de CO₂. En tots tres escenaris aquesta xifra supera la quantitat que s'ha de repartir, E . Per tant, tenim un problema de demanada en els tres escenaris considerats.

Taula 1. El problema de les demandes de CO₂ acumulades. La primera fila mostra els tres possibles escenaris i, entre parèntesi, les probabilitats d'excedir els dos graus en cadascun d'ells. A la segona i la tercera files tenim els quatre grups de països amb les seves demandes corresponents.

Recursos E Gt CO ₂	1.440 (50 %)	1.000 (25 %)	745 (0 %)	
Agents N	<i>REF</i>	<i>ALM</i>	<i>OECD90</i>	<i>ASIA</i>
Demandes c	300,36	618,78	768,47	1.048,57

3. Com es pot repartir? Regles

Una vegada tenim identificades totes les parts del problema de repartiment (recurs disponible i demandes dels agents), s'ha de decidir com s'ha de fer la distribució d'aquest recurs entre els demandants. En aquest sentit, hi ha literatura molt antiga, en particular el Talmud (antiga llei dels jueus), on ja es poden trobar exemples numèrics en els quals posteriorment s'han inspirat diverses regles de repartiment.

Formalment, una **regla** assigna a cada problema de demanda (c, E) un vector de repartiment $\varphi(c, E) \in R^n$ tal que ha de verificar dues condicions:

- Cada component ha de ser acotada per la demanda de cada agent, *i. e.* $0 \leq \varphi_j(c, E) \leq c_j, \forall j = 1, \dots, n$.
- Ser eficient, *i. e.* $\sum_j \varphi_j(c, E) = E$.

D'entre totes les regles proposades en la literatura, les més analitzades són: la proporcional, la igualitària en guanys restringida, la igualitària en pèrdues restringida i la Talmud [7].

La regla més coneguda, ja proposada per Aristòtil i sempre molt utilitzada de manera natural, és la proporcional. Aquesta regla recomana un repartiment de les emissions de CO₂ proporcional a la demanda de cada agent. Formalment, la **regla proporcional**, P , assigna a cada problema de demanda (c, E) el vector $P(c, E)$ tal que per a cada agent $i \in N$, $P_i(c, E) \equiv \frac{E}{\sum c_j} c_i$.

Una altra regla bastant natural seria repartir de manera igualitària les emissions totals de CO₂ a tots els agents, però en aquest cas la regla ignoraria les demandes dels agents i els tractaria a tots de manera igual; és el que s'anomena regla de divisió igualitària. No obstant això, el problema amb aquesta regla sorgeix quan els agents no tenen la mateixa demanda. Notem que, entre altres motius, aplicant aquest principi podríem assignar a algun agent una quantitat superior al que demana i això no satisfaria la definició de la regla. Aleshores es defineix la regla igualitària en guanys restringida [10], que proposa un repartiment igualitari de les emissions de CO₂ a cada agent sense que ningú pugui rebre més del que demana. Formalment, la **regla igualitària en guanys restringida** (CEA, de l'anglès *constrained equal awards*), assigna a cada problema de demanda (c, E) un vector $CEA(c, E)$ tal que per a cada agent $i \in N$, $CEA_i(c, E) \equiv \min\{c_i, b\}$, on b és escollit per tal que $\sum \min\{c_i, b\} = E$. De la mateixa definició podem deduir que aquesta regla afavoreix els agents que tenen una demanda més petita.

