

ESTADÍSTICA: PROBLEMES I MÉS PROBLEMES

Olga Julià
David Márquez-Carrera
Carles Rovira

Departament de Matemàtiques
i Informàtica



ESTADÍSTICA: PROBLEMES I MÉS PROBLEMES

Olga Julià
David Márquez-Carreras
Carles Rovira

Departament de Matemàtiques
i Informàtica

431

TEXTOS DOCENTS



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Edicions

Índex

1. INTRODUCCIÓ	7
2. MODELS ESTADÍSTICS	9
2.1. Resum teòric	9
2.1.1. Models estadístics	9
2.1.2. Estadístics	10
2.1.3. Informació	12
2.2. Problemes resolta	15
2.3. Problemes amb indicacions	29
2.3.1. Indicacions	30
3. ESTIMACIÓ PUNTUAL	35
3.1. Resum teòric	35
3.1.1. Estimadors sense biaix	36
3.1.2. Estimadors uniformement de mínima variància	37
3.1.3. Cota de Cramer-Rao i eficiència	38
3.1.4. Propietats asimptòtiques dels estimadors	39
3.1.5. Mètodes d'estimació puntual	41
3.2. Problemes resolta	44
3.3. Problemes amb indicacions	86
3.3.1. Indicacions	91
4. INTERVALS DE CONFIANÇA	105
4.1. Resum teòric	105
4.1.1. Mètode del pivot	105
4.1.2. Teorema de Fisher	106
4.1.3. Interval de confiança per a una mostra en poblacions normals	107
4.1.4. Interval de confiança per a dues mostres independents en poblacions normals	109
4.1.5. Interval de confiança asimptòtics	111
4.1.6. Interval de confiança utilitzant la desigualtat de Tchebixev	112
4.1.7. Mètode basat en la funció de distribució	112
4.2. Problemes resolta	113

4.3. Problemes amb indicacions	128
4.3.1. Indicacions	129
5. TEST D'HIPÒTESI	135
5.1. Resum teòric	135
5.1.1. Definicions i notacions bàsiques	135
5.1.2. Teorema de Neyman-Pearson	138
5.1.3. Test de la raó de versemblança	140
5.1.4. Test de la raó de versemblança i normalitat	142
5.2. Problemes resolts	145
5.3. Problemes amb indicacions	184
5.3.1. Indicacions	187
6. ESTADÍSTICA NO PARAMÈTRICA	195
6.1. Resum teòric	195
6.1.1. Tests d'ajustament	195
6.1.2. Tests d'homogeneïtat	199
6.1.3. Tests d'independència	201
6.1.4. Tests d'aleatorietat	203
6.1.5. Tests de localització o posició	205
6.2. Problemes resolts	209
6.3. Problemes amb indicacions	227
6.3.1. Indicacions	229
7. MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE	237
7.1. Resum teòric	237
7.1.1. Estimació dels coeficients del model lineal	237
7.1.2. Mètode dels mínims quadrats	238
7.1.3. Model normal de regressió simple	241
7.1.4. Residus	243
7.2. Problemes resolts	244
7.3. Problemes amb indicacions	257
7.3.1. Indicacions	259
8. APÈNDIX	265
8.1. Lleis de variables aleatòries més usuals	265
8.2. Llista de símbols	267
BIBLIOGRAFIA	269

INTRODUCCIÓ

L'estadística és possiblement una de les àrees de la matemàtica més utilitzades des de la segona meitat del segle XX. Les seves aplicacions són molt diverses i en camps de gran actualitat com les finances, l'enginyeria, la biologia o la medicina. Per tant, l'estadística ha esdevingut una de les àrees més rellevants de la matemàtica i una part fonamental del seu estudi, com també d'altres àrees com ara la informàtica o les enginyeries superiors.

