

GEOMETRIA LINEAL: 230 EXERCICIS RESOLTS

Olga Lavila Vidal

Departament de Matemàtiques i Informàtica

GEOMETRIA LINEAL: 230 EXERCICIS RESOLTS

Olga Lavila Vidal

Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Índex

PRÒLEG	7
1. LLISTA D'EXERCICIS	9
1.1. Espai afí	9
1.2. Afnitats	17
1.3. Espais vectorials euclidians	24
1.4. Espais afins euclidians	28
1.5. Endomorfismes ortogonals	34
1.6. Desplaçaments	38
2. ESPAI AFÍ	43
3. AFINITATS	97
4. ESPAIS VECTORIALS EUCLIDIANS	149
5. ESPAIS AFINS EUCLIDIANS	167
6. ENDOMORFISMES ORTOGONALS	217
7. DESPLAÇAMENTS	247
BIBLIOGRAFIA	309

Pròleg

Aquest text docent recull una col·lecció d'exercicis resolts de l'assignatura Geometria Lineal del Grau de Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.

El programa actual de l'assignatura comprèn tres hores de teoria, una de problemes i una de laboratoris per setmana, al llarg d'un semestre. Les classes de problemes i laboratoris tenen la finalitat principal d'ajudar a la comprensió de la teoria aplicant-la a la resolució de problemes. Alguns d'aquests problemes que es treballen a classe són extensos, per això molts d'aquests exercicis només es poden resoldre de manera parcial a classe i d'altres no es poden fer perquè el temps és molt limitat. L'objectiu d'aquest text docent és, doncs, proporcionar a l'estudiant una eina de consulta i de treball que li permeti completar de manera autònoma els exercicis. La col·lecció de problemes cobreix tot el temari de l'assignatura i se suposa que l'estudiant té coneixements d'àlgebra lineal. Excel·lents referències de la teoria de l'assignatura són els apunts *Geometria Lineal 18-19*, de Joan Carles Naranjo, que es poden trobar com a fitxer electrònic, i el llibre *Àlgebra lineal i geometria*, de Manuel Castellet i Irene Llerena.

Molts dels membres de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica han col·laborat al llarg del temps en la docència de l'assignatura i han participat tant en el desenvolupament dels programes en el context dels diferents plans d'estudis com en la preparació de les llistes d'exercicis. A tots ells, vull fer-los arribar el meu agraïment.

Santa Coloma de Queralt, 2021

1. LLISTA D'EXERCICIS

1.1. Espai afí

- 1.1. Siguin a, b, c, d punts d'un espai afí real. Demostreu que les condicions següents són equivalents i que, sota aquestes condicions, els quatre punts són coplanaris:

- a) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ac}$;
- b) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$;
- c) $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$;
- d) $a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = b + \frac{1}{2}\overrightarrow{bd}$;
- e) $c = a + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad}$;

Nota: quan quatre punts a, b, c, d són diferents i no estan alineats i se satisfan aquestes condicions equivalents, es diu que els quatre punts formen un paral·lelogram de costats ab, bc, cd, da . La quarta condició ens diu que els paral·lelograms es caracteritzen pel fet que les diagonals es tallen en els seus punts mitjans.

- 1.2. Siguin $p_1, \dots, p_n$ punts d'un espai afí i sigui σ una permutació del conjunt d'índexs $\{1, \dots, n\}$. Demostreu la relació $\overrightarrow{p_1 p_{\sigma(1)}} + \dots + \overrightarrow{p_n p_{\sigma(n)}} = \vec{0}$.

- 1.3. Siguin $p_1, \dots, p_n$ punts d'un espai afí.

- a) Demostreu que, en general, l'expressió $q + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{qp_i}$ depèn del punt q .
- b) Demostreu que $q + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{qp_i}$ no depèn de q si, i només si, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. En aquest cas, i només en aquest cas, l'expressió anterior s'escriu $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$.

- 1.4. Siguin $a_1, \dots, a_n$ punts d'un espai afí real $\mathbb{A}^m$. Diem que un punt g és el *baricentre* dels punts $a_1, \dots, a_n$ si verifica que $\overrightarrow{ga_1} + \dots + \overrightarrow{ga_n} = \vec{0}$. Escrivim $g = \text{bar}(a_1, \dots, a_n)$.

