

PROBLEMES DE FÍSICA ESTADÍSTICA

M.^a Carmen Miguel López
Matteo Palassini
Eduard Vives i Santa-Eulalia

Departament de Física de la Matèria Condensada

PROBLEMES DE FÍSICA ESTADÍSTICA

M.^a Carmen Miguel López
Matteo Palassini
Eduard Vives i Santa-Eulalia

Departament de Física de la Matèria Condensada

Índex

Introducció	7
Capítol 1	
REPÀS DE PROBABILITATS I ALTRES ASPECTES MATEMÀTICS	9
Capítol 2	
ESPAI DE LES FASES I COL·LECTIVITAT MICROCANÒNICA.....	31
Capítol 3	
EL FACTOR DE BOLTZMANN I LA COL·LECTIVITAT CANÒNICA.....	59
Capítol 4	
SISTEMES OBERTS I COL·LECTIVITAT GRANCANÒNICA	99
Capítol 5	
INDISTINGIBILITAT QUÀNTICA	119
Capítol 6	
APLICACIONS DE LA COL·LECTIVITAT CANÒNICA: ESTRUCTURA MOLECULAR DELS GASOS I VIBRACIONS EN ELS SÒLIDS	139
Capítol 7	
APLICACIONS DE L'ESTADÍSTICA DE FERMI-DIRAC.....	169
Capítol 8	
ESTADÍSTICA DE LA RADIACIÓ I APLICACIONS DE L'ESTADÍSTICA DE BOSE-EINSTEIN	185
Nomenclatura	207
Índex de figures	209
Bibliografia	211

L'assignatura de Física Estadística és una assignatura troncal de la majoria de graus de Física en l'àmbit de l'espai europeu d'educació superior. Es tracta d'una disciplina fonamental per entendre el comportament de sistemes de moltes partícules, amb implicacions evidents en diversos aspectes de física fonamental, però també en molts aspectes de física aplicada, física de l'estat sòlid, astrofísica, etc., i que a la vegada constitueix l'estructura fonamental de molts problemes de gran interès actual en diverses àrees que no tenen res a veure amb la física, com la neurociència, l'ecologia, la sociologia i l'estudi dels sistemes complexos.

En el cas del grau de Física de la Universitat de Barcelona, l'assignatura comprèn un total de 6 crèdits del sistema europeu de transferència de crèdits (European Credit Transfer and Accumulation System, ECTS), dels quals 4,5 són teòrics i 1,5 són crèdits de problemes. L'objectiu de l'assignatura és iniciar l'estudiant en el tractament dels models microscòpics constituïts per un gran nombre de partícules sense interacció i en equilibri, de manera que se'n puguin justificar les propietats termodinàmiques. És, per tant, molt important, abans d'afrontar l'estudi d'aquesta matèria, haver assolit un bon coneixement de la termodinàmica. La disciplina engloba el tractament tant dels sistemes de partícules de la mecànica clàssica com els de la mecànica quàntica.

La col·lecció de problemes és extensa i s'ha fet un esforç per detallar-ne la resolució de manera que cada un d'ells sigui autoconsistent. Això comporta la repetició d'alguns arguments en diferents problemes. El text inclou també al començament de cada tema uns formularis que recullen els conceptes i les equacions bàsics per resoldre els problemes. No es pretén que siguin un resum de la teoria, sinó simplement una eina de treball per resoldre els problemes. També s'ha fet un esforç per homogeneïtzar la nomenclatura en tots els problemes. L'ordenació dels problemes en capítols intenta seguir el que s'ha anat fent durant els darrers cursos en el grau de Física. Des de l'inici de la col·lecció de problemes ja es barregen els exemples de partícules que segueixen les lleis de la mecànica clàssica i de la quàntica, encara que un veritable tractament dels sistemes de partícules quàntiques que tinguin en compte les propietats de simetria de les funcions d'ona no es du a terme fins al capítol 5 d'aquest llibre. El tema 6, que engloba l'estudi dels gasos amb graus de llibertat interns i les vibracions dels sòlids, podria haver-se incorporat perfectament dins del tema 3. D'altra banda, la separació entre els temes 5, 7 i 8 és també força arbitrària.

