

FONAMENTS D'ELECTROMAGNETISME I ÒPTICA

José Luis Morenza Gil
Manuel Varela Fernández

Departament de Física Aplicada

FONAMENTS D'ELECTROMAGNETISME I ÒPTICA

José Luis Morenza Gil
Manuel Varela Fernández

Departament de Física Aplicada

Índex

PREFACI	9
Capítol 1. CAMP ELÈCTRIC	11
1.1 Càrrega elèctrica	11
1.2 Llei de Coulomb	12
1.3 Camp elèctric	14
1.4 Representació d'un camp vectorial: línies del camp elèctric	16
1.5 Distribucions contínues de càrrega	17
1.6 Camp elèctric de distribucions contínues de càrrega	19
1.7 Dipol elèctric	20
1.8 Flux d'un camp vectorial	22
1.9 Flux del camp elèctric: llei de Gauss	24
1.10 Càlcul del camp elèctric a partir de la llei de Gauss	26
1.11 Circulació d'un camp vectorial	29
1.12 Circulació del camp elèctric	30
Problemes	31
Capítol 2. POTENCIAL ELÈCTRIC	35
2.1 Treball i energia potencial en el camp gravitatori	35
2.2 Energia potencial elèctrica	37
2.3 Diferència de potencial elèctric i potencial elèctric	38
2.4 Potencial creat per càrregues puntuals	40
2.5 Potencial creat per distribucions contínues de càrrega	41
2.6 Gradient d'un camp escalar	42
2.7 Gradient del potencial i camp elèctric	43
2.8 Superfícies equipotencials i línies de camp	44
2.9 Potencial i camp	45
2.10. Energia d'un sistema de càrregues en un camp: energia d'un dipol	45
2.11. Energia de formació d'un sistema de càrregues	46
Problemes	48
Capítol 3. CONDUCTORS I CONDENSADORS	51
3.1 Conductor en equilibri electroestàtic	51
3.2 Conductor amb una cavitat	52
3.3 Camp elèctric prop de la superfície d'un conductor	52
3.4 Capacitat d'un conductor	53
3.5 Conductor en un camp elèctric: influència electroestàtica	54
3.6 Condensador: capacitat	56
3.7 Capacitat d'un condensador pla	57
3.8 Condensador amb dielèctric: polarització i permitivitat	59
3.9 Associació de condensadors	62
3.10. Energia d'un conductor i d'un condensador	63
3.11. Energia d'un condensador pla: energia del camp elèctric	64
Problemes	66

Capítol 4. CORRENT ELÈCTRIC.....	69
4.1. Corrent elèctric: densitat i intensitat	69
4.2. Equació de continuïtat. Corrents estacionaris	71
4.3. Corrents de conducció: llei d'Ohm	72
4.4. Associació de resistències	74
4.5. Energia i potència d'un corrent: efecte Joule	75
4.6. Generadors: força electromotriu	76
4.7. Llei d'Ohm a través d'un generador i balanç energètic	77
4.8. Anàlisi de circuits: regles de Kirchhoff	80
4.9. Circuit RC: càrrega i descàrrega d'un condensador	82
Problemes	85
 Capítol 5. CAMP MAGNÈTIC	 89
5.1. Forces d'interacció de corrents estacionaris	89
5.2. Camp magnètic: lleis de Biot-Savart i de Laplace	90
5.3. Camp magnètic creat per corrents filiformes	91
5.4. Interacció de corrents rectilinis i paral·lels	95
5.5. Flux del camp magnètic	96
5.6. Circulació del camp magnètic: llei d'Ampère	97
5.7. Càlcul del camp magnètic a partir de la llei d'Ampère	99
5.8. Força d'un camp magnètic sobre una càrrega: força de Lorentz.....	102
5.9. Moviment d'una càrrega en un camp magnètic	103
5.10. Acció d'un camp magnètic sobre una espira: moment magnètic	104
5.11. Corrents elementals i camp magnètic	105
5.12. Camp magnètic en un solenoide amb medi material: imantació i permeabilitat	106
5.13. Imants	109
Problemes	110
 Capítol 6. INDUCCIÓ ELECTROMAGNÈTICA.....	 113
6.1. Inducció electromagnètica: llei de Faraday	113
6.2. Origen de la força electromotriu d'inducció: camp d'inducció	115
6.3. Autoinducció.....	118
6.4. Inductància d'un solenoide	119
6.5. Inducció mútua	120
6.6. Generadors i motors	121
6.7. Corrents de Foucault	122
6.8. Energia magnètica d'un corrent	123
6.9. Energia d'un solenoide: energia del camp magnètic	124
6.10. Circuit RL	125
6.11. Circuit LC	126
6.12. Circuit RLC	128
Problemes	130
 Capítol 7. CORRENT ALTERN	 133
7.1. Corrent altern	133
7.2. Corrent altern en una resistència: potència i valors eficaços	133
7.3. Corrent altern en una inductància: reactància	134
7.4. Corrent altern en un condensador: reactància	135
7.5. Representació vectorial de les magnituds sinusoidals	136