L'objectiu d'aquest llibre és augmentar l'escassa oferta que hi ha dins el món editorial en el camp de l'estadística matemàtica pel que fa a la part pràctica de fer problemes. Els estudiants universitaris que cursen assignatures que tracten l'estadística a un nivell elemental poden trobar fàcilment un bon grapat de llibres per consultar, tant teòrics com pràctics. En canvi, quan una assignatura no té aquest caràcter tan bàsic, l'estudiant no disposa d'aquesta oferta: malgrat que pot trobar força llibres de consulta teòrics, hi ha una manca bastant gran de referències dedicades a la resolució de problemes. El llibre que teniu a les mans vol ajudar a solucionar aquesta mancança.

Aquest és, per tant, un llibre de problemes resolts d'estadística destinat a estudiants d'un primer cicle dels graus de matemàtiques, estadística o enginyeria.

El llibre tracta els temes fonamentals de l'estadística clàssica, com ara els models estadístics, la inferència estadística i el model lineal. Cadascun d'aquests capítols consta de tres parts ben diferenciades. A la primera, per tal d'ajudar a comprendre els problemes i facilitar la feina dels lectors, hem inclòs un resum dels aspectes teòrics més destacats associats al tema, obviant les demostracions dels resultats enunciats. Si el lector està interessat en un estudi més exhaustiu d'aquests aspectes teòrics o en la demostració dels resultats presentats, li recomanem la consulta d'algun dels llibres citats a la bibliografia. Aquesta part teòrica està extreta, en gran part, del llibre escrit per dos dels autors d'*Un primer curs d'estadística* [3]. A la segona part del capítol es plantegen entre vint-i-cinc i trenta-cinc problemes i se'n dona la resolució detallada, fent tots els passos per comprendre'ls.

Finalment, en l'última secció es proposen els enunciats de deu a vint problemes i després es donen unes indicacions per solucionar-los.

Voldríem destacar la diferència entre els problemes resolts i els indicats. L'explicació dels problemes resolts està pensada per ensenyar com s'han d'aplicar les diverses tècniques del càlcul de probabilitats, intentant presentar el raonament abstracte i lògic que és necessari per resoldre qual-sevol problema matemàtic. Estarem particularment contents, a més, si el lector hi troba també el plus d'intuïció o imaginació que cal per posar-se davant d'un problema matemàtic i que hem intentat reflectir a la nostra presentació. Els problemes indicats estan menys desenvolupats i es proposen més aviat com un complement per tal que l'alumne pugui practicar i comprovar el seu nivell.

Principalment, els problemes presentats en aquest llibre provenen del nombrós material docent (problemes de classe i d'exàmens) corresponent a l'assignatura d'Estadística del grau o la llicenciatura de Matemàtiques de la UB, acumulat durant anys i al llarg de diferents plans d'estudis pels autors en l'exercici de la seva activitat docent. Per tant, encara que, com hem comentat abans, aquest llibre pot ser un bon material d'estudi per a alumnes de diferents graus, té un nivell totalment adequat per als alumnes de l'assignatura obligatòria Estadística del grau de Matemàtiques.

Esperem, per tant, que aquest llibre sigui d'utilitat al lector i que l'ajudi en la comprensió de l'estadística.

MODELS ESTADÍSTICS

2.1. Resum teòric

Donat un experiment aleatori, el conjunt al qual pertanyen les observacions l'anomenarem *espai de les observacions* i el denotarem per Ω . Aquest conjunt Ω tindrà associada una família $\mathcal{A}$ de subconjunts de Ω amb estructura de σ -àlgebra. Cada observació $x = (x_1, \dots, x_n)$ l'entendrem com una realització d'una variable aleatòria

$$X = (X_1, \dots, X_n) : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega,$$

amb llei desconeguda però pertanyent a una certa família de probabilitats.

2.1.1. Models estadístics

Definició 2.1.1. Un *model estadístic* és una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, en què $(\Omega, \mathcal{A})$ és un espai mesurable i $\mathcal{P}$ és una família de probabilitats en $(\Omega, \mathcal{A})$.