Una regla relacionada amb l'anterior és la regla igualitària en pèrdues restringida. Aquesta regla també té l'objectiu de ser igualitària, però, en aquest cas, en lloc de basar-nos en el repartiment igualitari de les emissions totals de CO₂, ens centrarem en el repartiment igualitari de les pèrdues, és a dir, la quantitat d'emissions de CO₂ que cada demandant deixa de rebre del que reclama. Si volem pèrdues igualitàries per a tots, això pot donar lloc que alguns agents rebin quantitats negatives i això seria incompatible amb la noció de la regla, que requereix que els repartiments siguin no negatius. Per tant, la regla proposarà pèrdues màximament igualitàries sense que ningú pugui tenir un pagament negatiu. Formalment, la **regla igualitària en pèrdues restringida** (CEL, de l'anglès *constrained equal losses*) assigna a cada problema de demanda (c, E) un vector $CEL(c, E)$ tal que per a cada agent $i \in N$, $CEL_i(c, E) \equiv \max\{c_i - b, 0\}$, on b és escollit per tal que $\sum \max\{c_i - b, 0\} = E$.

Observem que, a diferència de la CEA, aquesta regla afavoreix els agents amb demandes més grans.

L'última regla que aplicarem a aquest cas és la regla del Talmud. Aquesta regla combina les dues anteriors, la CEA i la CEL. Concretament, pren la meitat de les demandes agregades com a punt de referència. Si la meitat del total de les demandes és inferior a la quantitat disponible d'emissions totals de CO₂, s'aplica la CEA a les demandes mitjanes; mentre que, en cas contrari, cada regió rep la meitat de les seves demandes més la quantitat recomanada per la CEL. Formalment, la **regla del Talmud**, T , [1] recomana per a cada problema de demanda (c, E) un vector $T(c, E)$ tal que per a cada agent $i \in N$, $T_i(c, E) \equiv CEA_i(c/2, E)$ si $E \leq C/2$; o $T_i(c, E) \equiv c_i/2 + CEL_i(c/2, E - C/2)$ si $E \geq C/2$.

La taula 2 resumeix la comparació entre les regles proposades per cada un dels tres escenaris de carboni considerats. Tal com hem esmentat, hem considerat quatre regions de països i l'emissió de CO₂ per a un període de cinquanta anys en tres escenaris diferents.

Taula 2. Assignació de les emissions totals de CO₂. A la primera columna tenim els tres escenaris considerats i, entre parèntesis, la probabilitat d'excedir el llindar de 2 °C [11]. La resta de columnes mostren les assignacions recomanades per cada regla en cadascun dels possibles escenaris. Les files proporcionen les assignacions recomanades per a cadascuna de les regions considerades.

Demandes: REF = 300,36; ALM = 618,78; OECD90 = 768,47; ASIA = 1.048,57					
Emissions CO ₂	Regions	P	CEA	CEL	T
E = 1.440 Gt (50 %)	REF	158,07	300,36	0	150,18
	ALM	325,65	379,88	286,84	309,39
	OECD90	404,43	379,88	436,53	384,24
	ASIA	551,84	379,88	716,63	596,2
E = 1.000 Gt (25 %)	REF	109,77	250	0	150,18
	ALM	226,15	250	140,17	283,27
	OECD90	280,86	250	289,86	283,27
	ASIA	383,22	250	569,96	283,27
E = 745 Gt (0 %)	REF	81,78	186,25	0	150,18
	ALM	168,48	186,25	55,17	198,27
	OECD90	209,24	186,25	204,86	198,27
	ASIA	285,5	186,25	484,96	198,27

A més a més, per afavorir la interpretació d'aquest resultats la figura 2 proporciona la representació de cada assignació en funció de les demandes de cada regió.