7.6. Representació complexa de les magnituds sinusoidals	137
7.7. Corrent altern en R, L i C: amplituds complexes	138
7.8. Circuit RLC en sèrie: llei d'Ohm i impedància	138
7.9. Associació d'impedàncies	140
7.10. Potència d'un corrent altern	142
7.11. Ressonància	145
7.12. Transformador	148
Problemes	150
Capítol 8. EQUACIONS DE MAXWELL I ONES ELECTROMAGNÈTIQUES	153
8.1. Corrent de desplaçament	153
8.2. Equacions de Maxwell	155
8.3. Ones electromagnètiques	155
8.4. Energia d'una ona electromagnètica: vector de Poynting	158
8.5. Polarització	160
8.6. Espectre electromagnètic	162
Problemes	164
Capítol 9. REFLEXIÓ I REFRACCIÓ DE LA LLUM	167
9.1. Naturalesa de la llum	167
9.2. Propagació de la llum: principis de Huygens i de Fermat	168
9.3. Índex de refracció	169
9.4. Reflexió i refracció: lleis de Snell	169
9.5. Reflexió total i miratges	173
9.6. Dispersió	176
Problemes	177
Capítol 10. MIRALLS, DIOPTRES I LENTS	179
10.1. Formació d'imatges	179
10.2. Miralls plans	180
10.3. Miralls esfèrics	182
10.4. Dioptrics	185
10.5. Lents primes	188
10.6. Associació de lents en contacte	192
10.7. Sistemes de múltiples elements òptics	193
10.8. Aberracions	196
Problemes	197
Capítol 11. INSTRUMENTS ÒPTICS	201
11.1. Càmera fotogràfica	201
11.2. Ull	202
11.3. Lent d'augment	205
11.4. Microscopi	206
11.5. Telescopi	207
Problemes	210
ANNEX 1 IMATGES D'OBJECTES EN MIRALLS I LENTS	213
ANNEX 2 CRITERIS DE SIGNES PER A MIRALLS, DIOPTRES I LENTS	215
SOLUCIONS DELS PROBLEMES	217

PREFACI

El text *Fonaments d'Electromagnetisme i Òptica* correspon a les matèries de física que s'imparteixen el primer any dels graus universitaris de ciències i enginyeries. La part d'*electromagnetisme* segueix el desenvolupament tradicional, parteix de les lleis experimentals i arriba a la formulació de les equacions bàsiques de la teoria electromagnètica en forma integral. La part d'*òptica* es refereix a l'òptica geomètrica.