Bàsicament, la llista de problemes correspon a la col·lecció de problemes de l'assignatura que es treballa en el grau i que ha anat evolucionant al llarg de molts anys. Alguns enunciat provenen de llibres de text clàssics o d'altres fonts d'aquesta disciplina, i han estat traduïts, modificats i adaptats al nivell d'aquest curs introductori. D'altres han estat dissenyats per professors de l'assignatura, sobretot com a problemes i qüestions en les proves d'avaluació. Al final del llibre hi hem incorporat un apartat de bibliografia, que inclou algunes d'aquestes fonts en les quals és possible trobar alguns dels problemes proposats, per tal que els alumnes puguin contrastar i complementar la informació continguda en aquest recull.

Amb anterioritat a l'any 2009, la impartició d'aquesta assignatura a les aules era responsabilitat dels antics departaments de Física Fonamental i d'Estructura i Constituents de la Matèria, entre els quals s'alternaven o es compartien les diferents activitats docents d'aquest curs. Amb la creació del Departament de Física de la Matèria Condensada, l'assigna-

tura ha passat a ser responsabilitat única d'aquest nou departament, fet que n'ha facilitat la coordinació de continguts i materials. Cal tenir present que solen cursar-la anualment entre dos-cents i dos-cents cinquanta alumnes i que, per tant, l'activitat docent implica un nombre elevat de professors; habitualment, sis o vuit docents cada curs. Per aquesta raó i sense remuntar-nos gaires anys enrere, a banda de la contribució dels autors del llibre caldria destacar i agrair les contribucions (per ordre alfabètic) de Marián Boguñá, Jaume Casademunt, Teresa Castán, Albert Díaz-Guilera, Aurora Hernández, Juan Luis Gómez, Lluís Mañosa, Jordi Ortín, Conrad Pérez, Enric Pérez, Antoni Planes, Fèlix Ritort, Miguel Rubí, José María Sancho, Pere Seglar i Pietro Tierno, entre d'altres.

També ens agradaria esmentar i agrair la col·laboració d'alguns alumnes del grup M1 de la primavera del curs 2019-2020, afectat pel confinament de la COVID-19, que han contribuït a corregir-ne errades: Sergio Benítez, Judit Donada, Guillem Güell, Paula Navarro, Jaume Rius i Linda Toribio.

REPÀS DE PROBABILITATS I ALTRES ASPECTES MATEMÀTICS

Formulari

Fórmula de Stirling:

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad \ln N! = N \ln N - N + \mathcal{O}(\ln N).$$

Coefficients binomials:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Funció gamma:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

Algunes integrals gaussianes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(b^2 - 4ac)/4a,$$

$$\int_0^\infty x^m \exp(-ax^2) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2a^{\frac{m+1}{2}}}.$$

1.1. **Distribució de velocitats de Maxwell.** Supposeu que la velocitat de les molècules d'un gas segueix la distribució de Maxwell:

$$\rho(\vec{v}) d^3\vec{v} = A e^{-\beta(mv^2/2)} d^3\vec{v}, \quad \text{amb} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

- Calculeu la densitat de probabilitat de la component v_x .
- Trobeu el valor esperat i el valor més probable de v_x .
- Calculeu la densitat de probabilitat de v (mòdul de $\vec{v}$).
- Trobeu el valor esperat i el valor més probable de v .
- Calculeu la densitat de probabilitat del moment lineal.
- Calculeu la densitat de probabilitat de l'energia cinètica de les partícules.

Solució

En aquest problema es repassen les densitats de probabilitat multivariades i com es fa un canvi de variables en una densitat de probabilitat. Es pren l'exemple de l'anomenada distribució de velocitats de Maxwell.

Malgrat que sovint s'abusa del llenguatge, és millor utilitzar una nomenclatura que no confongui probabilitats amb densitats de probabilitat, que identifiqui sempre correctament els diferencials que acompanyen les densitats i que, a banda, distingeixi el nom de la variable aleatòria (v.a.) dels valors que pren. Per tant, és millor reescriure

$$dP = \rho_{\vec{v}}(\vec{v}) d\vec{v} = A e^{-\beta(mv^2/2)} d\vec{v},$$

on entenem que $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$.