Definició 2.1.2. Un model estadístic $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ s'anomenarà *paramètric* si podem escriure la família de probabilitats com $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, on Θ és un subconjunt de $\mathbb{R}^d$ amb $d \geq 1$. El conjunt Θ l'anomenem *espai de paràmetres*.

El concepte de funció de versemblança fou introduït per Fisher i, encara que es pot presentar de forma molt general, aquí donarem només la definició per als dos casos més usuals.

Definició 2.1.3. Anomenarem *funció de versemblança* l'aplicació $L : \Omega \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definida diferenciant els dos casos següents:

- En el cas que P_θ sigui una llei discreta

$$L(x; \theta) = P_\theta(\{x\}).$$

- En el cas que P_θ sigui una llei absolutament contínua amb densitat f_θ

$$L(x; \theta) = f_\theta(x).$$

Per a *mostres aleatòries simples de mida n* , és a dir, amb variables aleatòries $X_1, \dots, X_n$ independents i idènticament distribuïdes, per a tot $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, la funció de versemblança és:

$$L(x; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P_\theta(\{x_i\}), & \text{en el cas discret,} \\ \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i), & \text{en el cas absolutament continu.} \end{cases}$$

Definició 2.1.4. Un model estadístic paramètric $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ és *exponencial* si existeixen funcions reals mesurables $\Psi, \Phi_1, \dots, \Phi_r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i funcions reals $D, C_1, \dots, C_r : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, tals que podem expressar la funció de versemblança de la manera següent:

$$L(x; \theta) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^r C_k(\theta) \Phi_k(x) + D(\theta) + \Psi(x) \right\},$$

o de manera equivalent:

$$L(x; \theta) = \tilde{D}(\theta) \tilde{\Psi}(x) \exp \left\{ \sum_{k=1}^r C_k(\theta) \Phi_k(x) \right\},$$

per a $\tilde{D}(\theta), \tilde{\Psi}(x) > 0$. Els $C_k(\theta)$ s'anomenen *paràmetres naturals del model*.

2.1.2. Estadístics

Definició 2.1.5. Anomenarem *estadístic* tota aplicació mesurable

$$T : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)),$$

on $m \geq 1$ és un enter.

Un estadístic és una transformació de les observacions. Aleshores, intuïtivament, un estadístic serà suficient si la coneixença de la mostra no aporta cap informació addicional sobre θ respecte de la que pot aportar l'estadístic. La definició següent concreta aquesta idea intuïtiva.

Definició 2.1.6. Direm que un estadístic $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és *suficient* si la llei del vector X condicionada per l'estadístic T no depèn de θ .

El teorema següent és conegut com el *criteri de factorització de Neyman i Fisher*.

Teorema 2.1.7. Sigui $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un estadístic. Aleshores, T és suficient si, i només si, existeixen dues funcions mesurables $\psi : \mathbb{R}^m \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ i $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que, per a tot $x \in \Omega$ i $\theta \in \Theta$, es compleix

$$L(x; \theta) = \psi(T(x), \theta) h(x).$$

En els models exponencials és senzill trobar un estadístic suficient.

Proposició 2.1.8. Considerem un model estadístic paramètric $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$, en què la funció de versemblança pot expressar-se com

$$L(x; \theta) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^r C_k(\theta) \Phi_k(x) + D(\theta) + \Psi(x) \right\},$$

on $D, C_1, \dots, C_r$ són funcions reals, i $\Psi, \Phi_1, \dots, \Phi_r$ funcions mesurables. Aleshores, l'estadístic

$$T = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_r(x))$$

és suficient.

També podem comprovar sense gaires dificultats els resultats següents.

Corol·lari 2.1.9. Si $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és un estadístic suficient i $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és una funció mesurable i bijectiva, aleshores $\varphi(T)$ també és suficient.

Corol·lari 2.1.10. Si $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és un estadístic suficient i existeix H mesurable tal que $T = H(S)$, on S és un altre estadístic, aleshores S també és suficient.

Un altre concepte important és el d'estadístic complet.