En l'electromagnetisme, es presenta l'electroestàtica amb la interacció de càrregues en repòs al buit, el camp elèctric i les seves propietats, l'energia i el potencial elèctrics, els conductors i condensadors, i els materials dielèctrics amb l'explicació microscòpica del seu comportament. Segueixen els corrents estacionaris i de conducció, i les equacions dels circuits. En la magnetoestàtica, a partir de la interacció entre corrents estacionaris s'introdueix el camp magnètic, i s'estudien les seves propietats en el buit i en els materials amb inclusió de l'explicació microscòpica. En els règims variables amb el temps es tracten, primer dins de l'aproximació quasiestacionària, la inducció electromagnètica, els règims transitoris dels circuits, el corrent altern i la ressonància. Després, en el cas general, el corrent de desplaçament, les equacions de Maxwell en forma integral i les ones electromagnètiques. En l'òptica, es presenten la reflexió i refracció de la llum, la formació d'imatges als miralls, diòptres i lents, i els instruments òptics: càmera fotogràfica, ull, lent d'augment, microscopi i telescopi.

Al llarg del text s'intercalen exemples que es refereixen a la resolució de problemes típics o a algunes aplicacions. La reflexió sobre aquests exemples permetrà als estudiants abordar millor la resolució dels problemes que es plantegen en cada capítol i dels quals es donen les solucions al final. Hi ha notes a peu de pàgina amb l'objectiu de situar cronològicament els científics que són esmentats i també per complementar o aclarir algunes qüestions.

Per a l'estudi de la matèria cal tenir els coneixements bàsics de càlcul diferencial i integral, anàlisi vectorial, sistemes de coordenades i nombres complexos. Els estudiants els hauran adquirit en les assignatures de Matemàtiques i de Mecànica cursades prèviament, però caldrà que en facin un bon repàs. Serà també convenient que revisin el camp gravitatori i l'energia potencial.

Esperem que l'obra ajudi els nous estudiants universitaris en l'aprenentatge d'una matèria que generalment no els resulta fàcil. Probablement hi haurà apartats no inclosos en el programa, sempre limitat, d'una assignatura determinada i que en una primera lectura seran obviats. Tanmateix, els estudiants més motivats podran considerar-los en una lectura posterior, i en textos més extensos hi trobaran una interessant informació complementària.

Hem impartit cursos sobre els continguts d'aquesta obra durant molts anys al Departament de Física Aplicada de la Universitat de Barcelona. Agraïm als seus professors i professores les discussions sobre la docència i l'avaluació de les assignatures, i haver compartit el treball amb bona companyonia.

Expressem el nostre reconeixement a Edicions de la Universitat de Barcelona pel seu interès i les facilitats per a l'edició de l'obra.

Agraïrem als lectors que ens facin arribar els seus comentaris i suggeriments sobre l'obra, i també els errors que hi detectin.

JOSÉ LUIS MORENZA

MANUEL VARELA

Juliol de 2022

Aquest capítol és el primer dels tres dedicats a la part de l'electromagnetisme denominada *electroestàtica* i que tracta sobre la interacció de les càrregues elèctriques en repòs. Les forces entre les càrregues s'estudien introduint el concepte de camp elèctric, anomenat *camp electroestàtic* quan en un context general es vol precisar que correspon a càrregues en repòs.

1.1. Càrrega elèctrica

La matèria està constituïda per àtoms, i els àtoms, per electrons, protons i neutrons. Aquestes partícules exerceixen forces atractives degudes a la interacció gravitatòria que s'atribueix a la seva massa. A més, els electrons i els protons exerceixen forces molt més intenses que corresponen a l'anomenada interacció electromagnètica i que s'atribueix a la seva *càrrega elèctrica*. Les forces entre electrons i entre protons són repulsives. Les forces entre un electró i un protó són atractives. A l'electró se li atribueix una càrrega de *signe negatiu* i al protó, una càrrega de *signe positiu*. El neutró no interactua, no té càrrega, es diu que és neutre. Les forces entre dos electrons, dos protons o un electró i un protó tenen la mateixa intensitat. D'això es dedueix que les càrregues de l'electró i del protó són iguals, només difereixen en el signe. S'escriuen respectivament $-e$ i e , sent $e > 0$ l'anomenada *càrrega elemental*. És remarcable aquesta igualtat si es té en compte que les masses de les dues partícules són molt diferents.