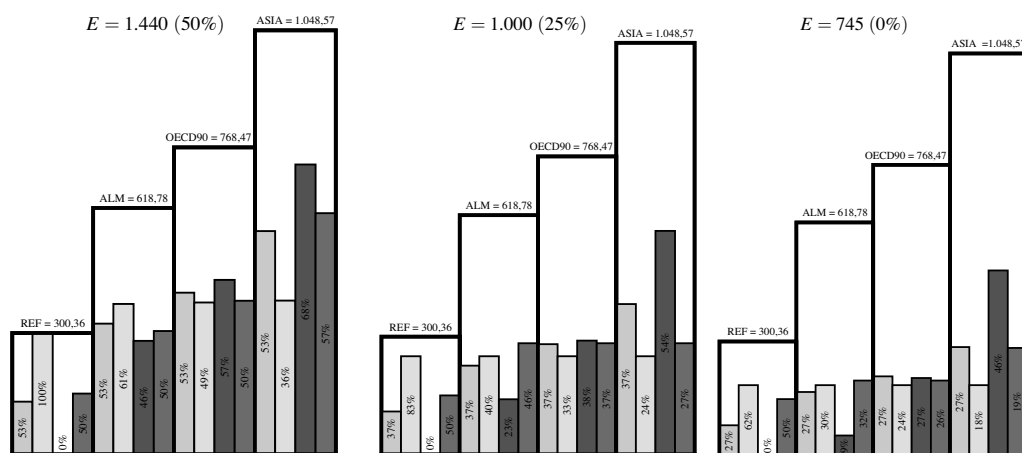


Figura 2. Representació de barres de les assignacions rebudes per cada regió amb E = 1.440, E = 1.000 i E = 745. Les barres blanques (les més amples) representen les demandes de cada regió. Les barres més estretes mostren la quantitat d'emissions de CO₂ recomanada per cadascuna de les regles introduïdes: P (gris), CEA (groc), CEL (verd), T (marró). Els percentatges indiquen l'import relatiu de les demandes satisfetes per cada regla.

4. Com s'ha de repartir? Principis socialment admissibles

Existeixen en la literatura una gran quantitat d'axiomes o propietats per a l'anàlisi axiomàtica de les regles esmentades anteriorment. L'objectiu principal d'aquesta anàlisi és identificar cada regla amb un conjunt de propietats ben definides, de manera que seleccionar una regla significa resoldre el problema aplicant aquests principis d'equitat i operatius, que tradueixen un cert valor de judici sobre els resultats distributius (vegeu [7]).

A continuació introduïm algunes de les propietats més considerades i fàcilment admissibles. Per obtenir més detalls i un conjunt complet de les definicions matemàtiques dels principis d'equitat i les seves implicacions, vegeu [15].

Igual tractament d'iguals. Implica que les regions amb demandes iguals han de rebre la mateixa assignació de CO₂. Formalment, per a cada problema de demanda (c, E) i cada agent $\{i, j\} \subseteq N$, si $c_i = c_j$, llavors $\varphi_i(c, E) = \varphi_j(c, E)$.

Anonimat. Indica que la quantitat de CO₂ rebuda per una regió ha de dependre només de la seva demanda, i no de la seva identitat. Formalment, per a cada (c, E) , cada $\pi \in \Pi^N$ i cada agent $i \in N$, $\varphi_{\pi(i)}((c_{\pi(i)})_{i \in N}, E) = \varphi_i(c, E)$, on Π^N és el conjunt de totes les permutacions de N .

Preservació de l'ordre [1]. Aquesta propietat requereix respectar l'ordre de les demandes, és a dir, si la demanda d'una regió i és almenys tan gran com la d'una altra regió j , la regió i hauria de rebre i perdre almenys tant com la regió j . Formalment, per a cada (c, E) i cada agent $i, j \in N$ tal que $c_i \geq c_j$, llavors $\varphi_i(c, E) \geq \varphi_j(c, E)$ i $c_i - \varphi_i(c, E) \geq c_j - \varphi_j(c, E)$.