Definició 2.1.11. Direm que un estadístic S és *complet* si per a tota funció $f : g(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, tal que $f(S)$ és integrable, es compleix

$$\mathbf{E}_\theta[f(S)] = 0, \forall \theta \in \Theta \implies P_\theta(f(S) = 0) = 1, \forall \theta \in \Theta.$$

2.1.3. Informació

Per introduir el concepte d'informació associada a un model és útil definir una variable aleatòria denominada *score*

$$\text{sc}(\theta) = \partial_\theta \ln L(x; \theta),$$

de la qual s'estudia la variabilitat per mitjà de la variància.

Definició 2.1.12. Direm que el model estadístic és *regular* i el denotarem per (R) si compleix

- (R₁) El subconjunt $\{x \in \Omega; L(x; \theta) > 0\} \subseteq \Omega$ no depèn de θ .
- (R₂) Existeixen les derivades $\partial_\theta \ln L(x; \theta)$, $\partial_\theta^2 \ln L(x; \theta)$ i, per a cada $\tilde{\theta} \in \Theta$, existeix també una funció positiva $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ amb $\sum_{x \in \Omega} h(x) < +\infty$ o $\int_\Omega h(x) dx < +\infty$, segons el cardinal de Ω , tal que per a tot θ en un entorn de $\tilde{\theta}$

$$|\partial_\theta L(x; \theta)| \vee |\partial_\theta^2 L(x; \theta)| \leq h(x).$$

- (R₃) Per a tot $\theta \in \Theta$

$$0 < \mathbf{E}_\theta \left(\left| \partial_\theta \ln L(x; \theta) \right|^2 \right) < +\infty.$$

Definició 2.1.13. En un model estadístic paramètric regular (R), la *informació de Fisher* és la funció del paràmetre següent:

$$I_F(\theta) := \mathbf{E}_\theta \left(\left| \partial_\theta \ln L(x; \theta) \right|^2 \right) = \mathbf{E}_\theta (\text{sc}(\theta)^2).$$

Proposició 2.1.14. La informació de Fisher val zero si, i només si, l'*score* és idènticament nul per a tot $\theta \in \Theta$, és a dir, si, i només si, la versemblança no depèn del paràmetre.

Proposició 2.1.15. En un model estadístic paramètric regular (R) es compleix

$$\mathbf{E}_\theta(\partial_\theta \ln L(x; \theta)) = 0.$$

A causa d'aquesta proposició, és immediat el resultat següent.

Corol·lari 2.1.16. En un model estadístic paramètric regular (R) tenim que

$$I_F(\theta) = \text{Var}_\theta(\partial_\theta \ln L(x; \theta)) = \text{Var}_\theta(\text{sc}(\theta)).$$

Corol·lari 2.1.17. Assumint (R) es compleix

$$I_F(\theta) = -\mathbf{E}_\theta(\partial_\theta^2 \ln L(x; \theta)).$$

A continuació veurem la propietat d'additivitat de la informació de Fisher. Considerem una família de probabilitats $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ sobre un subconjunt Ω de la recta real i assumim que $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ és un model regular amb informació de Fisher $I_{F,1}$. Sigui $X_1, \dots, X_n$ una mostra aleatòria simple de mida n de la família $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. El model estadístic $(\Omega^n, \mathcal{B}(\Omega^n), \{P_\theta^n, \theta \in \Theta\})$ associat a la mostra $X_1, \dots, X_n$ també és regular i, a causa de la independència, té per funció de versemblança

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n L(x_i, \theta).$$

i

$$I_{F,n}(\theta) = n I_{F,1}(\theta).$$

El resultat següent ens permet d'assegurar la regularitat dels models exponencials que compleixen certes condicions.

Proposició 2.1.18. Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ un model estadístic uniparamètric exponencial amb funció de versemblança

$$L(x; \theta) = \exp \{C(\theta)\Phi(x) + D(\theta) + \Psi(x)\}.$$

Si es compleix que Θ és un interval de $\mathbb{R}$, que C i D són dues funcions dues vegades contínuament diferenciables amb $C'(\theta) \neq 0$ per a tot θ i Φ és una funció tal que, per a tot $\theta \in \Theta$, $\mathbf{E}_\theta(\Phi(x)^2) < +\infty$, aleshores el model és regular.