Un objecte material té un nombre molt gran d'àtoms, i per tant, d'electrons i de protons. Si té igual nombre d'electrons que de protons, la seva càrrega total, dita també càrrega neta o simplement càrrega, és nul·la. Si a més estan uniformement repartits, macroscòpicament els efectes d'ambdós es compensen i l'objecte es comporta com si no tingués càrregues, l'objecte és neutre. Ara bé, si té més electrons que protons, predomina l'efecte dels electrons, i l'objecte té una càrrega negativa que correspon a la de l'excés d'electrons. En el cas oposat, té una càrrega positiva que correspon a la de l'excés de protons.

En materials com els metalls, part dels electrons es poden moure lliurement: són els materials *conductors*. En altres materials, com el vidre, els electrons estan lligats als àtoms i no es poden moure lliurement: són els materials *aïllants* o *dielèctrics*.

Propietats de la càrrega elèctrica

- La càrrega elèctrica és un atribut de les partícules (electrons, protons), és quelcom intrínsec, no quelcom que se'ls pugui posar o treure.
- Hi ha dos tipus de càrregues elèctriques, positives i negatives. Les càrregues del mateix signe exerceixen forces repulsives i les de signe diferent exerceixen forces atractives.
- La càrrega elèctrica està quantitzada. Els valors de la càrrega elèctrica són múltiples de la càrrega elemental e .

- La càrrega elèctrica es conserva. En tot sistema tancat, la suma algebraica de les càrregues positives i negatives es manté constant.

En el Sistema Internacional (SI) la unitat de càrrega elèctrica és el *coulomb*¹ i el seu símbol és C. L'any 2018 es va definir el coulomb en termes de la càrrega elemental, de manera que exactament és $e = 1,602176634 \times 10^{-19}$ C. En el SI la unitat elèctrica bàsica és la d'intensitat de corrent *ampere* amb símbol A, i és $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$. Una càrrega d'1 C és molt gran, i sovint s'utilitzen els submúltiples μC , nC i pC .

En els experiments típics d'electroestàtica es treballa amb càrregues de l'ordre de pC - nC , molt superiors a la càrrega elemental. Per això, macroscòpicament la quantització de la càrrega no és observable.

1.2. Llei de Coulomb

Si es tenen dues càrregues puntuals² en repòs i en el buit, experimentalment s'observa que sobre cada càrrega hi actua una força

- dirigida segons la recta que uneix les càrregues,
- repulsiva si les càrregues són del mateix signe i atractiva si són de signe diferent,
- proporcional al valor de les càrregues, i
- inversament proporcional al quadrat de la distància entre les càrregues.

Aquest enunciat constitueix la *llei de Coulomb* i es pot expressar matemàticament mitjançant

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

on $\vec{F}_{12}$ és la força que la càrrega q_1 exerceix sobre la càrrega q_2 , $\hat{r}_{12}$ és el vector unitari corresponent al vector $\vec{r}_{12}$ que va de la posició de q_1 a la posició de q_2 ($\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$), i k és una constant de proporcionalitat experimental, $k = 8,988 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$. En el SI se substitueix k per $1/(4\pi\epsilon_0)$, sent $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^2$,³ amb la qual cosa

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

La càrrega q_2 exerceix sobre la càrrega q_1 una força $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, i per tant es compleix la tercera llei de Newton (*principi d'acció i reacció*).

En el cas d'un sistema de N càrregues puntuals ($q_1, q_2, \dots, q_N$), la força sobre la càrrega q_j és igual a la suma de les forces que cadascuna de les altres càrregues q_i ($i = 1, 2, \dots, N, i \neq j$) exerciria sobre ella sense la presència de les altres càrregues, és a dir es compleix el *principi de superposició* de les forces. La força és, doncs,

¹ En honor a Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806).