- a) Proveu l'existència i la unicitat del baricentre. Observeu que el baricentre de dos punts coincideix amb el punt mitjà dels dos punts.
- b) Siguin $a_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$, per a $i = 1, \dots, n$, les coordenades dels n punts en una certa referència. Demostreu que el baricentre g d'aquests punts té coordenades

$$g = \left(\frac{a_{11} + \dots + a_{1n}}{n}, \dots, \frac{a_{m1} + \dots + a_{mn}}{n} \right).$$

- 1.5. Siguin $\{p_1, \dots, p_n\}$ i $\{q_1, \dots, q_n\}$ dos conjunts de punts en un espai afí real i siguin p i q els baricentres respectius. Expressen la suma $\overrightarrow{p_1 q_1} + \dots + \overrightarrow{p_n q_n}$ en funció de $\overrightarrow{pq}$.

- 1.6. Siguin $A_1, \dots, A_n$ punts d'un espai afí real. Siguin $G = \text{bar}(A_1, \dots, A_n)$ i, per a $i = 1, \dots, n$, $G_i = \text{bar}(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n)$. Proveu que G és el punt de tall de les rectes $A_i G_i$. Encara més, si per a cada subconjunt $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ diem G_I el baricentre de $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$, aleshores proveu que $G \in G_I G_{\bar{I}}$, on $\bar{I}$ designa el complementari de I en $\{1, \dots, n\}$.

1.7. En un pla afí real es considera un triangle ABC . Sigui P el punt mitjà del costat BC , Q el punt mitjà de AC , i R el punt mitjà de AB . Proveu que:

- Les rectes AP , BQ i CR , anomenades *mitjanes del triangle* ABC , es tallen en un punt G . El punt G és el baricentre de A , B , C .
- Es compleix que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GP}$, $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GQ}$ i $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GR}$.

Així, doncs, el baricentre de tres punts A , B , C no alineats és el punt de tall de les mitjanes del triangle ABC .

1.8. En un pla afí real es considera un paral·lelogram $ABCD$ de diagonals AC i BD . Sigui P el punt mitjà del costat CD i Q el punt mitjà del costat BC . Demostreu que les rectes AP i AQ divideixen la diagonal BD en tres parts iguals.

1.9. En un pla afí real considerem un triangle de vèrtexs P_1, P_2, P_3 . Per a $i = 1, 2, 3$, sigui Q_i el punt mitjà de la mitjana des del punt P_i . Demostreu que els triangles $P_1P_2P_3$ i $Q_1Q_2Q_3$ tenen els costats paral·lels.

1.10. Sigui a, b, c, d punts d'un espai afí real. Sigui g el baricentre de a, b, c, d . Demostreu que $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ac}$ si, i només si, $g = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac}$. Deduïu que els paral·lelograms són els únics quadrilàters en els quals el baricentre coincideix amb el punt de tall de les dues diagonals.

1.11 Sigui a_1, a_2, a_3, a_4 punts del pla afí real tals que no n'hi ha tres sobre una mateixa recta. Sigui g, b_1, b_2, b_3, b_4 els baricentres de $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $\{a_2, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_4\}$ i $\{a_1, a_2, a_3\}$, respectivament. Proveu que les rectes b_1b_3 i b_2b_4 es tallen en g si, i només si, $a_1a_2a_3a_4$ és un paral·lelogram de diagonals a_1a_3 i a_2a_4 .

1.12. Sigui A_1, A_2, A_3, A_4 punts d'un espai afí real. Sigui M_{ij} el punt mitjà de A_i i A_j , i sigui G_i el baricentre de A_j, A_k, A_l , on $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Proveu que les rectes $A_1G_1, A_2G_2, A_3G_3, A_4G_4, M_{12}M_{34}, M_{13}M_{24}$ i $M_{14}M_{23}$ es tallen en un punt G , que és el baricentre de A_1, A_2, A_3, A_4 . Així, doncs, el baricentre de quatre punts A_1, A_2, A_3, A_4 no coplanaris és el punt de tall de les mitjanes del tetraedre $A_1A_2A_3A_4$.

1.13. En un pla afí real es considera un quadrilàter $ABCD$. Demostreu que els punts mitjans dels costats AB, BC, CD, DA són els vèrtexs d'un paral·lelogram o estan alineats.

1.14. Sigui A, B, C els vèrtexs d'un triangle del pla afí real i r una recta que talla les rectes AB, BC, CA en els punts P, Q, R , respectivament. Demostreu que els punts I, J, K determinats per:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}, \quad \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}, \quad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CQ}$$

estàn alineats.

1.15. Sigui $(\mathbb{A}^n, E)$ un espai afí real i $L \neq \emptyset$ un subconjunt de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que L és una varietat lineal (o un subespai afí) si, i només si, per a qualsevol parella de punts de L , la recta que determinen està continguda en L .