Per tenir una visió més completa introduïrem el concepte de la informació de Kullback. Kullback va proposar emprar la mitjana del poder discriminant com a mesura de la informació.

Definició 2.1.19. Per a $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, la informació de Kullback de θ_1 contra θ_2 es defineix per

$$I_K(\theta_1|\theta_2) := \mathbf{E}_{\theta_1} \left[\ln \frac{L(x; \theta_1)}{L(x; \theta_2)} \right] = \mathbf{E}_{\theta_1} [\ln L(x; \theta_1)] - \mathbf{E}_{\theta_1} [\ln L(x; \theta_2)].$$

Aquesta informació mesura de manera global la diferència entre la funció de versemblança avaluada en θ_1 i θ_2 i, com a conseqüència del fet que la funció logaritme és còncava, es pot comprovar que la informació de Kullback sempre existeix.

Proposició 2.1.20. La informació de Kullback sempre és positiva.

Proposició 2.1.21. La informació de Kullback és zero si, i només si, les dues probabilitats coincideixen, és a dir:

$$I_K(\theta_1|\theta_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{A}, P_{\theta_1}(A) = P_{\theta_2}(A).$$

Per tant, observeu que:

- La informació de Kullback no és simètrica respecte de θ_1 i θ_2 .
- La informació de Kullback també té la propietat additiva.

Acabarem aquest apartat donant un resultat que ens relaciona les dues informacions.

Proposició 2.1.22. Assumim que es compleixen les condicions de regularitat (R). Suposem que $I_K(\theta_1|\theta)$ és dues vegades diferenciable respecte a θ i que es donen les condicions per poder commutar la derivada i la integral o el sumatori. Aleshores:

$$I_F(\theta_1) = \partial_\theta^2 I_K(\theta_1|\theta)|_{\theta=\theta_1}.$$

2.2. Problemes resolts

1. Considerem una mostra $X_1, \dots, X_n$ d'una llei amb densitat

$$f(x) = \frac{1-\theta^2}{2} \exp(\theta x - |x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

on $\theta \in (-1, 1)$.

- (a) Descriviu el model estadístic associat a aquestes observacions i doneu-ne la funció de versemblança.
 (b) Demostreu que és un model regular.
 (c) Trobeu la informació de Fisher del model.

Solució

- (a) El model estadístic associat a n observacions és $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{P_\theta^n, \theta \in (-1, 1)\})$, on P_θ^n correspon a una probabilitat amb funció de versemblança

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \left(\frac{1-\theta^2}{2} \right)^n \exp\left(\theta \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n |x_i| \right).$$

- (b) Per determinar que és regular hem de veure que podem escriure la funció de versemblança com

$$L(x; \theta) = \exp \{ C(\theta) \Phi(x) + D(\theta) + \Psi(x) \},$$

on Θ és un interval de $\mathbb{R}$, C i D són dues funcions dues vegades contínuament diferenciables amb $C'(\theta) \neq 0$ per a tot θ i Φ és una funció tal que, per a tot $\theta \in \Theta$, $E_\theta(\Phi(x)^2) < +\infty$. Podem escriure

$$L(x; \theta) = \exp \left(\theta \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n |x_i| + n \ln \left(\frac{1-\theta^2}{2} \right) \right),$$

de manera que agafem $c(\theta) = \theta$, $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, $\Psi(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ i $D(\theta) = n \ln \left(\frac{1-\theta^2}{2} \right)$. Clarament, $\Theta = (-1, 1)$ és un interval de $\mathbb{R}$, i C i D són dues funcions dues vegades contínuament diferenciables amb $C'(\theta) = 1 \neq 0$ per a tot θ . Per acabar, ens cal veure que per a