² Càrregues d'objectes de dimensions molt petites comparades amb la distància que els separa.

³ En comptes de $\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^2$, habitualment s'escriu F/m , sent F el símbol de farad, unitat que es definirà en el capítol 3.

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}$$

sent $\hat{r}_{ij}$ el vector unitari corresponent al vector $\vec{r}_{ij}$ amb origen a la càrrega q_i i final a la càrrega q_j , i r_{ij} el seu mòdul, que és igual a la distància entre les càrregues q_i i q_j .

Exemple 1.1. Càlcul de les forces que actuen sobre quatre càrregues puntuals iguals q col·locades als vèrtexs d'un quadrat de costat a

La força que actua sobre la càrrega q_1 (figura 1.1) és $\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41}$. Com que $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$, és

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \hat{a}_y, \quad \vec{F}_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^2} \frac{\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}}, \quad \vec{F}_{41} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \hat{a}_x,$$

sent $\hat{a}_x$ i $\hat{a}_y$ els vectors unitaris en les direccions dels eixos x i y positius. Sumant les tres forces s'obté

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \frac{q^2}{a^2} (\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

Per a les altres càrregues, procedint anàlogament, o bé considerant la simetria, resulta:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \frac{q^2}{a^2} (\hat{a}_x - \hat{a}_y), \quad \vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \frac{q^2}{a^2} (-\hat{a}_x - \hat{a}_y)$$

$$\vec{F}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \frac{q^2}{a^2} (-\hat{a}_x + \hat{a}_y), \quad F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{q^2}{a^2}$$

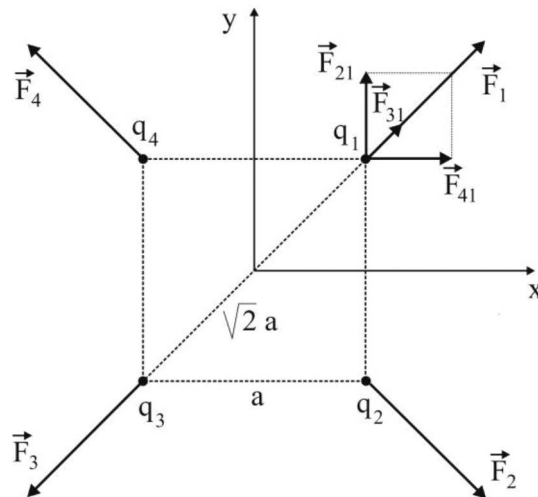


Figura 1.1

1.3. Camp elèctric

La interacció entre dues càrregues puntuals q_1 i q_2 pot ser considerada des de dos punts de vista:

a) Acció directa a distància

La força sobre la càrrega q_2 és deguda directament a la càrrega q_1 .

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

b) Creació i acció del camp

- La càrrega q_1 causa una modificació a l'espai que l'envolta, i es diu que crea un camp.
- El camp creat per la càrrega q_1 actua sobre la càrrega q_2 i causa la força sobre ella.

Llavors, si la llei de Coulomb s'escriu

$$\vec{F}_{12} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \right) q_2$$

el terme entre parèntesis només depèn de la càrrega q_1 i de la posició de la càrrega q_2 respecte a ella, no del seu valor, i la força sobre q_2 és proporcional a q_2 . Per això, aquest terme podria representar l'efecte de creació del camp, i s'identificarà amb la *intensitat del camp elèctric*, o simplement *camp elèctric*, $\vec{E}_{12}$.