- (a) El primer que cal fer és demanar que la densitat estigui correctament normalitzada. Fixem-nos que és una densitat de probabilitat conjunta de tres v.a. que són les tres components cartesianes del vector velocitat $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Aquestes tres components poden prendre valors en $\mathbb{R}$. Per tant, la normalització és

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \rho_{\vec{v}}(\vec{v}) = 1.$$

La constant A vindrà donada per

$$A^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z e^{-\beta \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}}.$$

Noteu que aquesta integral factoritza en tres integrals iguals, de tipus gaussià

$$A^{-1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dv_i e^{-\beta \frac{mv_i^2}{2}} \right)^3.$$

Fent el canvi de variables $u = \sqrt{\beta m/2} v_i$, es troba

$$A^{-1} = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}} \right)^3 \Rightarrow A = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Per tant, la densitat normalitzada correctament és

$$dP = \rho_{\vec{v}}(\vec{v}) d\vec{v} = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(mv^2/2)} d\vec{v}.$$

Aquesta expressió correspon a una densitat de probabilitat conjunta de tres variables que són les tres components cartesianes de la velocitat d'una molècula.

La densitat de probabilitat de qualsevol de les components cartesianes es determina fàcilment notant que la densitat conjunta factoritza en tres termes simètrics.

$$dP = \rho_{\vec{v}}(\vec{v}) d\vec{v} = \rho_{v_x}(v_x) \rho_{v_y}(v_y) \rho_{v_z}(v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

Per tant,

$$\rho_{v_x}(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}} e^{-\beta \frac{m v_x^2}{2}} dv_x.$$

Les tres components de la velocitat són variables aleatòries independents i tenen una densitat de probabilitat idèntica, cosa que, per altra banda, és esperable, atesa la isotropia de l'espai.

- (b) El valor esperat i el màxim d'aquesta densitat es troben immediatament si ens adonem que és gaussiana, centrada a $v_x = 0$. Per tant,

$$\langle v_x \rangle = 0, \quad v_x^{\text{màx}} = 0.$$

Per altra banda, encara que no es demani, és també convenient trobar el segon moment,

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{\beta m} = \frac{k_B T}{m}.$$

- (c) Per determinar la densitat de probabilitat de $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, cal fer un canvi de variables a la densitat original,

$$dP = \rho_{\vec{v}}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}} dv_x dv_y dv_z.$$

El canvi no és més que un canvi de coordenades cartesianes a coordenades esfèriques, tal com s'indica a la figura 1.1:

$$v_x = v \sin \theta \cos \phi,$$

$$v_y = v \sin \theta \sin \phi,$$

$$v_z = v \cos \theta,$$

on $v \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ i $\phi \in (0, 2\pi)$.

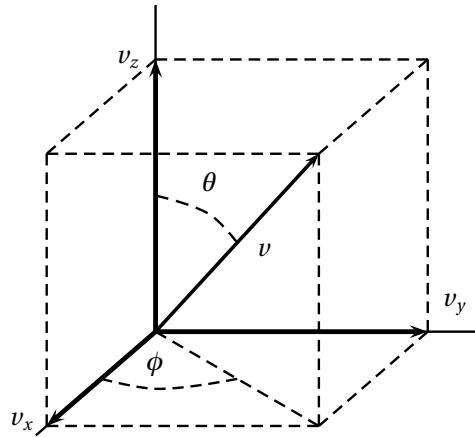


Figura 1.1. Coordenades esfèriques.

El determinant de la matriu jacobiana de la transformació $\left| \frac{\partial(v_x, v_y, v_z)}{\partial(v, \theta, \phi)} \right|$ és $v^2 \sin \theta$. Aquesta expressió ens dona el nou element de volum,

$$\left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}} dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v^2 \sin \theta dv d\theta d\phi.$$

Noteu que en les noves coordenades esfèriques la densitat de probabilitat també factoritza en producte de tres densitats:

$$dP = \rho_{v,\theta,\phi}(v, \theta, \phi) dv d\theta d\phi = \rho_v(v) dv \rho_\theta(\theta) d\theta \rho_\phi(\phi) d\phi.$$

Tenint en compte que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi &= 2\pi, \\ \int_0^\pi \sin \theta d\theta &= 2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

és fàcil determinar les tres densitats de probabilitat ρ_v , ρ_θ , ρ_ϕ , normalitzades correctament:

$$\rho_\phi(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} d\phi, \quad 0 < \phi < 2\pi,$$

$$\rho_\theta(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta, \quad 0 < \theta < \pi,$$

$$\rho_v(v) dv = 4\pi \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v^2 dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v^2 dv, \quad 0 < v < \infty.$$

Per tant, les tres coordenades esfèriques també són v.a. independents, igual que les tres coordenades cartesianes. Cal fixar-se que la densitat de probabilitat del mòdul v no és gaussiana. El seu comportament es mostra a la figura 1.2.