- 1.16.** Siguin $\{p; u_1, \dots, u_n\}$ i $\{q; v_1, \dots, v_n\}$ dos sistemes de referència de l'espai afí real $\mathbb{A}^n$.
- Proveu que existeix un punt que té les mateixes coordenades en els dos sistemes de referència si, i només si, $\text{rang}(\overrightarrow{pq}, u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n) = \text{rang}(u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n)$.
 - Proveu que, si no és buit, el lloc geomètric dels punts que tenen les mateixes coordenades en els dos sistemes de referència és una varietat lineal. Determineu la seva dimensió.
- 1.17.** Siguin $\mathbb{A}$ un espai afí i E el seu espai director. Siguin $\mathbb{V}_1 = a + F$ i $\mathbb{V}_2 = b + G$ dues varietats lineals de $\mathbb{A}$. Demostreu les afirmacions que siguin certes i doneu un contraexemple de les que siguin falses:
- $E = F + G \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$.
 - $\mathbb{A} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 \Rightarrow E = F + G$.
 - $F \cap G = \{\vec{0}\} \Rightarrow \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{p\}$.
 - $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{p\} \Rightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$.
 - $E = F \oplus G \Rightarrow \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{p\}$.
 - $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{V}_1$ i $\mathbb{V}_2$ són paral·leles o $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
- 1.18.** Sigui H un hiperplà de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que tota varietat lineal sense punts en comú amb H és paral·lela a H .
- 1.19.** Siguin $H_1, \dots, H_n$ hiperplans de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que, si $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_n) = 0$, aleshores es compleix que $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_i) = n - i$, per a tot $1 \leq i \leq n$.
- 1.20.** a) Fixada una referència cartesiana en un espai afí real de dimensió 3, demostreu que quatre punts $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, per a $i = 1, \dots, 4$, són coplanaris si, i només si, se satisfà:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- b) Fixada una referència cartesiana en un espai afí real de dimensió 3, demostreu que si els quatre plans d'equacions $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, per a $i = 1, 2, 3, 4$, tenen intersecció no buida, aleshores

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

És cert el recíproc? Justifiqueu la resposta.

- 1.21.** Sigui $\mathbb{A}^4$ un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En un cert sistema de referència, tenim les varietats lineals següents:

$$V_1: x + 2y + 3z + 4t = 1, \quad V_2 = (0, 0, 0, 0) + \langle (-4, -3, -9, 0), (2, -1, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle,$$

$$V_3: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + t = 2 \end{cases}, \quad V_4 = (0, 0, 0, 0) + \langle (1, 1, 1, 0), (0, 0, 3, 1) \rangle.$$

- Determineu les seves dimensions i doneu els seus subespais vectorials associats.
- Calculeu $V_1 \cap V_3$, $V_2 \cap V_4$, $V_3 \cap V_4$, $V_1 + V_3$, $V_2 + V_4$, $V_3 + V_4$.
- Determineu una varietat V_5 de dimensió 3 que sigui paral·lela a $V_1 \cap V_3$.

1.22. Considerem l'espai afí real $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ de dimensió 4. Demostreu que els conjunts de punts següents són varietats lineals:

$$\mathbb{V}_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A} : x - y + z - t = 0\}$$

$$\mathbb{V}_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A} : x - y - z - t = 1\}$$

$$\mathbb{V}_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A} : x + 2y + z = 0, 2x - t = 1\}$$

$$\mathbb{V}_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A} : y + t = 0, x + 2y + z = 2\}$$

$$\mathbb{V}_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A} : x - y = 1, x - z + t = 2, 2x - y - z + t = 3\}$$

$$\mathbb{V}_6 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A} : -x + 2z = 1, x - y + z = 1, y + t = 0\}.$$

Determineu les seves dimensions, els subespais directors i un sistema d'equacions paramètriques de cadascuna d'elles. Determineu també la dimensió i el subespai vectorial director de les varietats lineals intersecció $\mathbb{V}_2 \cap \mathbb{V}_4$ i $\mathbb{V}_3 \cap \mathbb{V}_4$ i les varietats lineals suma $\mathbb{V}_2 + \mathbb{V}_4$ i $\mathbb{V}_3 + \mathbb{V}_4$.

1.23. Siguin K i L dos plans en un espai afí de dimensió 4. Discutiu els possibles valors de la dimensió de la varietat lineal suma $K + L$ segons la posició relativa de K i L . Poseu un exemple de cada cas.