En el cas de dues càrregues puntuals, la càrrega q_1 crea, doncs, el camp elèctric

$$\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

i el camp elèctric $\vec{E}_{12}$ actua sobre la càrrega q_2 produint la força (figura 1.2)

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Es considera que el camp que crea una càrrega existeix amb independència del fet que hi hagi o no una altra càrrega al seu entorn. Així, el camp elèctric $\vec{E}$ que una càrrega q situada al punt M crea al punt P és

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

sent $\hat{r} = \vec{r}/r$, i $\vec{r}$ el vector de posició de P respecte de M . Tanmateix, l'única manera de verificar que existeix el camp elèctric és col·locar una càrrega i veure que sobre ella hi actua una força.

Per altra banda, si en un punt P en què existeix un camp elèctric $\vec{E}$ es col·loca una càrrega q , sobre la càrrega hi actua una força $\vec{F} = q\vec{E}$.

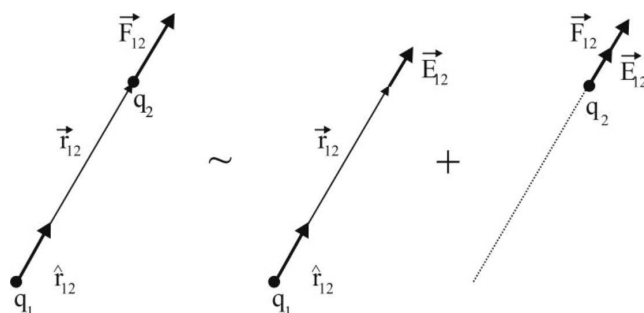


Figura 1.2

Observeu que el camp elèctric en cada punt de l'espai es pot obtenir col·locant en cada punt una càrrega q i mesurant la força $\vec{F}$ que actua sobre ella. El camp elèctric és simplement

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

i aquesta és l'expressió que defineix en general el camp elèctric creat per qualsevol sistema de càrregues. El camp elèctric en un punt de l'espai és la força que per unitat de càrrega actua sobre una càrrega de prova suficientment petita (en valor i dimensions) col·locada en el punt. Aquesta càrrega ha de tenir un valor petit per tal que en col·locar-la al punt no s'alteri el sistema i per tant el camp elèctric que es vol mesurar.

Quan en cada punt de l'espai hi ha definit el valor d'una magnitud vectorial, es té un camp vectorial, i el camp elèctric és un exemple de *camp vectorial*.

El camp elèctric és molt útil per descriure com interacciona un sistema de càrregues. Si es coneix el camp elèctric que crea en una regió de l'espai, resulta fàcil saber quina serà l'acció sobre una càrrega o càrregues col·locades en aquesta regió, sense necessitat de conèixer ni les posicions ni els valors de les càrregues del sistema.

En el cas d'un sistema de càrregues puntuals val el *principi de superposició* dels camps elèctrics, que és una conseqüència del principi de superposició de les forces elèctriques. En efecte, si hi ha N càrregues q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) als punts M_i i al punt P es col·loca una càrrega q , la força sobre aquesta càrrega, en termes dels vectors $\vec{r}_i$ que tenen origen a M_i i final a P , serà

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q}{r_i^2} \hat{r}_i$$

i com que $\vec{E} = \vec{F}/q$, resulta

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

i per tant

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \text{ sent } \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

El camp és, doncs, la suma dels camps que crearia cada càrrega si estigués sola.

En el SI, la unitat de camp elèctric és N/C, o bé V/m, sent V el símbol de volt, unitat que es definirà en el capítol 2.

1.4. Representació d'un camp vectorial: línies del camp elèctric

Un camp vectorial es pot representar dibuixant en determinats punts vectors indicadors del valor del camp. També s'utilitzen les *línies de camp*. Una línia de camp és una línia traçada de manera que la seva direcció en qualsevol punt (la direcció de la seva tangent) és igual a la del camp en aquest punt. Per representar el camp es dibuixen només algunes línies i s'adopta el criteri següent: la densitat de línies en l'entorn d'un punt és proporcional al mòdul del camp en el punt. És a dir, si en un punt es considera un element de superfície perpendicular al camp, el nombre de línies que el travessen dividit per la seva àrea és proporcional al mòdul del camp en el punt. D'aquesta manera les línies, a més d'indicar la direcció del camp (i el seu sentit si s'afegeix una fletxa), donen informació sobre el mòdul: en les zones on les línies estan més [menys] separades el camp és menys [més] intens.