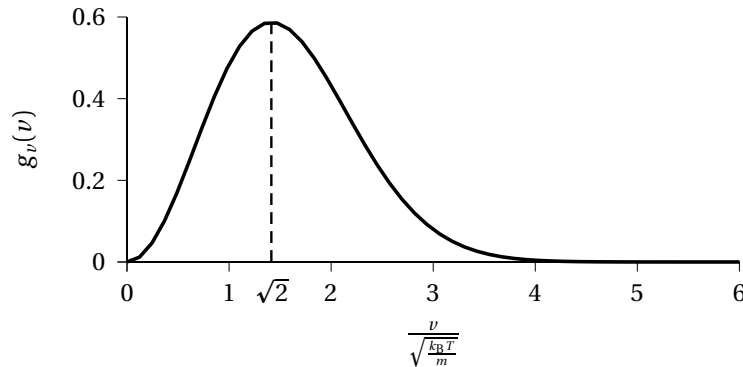


Figura 1.2. Densitat de probabilitat del mòdul de la velocitat, v , representat en termes de la variable adimensional $\frac{v}{\sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$.

Aquest mateix apartat (i, en general, les transformacions de v.a.) es podria haver resolt calculant primer la funció de distribució acumulada de $v = |\vec{v}|$, que es defineix com

$$F_v(x) = P(v < x) = \int \int \int_{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 < x^2} dv_x dv_y dv_z \rho_{\vec{v}}(\vec{v}),$$

i després derivar per obtenir

$$\rho_v(x) = \frac{dF_v(x)}{dx}$$

(d) El valor esperat $\langle v \rangle$ el calcularem fent

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^\infty v \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} v^2 dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} dv = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3+1}{2})}{2(\frac{\beta m}{2})^{\frac{3+1}{2}}} = \sqrt{\frac{8}{\pi \beta m}}, \end{aligned}$$

i doncs,

$$\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \simeq 1.595769 \sqrt{\frac{k_B T}{m}}.}$$

Aquesta integral es pot fer per parts. Aquí hem fet servir la fórmula general següent,

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{2a^{\frac{m+1}{2}}},$$

i les propietats de la funció Γ (vegeu el formulari).

El valor més probable de v el podem determinar fent

$$\left. \frac{d\rho_v(v)}{dv} \right|_{v_{\text{màx}}} = 0 \Rightarrow e^{-\frac{\beta m(v_{\text{màx}})^2}{2}} (2v_{\text{màx}} - \beta m(v_{\text{màx}})^3) = 0.$$

La solució que correspon al màxim és

$$\boxed{v_{\text{màx}} = \sqrt{\frac{2}{m\beta}} \simeq 1.414214 \sqrt{\frac{k_B T}{m}}.}$$

(e) La densitat de probabilitat del moment lineal, $\vec{p}$, és fàcilment determinable a partir de la densitat $\rho_{\vec{v}}$, fent el canvi de variables:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad d\vec{p} = m d\vec{v},$$

$$dp_x dp_y dp_z = m^3 dv_x dv_y dv_z.$$

Per tant,

$$\rho_{\vec{v}}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}} dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}} \frac{1}{m^3} dp_x dp_y dp_z,$$

$$\boxed{\rho_{\vec{p}}(\vec{p}) dp_x dp_y dp_z = \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp_x dp_y dp_z.}$$

(f) Per trobar la densitat de probabilitat de l'energia cinètica podem partir de la densitat $\rho_v(v)$ i fer el canvi de variables

$$K = \frac{1}{2} m v^2, \quad dK = m v dv,$$

$$dP = \rho_v(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{m v^2}{2}} v^2 dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta m)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta K} \sqrt{\frac{2K}{m}} m^{-1} dK.$$

Per tant,

$$\boxed{dP = \rho_K(K) dK = 2 \sqrt{\frac{K}{\pi}} (\beta)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta K} dK.}$$

En aquest cas també podríem determinar

$$K_{\text{màx}} = k_B T / 2,$$

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

Aquest resultat correspon, de fet, al teorema d'equipartició de l'energia.