1.24. Sigui $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En una certa referència afí donada, considerem:

$$\pi: \begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases} \quad \pi_{(a,b)}: \begin{cases} x - ay = 2 \\ x - y + z - bt = 1. \end{cases}$$

Estudieu les posicions relatives de π i $\pi_{(a,b)}$ segons els diferents valors de a i b .

1.25. En un espai afí real de dimensió 3 tenim dues rectes que, en una referència afí, tenen les equacions:

$$r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x + y = 4 \\ z = 1. \end{cases}$$

- Trobeu, si existeix, la recta que passa pel punt $(0, 0, 1)$ i talla r i s .
- Trobeu, si existeix, la recta que passa pel punt $(2, 2, 0)$ i talla r i s .
- Trobeu per a quins valors de a existeix una recta que passa per $(a, 0, 2)$ i talla r i s .

- 1.26. Siguin r i s dues rectes de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ i sigui p un punt que no pertany a cap d'elles. Estudieu si existeixen rectes t , i quantes n'hi ha, que passin per p i tallin r i s . Discutiue els casos possibles en funció de la posició relativa entre r i s .
- 1.27. Donades tres rectes r, s, t de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ de manera que els seus vectors directors són tres vectors linealment independents, demostreu que existeix una única recta l paral·lela a t tal que $r \cap l \neq \emptyset$ i $s \cap l \neq \emptyset$.
- 1.28. Siguí $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En una certa referència afí donada, considerem:

$$r : \begin{cases} x = y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \pi_{(a,b)} : \begin{cases} y + z - at = 1 \\ x + bz + t = 2. \end{cases}$$

Estudieu les posicions relatives de r i $\pi_{(a,b)}$ segons els diferents valors de a i b .

- 1.29. Donades les rectes de l'espai afí $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ següents:

$$r : \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad t : \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases},$$

trobeu la recta que les talla en tres punts $R \in r, S \in s, T \in t$ tals que S és el punt mitjà de R i T .

- 1.30. Considerem, en l'espai afí real de dimensió 4, les varietats lineals següents:

$$L_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 : x + y = 7, z + t = a\}$$

$$L_2 = \{(6 + b\lambda, 1 - 2\lambda, -2\lambda, -1 + b\lambda) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$. Estudieu la dimensió de les varietats lineals $L_1 + L_2$ i $L_1 \cap L_2$ en funció dels paràmetres a i b . Determineu en quins casos les varietats L_1 i L_2 es tallen, són paral·leles o una d'elles està inclosa en l'altra.

- 1.31. En un espai afí real de dimensió 3 es consideren, en una referència donada, els plans $H_1 : x = 1, H_2 : y = 0$ i $H_3 : z = -1$. Trobeu les equacions dels plans H tals que H_1, H_2 i H_3 tallen H en rectes que formen un triangle amb baricentre en el punt $(0, 1, 1)$.
- 1.32. Donada una recta r del pla i donats dos punts $a, b \notin r$, determineu el lloc geomètric dels punts p tals que el quart vèrtex del paral·lelogram que té costats $\overrightarrow{pa}$ i $\overrightarrow{pb}$ pertanyi a la recta r .
- 1.33. Donades dues rectes r i s de l'espai afí real de dimensió 3, trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans dels parells de punts a i b , amb $a \in r$ i $b \in s$.
- 1.34. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ es consideren dos plans π_1 i π_2 no paral·lels i una recta r no paral·lela a cap d'ells. Descriu el lloc geomètric dels punts mitjans de les interseccions de les rectes paral·leles a r amb els plans π_1 i π_2 .