Autodualitat [1]. Implica que el problema de dividir «les emissions de CO₂ disponibles» o «les emissions de CO₂ que no es poden fer» hauria de donar els mateixos repartiments. Formalment, per a cada problema de demanda (c, E) i cada agent $i \in N$, $\varphi_i(c, E) = c_i - \varphi_i(c, \sum_{i \in N} c_i - E)$. Penseu, per exemple, en $E = 1.440$, de manera que $L = 2.736,18 - 1.440 = 1.296,18$. Després, $P(c, L) = (142,29; 293,13; 364,04; 496,73)$, de manera que l'assignació proposada s'obtingria restant les pèrdues sofertes de les demandes, $c - P(c, L) = (300,36; 618,78; 768,47; 1.048,57) - (142,29; 293,13; 364,04; 496,73) = (158,07; 325,65; 404,43; 551,84)$, que coincideix amb el P proposat per al repartiment (vegeu la taula 2). La conveniència d'aquest principi prové del fet que els països podrien considerar l'assignació de carboni com un premi (CO₂ que poden emetre) o com una pèrdua (CO₂ que no poden emetre). En ambdós casos, tant si es negocien adjudicacions com si es produeixen pèrdues, el resultat és el mateix per a les regles que compleixen aquest principi. En un context de negociacions internacionals aquest principi resulta molt convenient per facilitar acords. A més, aquesta propietat implica que cap regió rebrà més de la meitat del que reclama si la resta de regions encara no han rebut la seva.

Invariància respecte de les demandes truncades [3]. Aquesta propietat fa referència al llindar superior de les emissions de CO₂ per a cada regió. Ens diu que les demandes que superen el pressupost mundial de CO₂ no haurien de ser considerades. Per tant, l'assignació no hauria de dependre d'aquest excés de demanda que és superior a la quantitat total que s'ha de dividir. Formalment, per a cada problema de demanda (c, E) i cada agent $i \in N$, $\varphi_i(c, E) = \varphi_i(\min\{c_i, E\}_{i \in N}, E)$. Per tal de veure què implica aquesta propietat en el nostre problema, podem analitzar les regles proposades a la taula 2 en dos casos diferents. Tingueu en compte que quan el pressupost és de 1.000 Gt de CO₂, el truncament de les demandes implica que

sia redueix la seva demanda de 1.048,57 a 1.000. Sota aquest supòsit obtenim la taula 3. Com podeu observar, no hi ha grans canvis, però totes les regions augmenten les seves assignacions una mica, excepte *sia*, que disminueix la quantitat que rep per totes les regles, excepte amb la CEA i la T. Així doncs, aquesta propietat ajuda els agents a tenir una connexió més estreta amb la capacitat d'enfonsament de l'atmosfera.

Taula 3. Invariància respecte de les demandes truncades amb $E = 1.000$.

Demandes inicials: REF = 300,36; ALM = 618,78; OECD90 = 768,47; ASIA = 1.048,57				
$E = 1,000$	P	CEA	CEL	T
REF	109,77	250	0	150,18
ALM	226,15	250	140,17	283,27
OECD90	280,86	250	289,86	283,27
ÀSIA	383,22	250	569,96	283,27

Per invariància respecte de les demandes truncades:

Demandes ajustades: REF = 300,36; ALM = 618,78; OECD90 = 768,47; ASIA = 1.000

REF	111,76	250	0	150,18
ALM	230,23	250	156,36	283,27
OECD90	285,93	250	306,05	283,27
ÀSIA	372,08	250	537,58	283,27

La taula 4 ens mostra quins dels principis esmentats prèviament es compleixen per a les regles proposades. Com podem veure a la taula 4, el Talmud és l'única regla que compleix totes les propietats desitjades.³

Taula 4. Propietats i regles. La taula mostra els principis que compleixen les regles considerades. Cada columna correspon a una regla, mentre que cada fila correspon a un principi proposat. Els resultats d'aquesta taula es poden trobar a [18].

Propietats/regles	P	CEA	CEL	T
Igual tractament d'iguals	Sí	Sí	Si	Si
Anonimitat	Sí	Sí	Sí	Sí
Preservar l'ordre	Sí	Si	Sí	Sí
Autodualitat	Sí	No	No	Sí
Invariància respecte de les demandes truncades	No	Sí	No	Sí

3. Aquest resultat es pot trobar a [18].

5. Conclusions

Aquest treball proporciona una introducció al problema de repartir recursos escassos mitjançant el cas de l'assignació d'emissions de CO₂. En situacions en què la quantitat que hi ha disponible d'un recurs no és suficient per satisfer les demandes de tothom, la teoria dels problemes de demanda tracta d'introduir certa objectivitat i justícia en la distribució dels recursos.