1.2. Partícules i caixes. Volem posar aleatòriament n partícules en $N > n$ caixes. Calculeu la probabilitat que hi hagi una partícula, com a molt, en cada caixa. Considereu els tres casos següents:

- (a) Les partícules són distingibles i no hi ha cap restricció en el nombre de partícules que pot haver-hi en una mateixa caixa (estadística clàssica).
- (b) Les partícules són idèntiques (no es poden distingir) i no hi ha cap restricció en el nombre de partícules que pot haver-hi en una mateixa caixa (estadística de Bose-Einstein).
- (c) Les partícules són idèntiques (no es poden distingir) i cada caixa no pot contenir més d'una partícula (estadística de Fermi-Dirac).

Solució

Aquest és un problema de repàs de combinatòria. Des d'un punt de vista físic, podem pensar que les caixes són els estats (monoparticulars) que pot ocupar cada partícula. Les diferents restriccions que s'analitzen en els tres casos corresponen al cas (a) de partícules

distingibles (podeu imaginar que cadascuna porta una lletra: A, B, C...), (b) de partícules indistingibles bosòniques i (c) de partícules indistingibles fermiòniques (que tenen una restricció que impedeix la possibilitat que dues partícules idèntiques estiguin en el mateix estat).

- (a) En els tres casos, per determinar la probabilitat, ens cal determinar primer el nombre de casos possibles i després el nombre de casos favorables, en els quals cap caixa té més d'una partícula.

El nombre de casos possibles es calcula comptant de quantes maneres podem posar n partícules en N caixes. Per a cada partícula podem escollir a quina de les N caixes la posem. Per a la primera partícula tenim N opcions, per a la segona N opcions, etc. Per tant, les opcions totals són

$$C_{\text{possibles}} = N \times N \times N \times \cdots \times N = N^n.$$

També podeu arribar a la mateixa conclusió amb un raonament en el marc de la combinatòria: de les N caixes, hem d'escollir un subconjunt de n per posar-hi les n partícules, tenint en compte que s'hi val escollir una mateixa caixa diverses vegades. Per tant, es tracta de comptar variacions amb repetició de N elements agafats en grups de n .

$$C_{\text{possibles}} = VR_N^n = N^n.$$

Per determinar el nombre de casos favorables, de totes aquestes opcions cal comptar en quantes només hi ha una partícula per caixa. Per fer aquest recompte només cal pensar que quan posem una partícula en una caixa, tanquem la caixa i ja no la podem considerar més per posar-hi les partícules següents. Per tant, per a la primera partícula tenim N opcions, per a la segona $N - 1$ opcions, etc.

$$C_{\text{favorables}} = N \times (N - 1) \times (N - 2) \cdots (N - n + 1) = \frac{N!}{(N - n)!}.$$

Fixeu-vos que l'últim terme correspon al nombre de caixes que ens queden quan ja hem col·locat $n - 1$ partícules i hem de decidir on col·loquem l'última. Aquest segon recompte també el podem entendre en el marc de la combinatòria pensant que hem d'escollir n caixes d'un conjunt de N possibles sense repetir-ne cap. És a dir,

$$C_{\text{favorables}} = V_N^n = \frac{N!}{(N - n)!}.$$

Per tant, ara ja podem avaluar la probabilitat que no hi hagi cap caixa amb més d'una partícula:

$$P_{\text{clàssica}} = \frac{C_{\text{favorables}}}{C_{\text{possibles}}} = \frac{N!}{N^n (N - n)!}.$$

Aquest tipus de recompte que suposa que les partícules són distingibles s'anomena estadística clàssica.