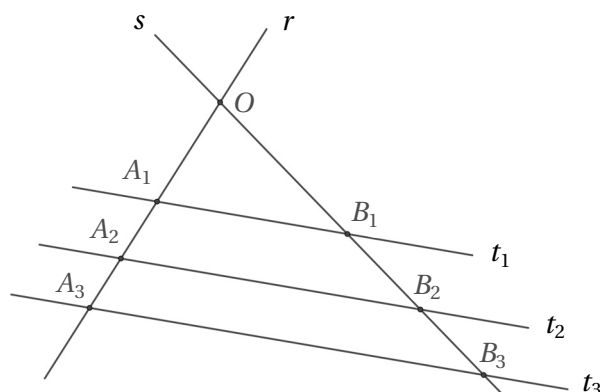
- 1.35. Donades dues rectes que es creuen a l'espai afí real de dimensió 3 i un pla no paral·lel a cap de les rectes, determineu el lloc geomètric dels punts mitjans dels segments amb un extrem a cada recta i paral·lels al pla.
- 1.36. Donades dues rectes paral·leles r i s del pla afí real, determineu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles ABC tals que $A \in r$ i el punt mitjà del costat BC pertany a la recta s .
- 1.37. Fixat un tetraedre en un espai afí real i un parell d'arestes oposades, considereu els plans paral·lels a aquest parell d'arestes que no les contenen.
- Proveu que aquests plans tallen les arestes restants en els vèrtexs d'un paral·lelogram.
 - Proveu que els punts d'intersecció de les diagonals d'aquests paral·lelograms es troben sobre una recta i descriviu-la geomètricament.
- 1.38. Sigui ABC un triangle d'un pla afí. Sigui $M_0 \in A + B$ un punt qualsevol i definim els punts $M_1, \dots, M_6$ de la manera següent: siguin M_1 el punt de tall de la paral·lela a BC per M_0 amb AC , M_2 el punt de tall de la paral·lela a AB per M_1 amb BC , M_3 el punt de tall de la paral·lela a AC per M_2 amb AB , etc. Demostreu que $M_0 = M_6$.
- 1.39. Sigui ABC un triangle d'un pla afí real. Considerem els punts A_1 i A_2 simètrics respecte del punt mitjà de B i C , els punts B_1 i B_2 simètrics respecte del punt mitjà de A i C , i els punts C_1 i C_2 simètrics respecte del punt mitjà de A i B . Sigui G el baricentre dels punts A, B, C , i, per a $i = 1, 2$, sigui G_i el baricentre dels punts A_i, B_i, C_i . Demostreu que G, G_1, G_2 estan alineats.
- 1.40. Siguin a, b, c tres punts diferents alineats en un espai afí real. Aleshores es defineix la *raó simple* $(a, b, c) := \lambda \in \mathbb{R}$, de manera que $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{bc}$. Trobeu les raons simples que s'obtenen permutant l'ordre dels tres punts.
- 1.41. En el pla afí real, considerem un trapezi de vèrtexs consecutius $ABCD$ i costats paral·lels AB i CD . Siguin E el punt de tall de les rectes AD i BC , F el punt de tall de les rectes BD i AC , M el punt mitjà de A i B , i N el punt mitjà de C i D .
- Proveu que els punts E, F, M, N estan alineats.
 - Proveu que $(D, A, E) = (C, B, E)$.
- 1.42. Siguin a, b, c tres punts d'una recta t i a', b', c' tres punts d'una recta t' . Suposem que les dues ternes tenen la mateixa raó simple $(a, b, c) = (a', b', c')$. Siguin a'', b'', c'' punts tals que

$$(a, a', a'') = (b, b', b'') = (c, c', c'').$$

Demostreu que a'', b'', c'' estan alineats i calculeu la raó simple (a'', b'', c'') .

- 1.43. Siguin ABC un triangle del pla afí real, A' un punt de BC , B' un punt de AC i C' un punt de AB . Demostreu que els triangles ABC i $A'B'C'$ tenen el mateix baricentre si, i només si, $(A', B, C) = (B', C, A) = (C', A, B)$.

- 1.44. a) Sigui P un punt del pla afí real i r una recta que no passa per P . Fixat $\lambda \in \mathbb{R}$, trobeu el lloc geomètric dels punts Q tals que $(Q, A, P) = \lambda$ en variar $A \in r$.
- b) Fixat un sistema de referència del pla $\{O; e_1, e_2\}$, considerem les rectes r i s que tenen equacions $r: x - 2y + 3 = 0$ i $s: 2x + y - 4 = 0$. Trobeu els punts Q tals que $(Q, A, O) = \frac{1}{2}$ i $(Q, B, O) = 2$, amb $A \in r$ i $B \in s$.
- 1.45. Siguin A, B, C tres punts no alineats en un pla afí real. Siguin D i E dos punts de la recta que passa per B i C . Farem servir la notació M_{XY} per al punt mitjà de X i Y .
- a) Demostreu que la igualtat $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB}$ equival a $M_{DE} = M_{BC}$ i també equival a la igualtat de raons simples $(E, C, B) = (D, B, C)$.
- b) Sigui r_1 la recta que passa per A i M_{DE} ; sigui r_2 la recta que passa per M_{AC} i M_{BE} , i sigui r_3 la recta que passa per M_{AB} i M_{CD} . Demostreu que les rectes r_1, r_2 i r_3 són concurrents si, i només si, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB}$, excepte en el cas que $(E, C, B) = (D, B, C) = \frac{3}{2}$. Què passa en aquest cas?
- c) Trobeu quina relació hi ha entre $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{BC}$ quan r_1, r_2, r_3 són paral·leles.
- 1.46. (Teorema de Tales) Siguin r i s dues rectes del pla afí que es tallen en un punt O , i siguin t_1, t_2, t_3 tres rectes paral·leles que tallen r i s en punts A_1, A_2, A_3 i B_1, B_2, B_3 , respectivament. Aleshores $(A_1, A_2, A_3) = (B_1, B_2, B_3)$.