Aleshores, es defineixen diferents maneres de repartir la quantitat disponible i les seves regles, i l'aplicació de les regles es defensa no pel repartiment final del recurs, sinó per la filosofia del repartiment, els axiomes. A més de l'enfocament axiomàtic d'aquest tipus de problemes que hem plantejat aquí, la literatura proposa també altres aproximacions, com ara l'anàlisi mitjançant la teoria de jocs o, més recentment, l'estudi de xarxes.

Referències

- [1] Aumann, R.J.; Maschler, M. (1985). «Game Theoretic Analysis of a bankruptcy from the Talmud». *Journal of Economic Theory*, 36, 195-213.
- [2] Chen, S. (2015). «Systematic favorability in claims problems with indivisibilities». *Social Choice and Welfare*, 44(2), 283-300.
- [3] Dagan, N.; Volij, O. (1993). «The bankruptcy problem: a cooperative bargaining approach». *Mathematical Social Sciences*, 26, 287-287.
- [4] Duro, J. A.; Giménez-Gómez, J.-M.; Vilella, C. (2020). «The allocation of CO₂ emissions as a claims problem». *Energy Economics*, 86(C), 104652.
- [5] Giménez-Gómez, J. M.; Teixidó-Figueras, J.; Vilella, C. (2016). «The global carbon budget: a conflicting claims problem». *Climatic Change*, 1-11.
- [6] Giménez-Gómez, J. M.; Vilella-Bach, C. (2021). «L'art de repartir recursos escassos», *Materials Matemàtics*, 1, 14.
- [7] Herrero, C.; Villar, A. (2001). «The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems». *Mathematical Social Sciences*, 42(3), 307-328.
- [8] Herrero, C.; Martínez, R. (2004). «Egalitarian rules in claims problems with indivisible goods». *Social Choice and Welfare*, 20, 261-273.
- [9] Iñarra, E.; Skonhøft, A. (2008). «Restoring a fish stock: a dynamic bankruptcy problem». *Land Economics*, 84(2): 327-339.
- [10] Maimonides, M. (200). *Book of Judgements* (trad. de Rabbi Eliahahu Touger). Nova York: Moznaim Publishing Corporation.
- [11] Meinshausen, M.; Meinshausen, N.; Hare, W.; Raper, S. C.; Frieler, K.; Knutti, R.; Frame, D. J.; Allen, M. R. (2009). «Greenhouse-gas emission targets for limiting global warming to 2 C». *Nature*, 458(7242), 1158-1162.
- [12] Moulin, H. (2000). «Priority Rules and Other Asymmetric Rationing Methods». *Econometrica*, 68(3), 643-684.
- [13] Nakicenovic, N.; Alcamo, J.; Davis, G.; Vries, B. de; Fenhann, J.; Gaffin, S.; Gregory, K.; Grubler, A.; Jung, T.; Kram, T., et al. (2000). Special report on emissions scenarios. Cambridge: Cambridge University Press.
- [14] O'Neill, B. (1982). «A problem of rights arbitration from the Talmud». *Mathematical Social Sciences*, 2(4), 345-371.

- [15] Rose, A.; Stevens, B.; Edmonds, J.; Wise, M. (1998). «International equity and differentiation in global warming policy». *Environmental and Resource Economics*, 12(1), 25-51.
- [16] Solís-Baltodano, M. J.; Vilella, C.; Giménez-Gómez, J. M. (2019). «The Catalan health budget: a conflicting claims approach». *Hacienda Pública Española*, 228, 35-53.
- [17] Thomson, W. (2003). «Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey». *Mathematical Social Sciences*, 45(3), 249-297.
- [18] Thomson, W. (2019). *How to Divide When There Isn't Enough: From Aristotle, the Talmud, and Maimonides to the Axiomatics of Resource Allocation (Econometric Society Monographs)*. Cambridge: Cambridge University Press.

.....