- (b) Ara cal refer els càlculs anteriors, però considerant que les partícules són indistingibles. Evidentment, el nombre de casos possibles (i de casos favorables) ha de ser molt menor, perquè molts dels N^n casos que hem determinat en l'apartat anterior esdevenen equivalents quan les partícules són indistingibles. Una manera de comptar els casos possibles és pensar que hem d'ordenar una seqüència de n partícules ($\bigcirc$) idèntiques i $N - 1$ parets ($|$) que les separen en N caixes. Esquemàticament seria

$$\bigcirc\bigcirc|\bigcirc||\bigcirc\bigcirc\bigcirc|\cdots\bigcirc\bigcirc\bigcirc|$$

Noteu que dues parets seguides signifiquen una caixa buida. Volem comptar de quantes maneres podem fer aquesta distribució. Tenim en total $n + N - 1$ elements (parets i boles), dels quals n són d'un tipus i $N - 1$ són d'un altre. El nombre possible d'ordenacions serà una permutació de $n + N - 1$ elements, en què n són d'un tipus i $N - 1$ són d'un altre:

$$C_{\text{possibles}} = \frac{(n + N - 1)!}{n!(N - 1)!}.$$

En combinatòria, aquest nombre s'anomena combinació amb repetició de N elements agafats en grups de n .

$$C_{\text{possibles}} = CR_N^n = \binom{n + N - 1}{N - 1} = \binom{n + N - 1}{n} = \frac{(n + N - 1)!}{n!(N - 1)!}.$$

Els parèntesis corresponen als anomenats coeficients binomials.

El recompte de casos favorables cal també corregir-lo perquè les partícules són indistingibles. Abans hem calculat $C_{\text{favorables}} = N!/(N - n)!$. Considerem un exemple per entendre com hem de corregir aquest càlcul. Suposem cinc caixes (1, 2, 3, 4, 5) i tres partícules (A, B, C) i pensem en un dels estats en què com a màxim hi ha una partícula per caixa. Per exemple, una partícula a la caixa 1, una altra a la caixa 3 i una altra a la caixa 4. Amb partícules distingibles, això ho podem fer de diverses maneres, com indiquem a la taula:

1	2	3	4	5
A		B	C	
A		C	B	
B		A	C	
B		C	B	
C		A	B	
C		B	A	

En total ho podem fer de $3! = 6$ maneres diferents. Evidentment, tots aquests estats seran el mateix quan les partícules siguin indistingibles. Si tenim n partícules, quan fem el càlcul clàssic estem comptant $n!$ vegades cada estat. Cal, doncs, dividir per $n!$ per corregir el càlcul que hem fet amb partícules distingibles. Per tant,

$$C_{\text{favorables}} = \frac{N!}{(N-n)!n!}.$$

En combinatòria, aquest nombre és el nombre de combinacions de N elements agafats en grups de n sense repetició:

$$C_{\text{favorables}} = C_N^n = \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!}.$$

I així, doncs, la probabilitat serà

$$P_{BE} = \frac{\frac{N!}{(N-n)!n!}}{\frac{n!(N-1)!}{(n+N-1)!}} = \frac{N!(N-1)!}{(N-n)!(n+N-1)!}.$$

Aquest tipus d'estadística s'anomena estadística de Bose-Einstein (B-E) i les partícules idèntiques que segueixen aquesta estadística s'anomenen bosons.

- (c) En aquest últim cas, és fàcil adonar-se que el nombre de casos favorables és el mateix que en el recompte anterior però amb partícules fermiòniques,

$$C_{\text{favorables}} = \frac{N!}{(N-n)!n!}.$$

El que passa és que ara el nombre de casos possibles és igual al nombre de casos favorables, ja que els estats amb més d'una partícula per caixa no estan permesos per les regles d'aquesta estadística, que s'anomena estadística de Fermi-Dirac. Per tant,

$$P_{FD} = \frac{C_{\text{favorables}}}{C_{\text{possibles}}} = 1.$$

És interessant adonar-se que

$$1 = P_{FD} > P_{\text{clàssica}} > P_{BE}.$$

La primera desigualtat és trivial. La segona es pot verificar comprovant que

$$N^n < \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!},$$

ja que

$$NN \cdots NN < (N+n-1)(N+n-2)(N+n-3) \cdots (N+1)N.$$

(Noteu que hi ha n termes als dos costats de la desigualtat i que tots els termes de la dreta són iguals o superiors als de l'esquerra.)

La conclusió física del problema és que les partícules que segueixen l'estadística B-E tenen, de manera efectiva, una atracció que tendeix a fer-les agrupar en els mateixos nivells energètics, quan les comparem amb les partícules clàssiques. (La probabilitat que cap caixa tingui dues partícules és menor per a bosons que per a partícules clàssiques).