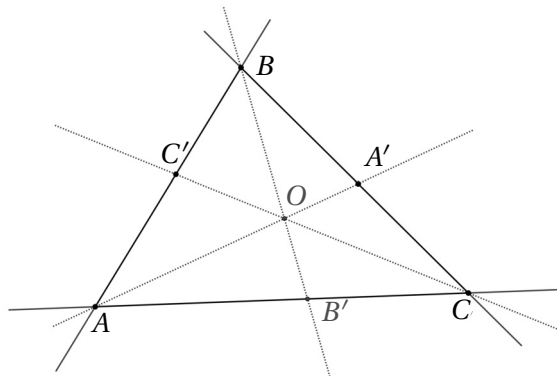


- 1.47. Proveu, utilitzant el teorema de Tales, que les tres mitjanes d'un triangle es tallen en el baricentre dels seus vèrtexs.
- 1.48. a) Siguin A, B, C tres punts alineats del pla afí i A', B', C tres punts alineats sobre una recta diferent. Proveu que si $(A, B, C) = (A', B', C)$, llavors les rectes AA' i BB' són paral·leles.
- b) Siguin r i s dues rectes del pla i O un punt exterior a totes dues. Demostreu que la projecció de r sobre s des de O conserva la raó simple si, i només si, r i s són paral·leles.
- 1.49. Siguin A, B, C, D quatre punts alineats diferents del pla afí. Definim la *raó doble* de A, B, C, D com

$$(A, B, C, D) := \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}.$$

Siguin r i s dues rectes del pla i O un punt exterior a totes dues. Demostreu que la projecció de r sobre s des de O conserva la raó doble.

- 1.50. (Teorema de Ceva) Sigui ABC un triangle del pla afí i $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ punts diferents dels vèrtexs. Proveu que les rectes AA' , BB' , CC' són concurrents o bé paral·leles si, i només si, se satisfà que $(A, B, C')(B, C, A')(C, A, B') = -1$.



Si les rectes AA' , BB' , CC' són concurrents en un punt O , direm que el triangle $A'B'C'$ és *cevià de punt O respecte de ABC* .

- 1.51. Sigui ABC un triangle del pla afí real. Siguin $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ diferents de A , B , C . Si les rectes AA' , BB' , CC' són concurrents en O , aleshores demostreu que $(O, A, A') + (O, B, B') + (O, C, C') = 1$.
- 1.52. Siguin A, B, C vèrtexs d'un triangle i $F \in AB$, $E \in AC$, $D \in BC$, diferents dels vèrtexs del triangle, de manera que AD , BE , CF són concurrents. Siguin P el punt mitjà de AD , Q el punt mitjà de BE i R el punt mitjà de CF . Siguin L el punt mitjà de BC , M el punt mitjà de AC i N el punt mitjà de AB . Proveu que les rectes MQ , NR , LP són concurrents o paral·leles.
- 1.53. Sigui $A_1A_2A_3$ un triangle del pla afí. Suposem que $B_1B_2B_3$ és un triangle cevià de punt A respecte de $A_1A_2A_3$ i que $C_1C_2C_3$ és un triangle cevià de punt B respecte de $B_1B_2B_3$. Proveu que A_1C_1 , A_2C_2 , A_3C_3 són concurrents o paral·leles.
- 1.54. Sigui ABC un triangle i siguin $F \in AB$, $E \in AC$, $D \in BC$, de manera que DEF és un triangle cevià respecte de ABC . Siguin F' el punt mitjà de DE , D' el punt mitjà de EF i E' el punt mitjà de FD . Siguin C' el punt mitjà de AB , B' el punt mitjà de AC i A' el punt mitjà de BC .
- Proveu que les rectes AD' , BE' , CF' són concurrents o paral·leles.
 - Proveu que les rectes $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$ són concurrents.
- 1.55. (Teorema de Menelau) Sigui ABC un triangle del pla afí i siguin $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ punts diferents dels vèrtexs. Aleshores, els punts A' , B' , C' estan alineats si, i només si, $(A, B, C')(B, C, A')(C, A, B') = 1$.
- 1.56. (Teorema de la divisió harmònica) Sigui ABC un triangle del pla afí i siguin $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$, diferents dels vèrtexs, de manera que les rectes AA' , BB' , CC' són

concurrents. Si $A'B'$ talla AB en C'' , aleshores $(A, B, C', C'') = -1$. En aquest cas, diem que A, B, C', C'' és una *quaterna harmònica*.