Exemple 1.2. Línies del camp elèctric creat per càrregues puntuals

La figura 1.3 mostra les línies del camp elèctric de (a) una càrrega ($q > 0$), (b) dues càrregues iguals (q i q), (c) dues càrregues de valors oposats (q i $-q$), (d) dues càrregues de signes diferents (q i $-q/2$).

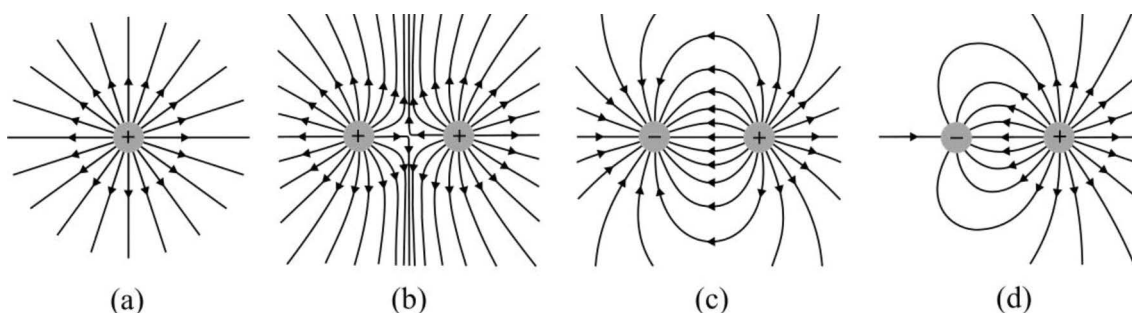


Figura 1.3

Una *propietat general* de les línies d'un camp vectorial és que dues línies no es poden tallar, perquè si es tallessin, al punt de tall el camp tindria dos valors diferents, cosa que no és possible.

Les *propietats particulars* de les línies del camp elèctric creat per un sistema de càrregues puntuals estacionari (que no varia amb el temps) són:

- Les línies comencen a les càrregues positives i van a les càrregues negatives o l'infinit.
- Les línies acaben a les càrregues negatives i venen de les càrregues positives o de l'infinit.
- El nombre de línies que comencen a una càrrega positiva, o acaben a una càrrega negativa, és proporcional al valor de la càrrega.
- A les proximitats d'una càrrega les línies tenen una configuració radial.
- Als punts molt allunyats d'un sistema de càrregues, les línies tenen una configuració radial si la càrrega total del sistema és no nul·la.
- Les línies no són mai tancades.

Aquestes propietats es poden justificar tenint en compte les propietats del camp elèctric que seran estudiades en els apartats 1.9 i 1.12 d'aquest capítol.

1.5. Distribucions contínues de càrrega

Encara que microscòpicament la càrrega es distribueix de manera discreta, a nivell macroscòpic la càrrega es pot considerar distribuïda de forma contínua, i l'estat de càrrega d'un cos es caracteritza mitjançant la *densitat volúmica de càrrega* ρ (càrrega per unitat de volum) que en general varia d'un punt a un altre de la distribució. Si a la distribució es considera un punt, i al seu entorn un petit recinte de volum Δv , aquest conté una càrrega (càrrega neta) Δq . Llavors la densitat volúmica de càrrega ρ en el punt és

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}$$

sent Δv molt petit a escala macroscòpica, però encara molt gran a escala microscòpica. La càrrega total Q de la distribució es calcula sumant les càrregues $dq = \rho dv$ del volum v de la distribució

$$Q = \int_v \rho dv$$

Les distribucions en què ρ és constant es denominen uniformes o homogènies, i en elles

$$Q = \int_v \rho dv = \rho \int_v dv = \rho v, \quad \rho = \frac{Q}{v}$$

sent v el volum de la distribució de càrrega.⁴

Exemple 1.3. Càlcul de la càrrega Q d'una esfera de radi a que té una densitat volúmica de càrrega uniforme ρ

Si ρ és constant, $Q = \int_v \rho dv = \rho v$, i com que $v = \frac{4}{3}\pi a^3$, resulta $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$.