tot $\theta \in (-1, 1)$, $\mathbf{E}_\theta \left(\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right) < +\infty$. En tenim prou comprovant que $\mathbf{E}_\theta (X_1^2) < +\infty$. Fem-ho:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta (X_1^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1-\theta^2}{2} \exp(\theta x - |x|) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x^2 \frac{1-\theta^2}{2} \exp((\theta+1)x) dx + \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1-\theta^2}{2} \exp((\theta-1)x) dx \\ &= \frac{1-\theta^2}{2} \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-(\theta+1)x) dx + \frac{1-\theta^2}{2} \Gamma(3)(1-\theta)^{-3} < \infty. \end{aligned}$$

(c) A l'apartat anterior hem vist la regularitat de manera que podem buscar la informació de Fisher. A la majoria dels problemes no demostrarem la regularitat i suposarem que és certa. Calculem

$$\begin{aligned} \ln L(x; \theta) &= \theta \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n |x_i| + n \ln \left(\frac{1-\theta^2}{2} \right) \\ \frac{\partial \ln L(x; \theta)}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n x_i - \frac{2n\theta}{1-\theta^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L(x; \theta)}{\partial \theta^2} &= -\frac{2n(1+\theta^2)}{(1-\theta^2)^2}. \end{aligned}$$

I així

$$I_F(\theta) = \frac{2n(1+\theta^2)}{(1-\theta^2)^2}.$$

- El temps d'emissió de la primera partícula d'una font radioactiva segueix una llei $\text{Exp}(\lambda)$ amb $\lambda > 0$. A la pràctica només es pot observar el temps d'emissió quan aquest està en $[0, T]$, on T és conegut. Calculeu la probabilitat que la partícula sigui emesa en un temps inferior o igual a t , sabent que ha estat emesa en $[0, T]$. Siguin $z_1, \dots, z_n$, n observacions del fenomen descrit anteriorment. Descriviu el model estadístic associat a aquestes observacions. Doneu la funció de versemblança i trobeu la informació de Fisher del model.

Solució: Sigui X una variable aleatòria exponencial. Aleshores, tenim que

$$P(X \leq t | X \in [0, T]) = \frac{P(X \leq t)}{P(X \in [0, T])} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda T}}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Per tant, si considerem la variable Z que ens dona el temps observat, tenim que la seva funció de distribució és $\forall t \in [0, T]$:

$$F(t) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda T}}$$

i tindrà una densitat

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \lambda e^{-\lambda z} \mathbb{1}_{[0, T]}(z),$$

i el model estadístic associat a n observacions és $([0, T]^n, \mathcal{B}([0, T]^n), \{P_\lambda^n, \lambda \geq 0\})$, on P_λ^n correspon a una probabilitat amb funció de versemblança

$$L(z_1, \dots, z_n; \lambda) = \frac{1}{(1 - e^{-\lambda T})^n} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n z_i}.$$

Per obtenir la informació de Fisher observem primer que es tracta d'un model regular i podem calcular, usant la notació $z = (z_1, \dots, z_n)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(z; \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{-n}{1 - e^{-\lambda T}} e^{-\lambda T} T + \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n z_i, \\ \frac{\partial^2 \ln L(z; \lambda)}{\partial \lambda^2} &= -nT \frac{(-T e^{-\lambda T} (1 - e^{-\lambda T}) - T e^{-\lambda T} e^{-\lambda T})}{(1 - e^{-\lambda T})^2} - \frac{n}{\lambda^2} \\ &= nT^2 \frac{e^{-\lambda T}}{(1 - e^{-\lambda T})^2} - \frac{n}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

I, per tant,

$$I_F(\lambda) = -\mathbf{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L(Z; \lambda)}{\partial \lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda^2} - nT^2 \frac{e^{-\lambda T}}{(1 - e^{-\lambda T})^2}.$$

3. Considerem una mostra $X_1, \dots, X_n$ d'una llei de Pareto amb paràmetres (k, c) . Es tracta d'una llei absolutament contínua amb funció de distribució de probabilitat