- 1.57. Siguin A, B, C vèrtexs d'un triangle de $\mathbb{A}^2$ i $A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$ diferents de A, B, C . Utilitzeu el teorema de Menelau per provar que, si les rectes AA', BB', CC' són concurrents, aleshores $(A, B, C')(B, C, A')(C, A, B') = -1$. Observeu que aquest enunciat és una de les implicacions del teorema de Ceva.
- 1.58. Sigui $ABCD$ un quadrilàter i siguin $P \in AB, Q \in BC, R \in CD, S \in DA$, diferents dels vèrtexs, els punts de tall d'una recta amb els quatre costats del quadrilàter. Proveu que $(A, B, P)(B, C, Q)(C, D, R)(D, A, S) = 1$.
- 1.59. Sigui $A_1A_2A_3$ un triangle del pla afí. Siguin $B_1 \in A_2A_3, B_2 \in A_1A_3, B_3 \in A_1A_2$ alineats. Si M_i és el punt mitjà de A_i i B_i , per a $i = 1, 2, 3$, proveu que M_1, M_2, M_3 estan alineats.
- 1.60. Sigui ABC un triangle del pla afí i sigui $A'B'C'$ un triangle cevià respecte de ABC . Siguin A'' el punt de tall de BC i $B'C'$, B'' el punt de tall de AC i $A'C'$, i C'' el punt de tall de AB i $A'B'$. Proveu que A'', B'', C'' estan alineats.
- 1.61. (Teorema de Pappus) Siguin r i s dues rectes del pla afí no paral·leles i siguin A, B, C i A', B', C' ternes de punts sobre cada recta. Proveu que, si existeixen, aleshores els punts $AB' \cap A'B, AC' \cap A'C, BC' \cap B'C$ estan alineats.
- 1.62. (Teorema de Pappus per a rectes paral·leles) Siguin r i s dues rectes paral·leles del pla afí i siguin A, B, C i A', B', C' ternes de punts sobre cada recta. Proveu que, si existeixen, llavors els punts $AB' \cap A'B, AC' \cap A'C, BC' \cap B'C$ estan alineats.
- 1.63. Sigui $ABCD$ un paral·lelogram. Sigui I un punt de la recta AB i J un punt de la recta CD . Proveu que, si existeixen $M = AJ \cap DI$ i $N = BJ \cap CI$, aleshores la recta MN passa pel centre del paral·lelogram.
- 1.64. (Teorema de Pappus dual) Siguin r, s, t i r', s', t' ternes de rectes concurrents al pla afí real. Suposem que existeixen els punts $A = r \cap s', A' = r' \cap s, B = r \cap t', A' = r' \cap t, C = s \cap t', C' = s' \cap t$. Aleshores, les rectes AA', BB', CC' són concurrents o paral·leles.
- 1.65. (Teorema de Desargues) Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles del pla afí. Suposem que existeixen els punts $P = AB \cap A'B', Q = AC \cap A'C', R = BC \cap B'C'$. Aleshores, les rectes AA', BB', CC' són paral·leles o concurrents si, i només si, P, Q, R estan alineats.

1.2. Afinitats

- 1.1. Sigui $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ una afinitat amb endomorfisme associat $\tilde{f}$. Donada una varietat lineal, $\mathbb{L} = a + F$, decideu si les implicacions següents són certes o falses:
 - a) $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L} \Rightarrow \tilde{f}(F) = F$.
 - b) $\tilde{f}(F) = F \Rightarrow f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$.