Exemple 1.4. Càlcul de la càrrega Q d'una esfera de radi a que té una densitat volúmica de càrrega $\rho = \rho(r)$, sent r la distància al centre de l'esfera

La càrrega de l'esfera serà $Q = \int_v \rho(r) dv$. Per calcular la integral, el recinte v de l'esfera es pot considerar descompost en capes esfèriques concèntriques de radi r , compres entre 0 i a , i gruix dr (figura 1.4), el volum de les quals és $dv' = 4\pi r^2 dr$. Com que la integral és una suma, es poden sumar primer les contribucions de tots els petits elements de volum dv d'una capa, per als quals la densitat ρ té el mateix valor, i

⁴ Noteu que «volum» i « v » s'utilitzen per designar dos conceptes diferents. Quan es diu distribució de càrrega en un volum, o es posa v sota del signe integral, el volum es refereix a la regió de l'espai on es troba la distribució. En canvi, el dv de la integral o la v que apareix a l'última fórmula es refereixen al volum com a magnitud física (i per tant mesurable) que indica l'extensió d'un volum (regió de l'espai).

després sumar les contribucions de totes les capes. Així resulta una integral definida en què la variable és r . La càrrega serà, doncs,

$$\begin{aligned} Q &= \int_v \rho(r) dv = \int_{\text{capes}} \int_{\text{capa}} \rho(r) dv = \int_{\text{capes}} \rho(r) \int_{\text{capa}} dv = \int_{\text{capes}} \rho(r) dv' = \\ &= \int_0^a \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^a \rho(r) r^2 dr \end{aligned}$$

Si fos, per exemple, $\rho = C r$, sent C una constant, la càrrega seria $Q = 4\pi C \int_0^a r^3 dr = \pi C a^4$.

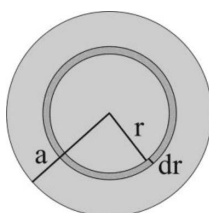


Figura 1.4

En general, un cos carregat es pot tractar com una distribució volúmica de càrrega de densitat ρ . No obstant això, certes distribucions, en funció de les seves dimensions i les distàncies als punts on s'observen els seus efectes, es poden tractar com a distribucions superficials, distribucions lineals o elements puntuals. Es poden considerar càrregues puntuals les distribucions de càrrega en què les dimensions són molt petites en comparació amb la distància des d'on s'observen els seus efectes.

Si el cos carregat té una dimensió molt menor que les altres dues, es pot assimilar a una superfície S amb una distribució superficial de càrrega, que estarà caracteritzada per la *densitat superficial de càrrega* σ (càrrega per unitat d'àrea) definida per

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

sent dq la càrrega d'un element de superfície d'àrea dS .⁵ La càrrega de la distribució serà llavors

$$Q = \int_S \sigma dS$$

Si el cos carregat té dues dimensions molt més petites que l'altra, pot ser assimilat a una línia L amb una distribució lineal de càrrega, caracteritzada per la *densitat lineal de càrrega* λ (càrrega per unitat de longitud) definida per

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell}$$

sent dq la càrrega corresponent a un element de línia de longitud $d\ell$. La càrrega de la distribució serà llavors

$$Q = \int_L \lambda d\ell$$

⁵ Noteu que amb la lletra S es designarà tant la superfície (regió de l'espai) com la seva àrea (magnitud física).