- 1.2. Sigui f una afinitat de $\mathbb{A}^n$. Proveu que f és una homotècia o una translació si, i només si, transforma tota recta de $\mathbb{A}^n$ en una recta paral·lela a ella.
- 1.3. Demostreu que la composició de dues homotècies és una homotècia o una translació. Determineu, en cada cas, el centre i la raó de l'homotècia o el vector de translació, en funció dels centres i les raons de les homotècies donades.
- 1.4. Sigui G el conjunt format per les translacions i les homotècies de l'espai afí real de dimensió n .
- Proveu que G és un grup amb la composició.
 - Proveu que el conjunt T format per les translacions és un subgrup normal de G . A quin grup és isomorf G/T ?
 - És cert que el conjunt H format per les homotècies és un subgrup de G ?
- 1.5. Sigui f una afinitat d'un espai afí real. Proveu que:
- Si f^2 té algun punt fix, f també en té (indicació: penseu en el punt mitjà).
 - Si f^n té algun punt fix, per a $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, aleshores f també en té.
- 1.6. Proveu que la composició de dues simetries centrals és una translació. Més concretament, si s_p i s_q són, respectivament, les simetries centrals respecte dels punts p i q , aleshores $s_q \circ s_p$ és la translació de vector $2\overrightarrow{pq}$.
- 1.7. Siguin p_1, p_2, p_3, p_4 punts diferents d'un pla afí real dels quals no n'hi ha tres alineats. Per a $1 \leq i \leq 4$, sigui s_i la simetria central respecte del punt p_i . Demostreu que es verifica $s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 = Id$ si, i només si, els punts p_1, p_2, p_3, p_4 són els vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram.
- 1.8. Siguin $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ punts diferents d'un pla afí real, de manera que no n'hi ha tres d'alineats. Per a $1 \leq i \leq 6$, sigui s_i la simetria central respecte del punt p_i . Demostreu que es verifica $s_6 \circ s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 = Id$ si, i només si, existeix un punt q tal que $p_1 p_2 p_3 q$ i $q p_4 p_5 p_6$ són paral·lelograms.
- 1.9. Fixat un sistema de referència de $\mathbb{A}^2$, sigui $g : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ l'aplicació afí que transforma els punts $Q = (3, 4)$, $N = (2, 5)$, $M = (3, 5)$ en $g(Q) = (4, 7)$, $g(N) = (2, 9)$, $g(M) = (4, 9)$. Trobeu les equacions de g .
- 1.10. Considerem les rectes del pla afí real que, en un cert sistema de referència, tenen les equacions següents:

$$r_1 : x - 2y + 1 = 0, \quad r_2 : x = y, \quad r_3 : x - 3y + 4 = 0.$$

Trobeu l'equació de les afinitats g tals que $g(r_1) = r_2, g(r_2) = r_3, g(r_3) = r_1$.

1.11. Sigui $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ l'afinitat del pla donada per les equacions següents:

$$\begin{cases} x^* = x - y + 1 \\ y^* = x + y + 2. \end{cases}$$

- a) Trobeu-ne els punts fixos i les rectes invariants.
- b) Sigui r la recta d'equació $2x + 3y = 1$. Calculeu les equacions de $f(r)$ i $f^{-1}(r)$.
- c) Trobeu les equacions de la inversa de f .

1.12. Calculeu els punts fixos i les rectes invariants de l'afinitat f que té per equacions:

$$\begin{cases} x^* = -3x + 2y + 2 \\ y^* = -2x + 2y + 1. \end{cases}$$

Feu el mateix per a f^n , on $n \geq 2$ és un enter qualsevol.

1.13. Calculeu, en funció del paràmetre a , $a \neq 0$, les varietats lineals invariants de l'aplicació afí següent:

$$\begin{cases} x^* = ax - y - z + 1 \\ y^* = y + 2z + 1 \\ z^* = -z. \end{cases}$$

1.14. Sigui $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ una afinitat que, en una certa referència, té matriu M . Sigui H l'hiperpla de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$, que, en aquesta referència, té equació $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$.

- a) Proveu que H és invariant per f si, i només si, $(a_1, \dots, a_n, b)$ és un vector propi de M^t (amb algun $a_i \neq 0$).
- b) Apliqueu-ho a trobar els plans invariants per f_a en l'exercici 1.13.

1.15. Fixada una referència de l'espai afí $\mathbb{A}^3$, considerem les afinitats $f_a : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$ que transformen el punt $(1, 0, 0)$ en el punt $(0, a, a)$ i que, restringides al pla $x + y + z = 0$, donen una simetria central de centre l'origen. Trobeu la matriu de f_a en la referència donada i, en funció del paràmetre a , determineu:

- a) Els punts fixos de l'afinitat f_a .
- b) Les rectes invariants per f_a .
- c) Els plans invariants per f_a .

1.16. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, siguin π un pla i $p, q \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ punts, amb $q \in \pi$ i $p \notin \pi$. Sigui $f \neq Id$ una afinitat que deixa p fix i deixa invariants totes les rectes per q contingudes en π .

- a) Proveu que q és un punt fix per f .
- b) Proveu que $f|_{\pi}$ és una homotècia.
- c) Proveu que f és una simetria si, i només si, $f|_{\pi}$ és una simetria central.
- d) Trobeu els punts fixos per f .
- e) Trobeu les rectes invariants per f .