

noubiaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Juny 2020



sumari

Consell de redacció:
Lluís Mora / Marianna Bosch (coords.)
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Josep Pla
Romà Pujol
Manuel Udina

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM),
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat
noubiaix@gmail.com
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
*La negra no és la moda però
és la que et farà guanyar*
Hugo Bellmunt del Pozo

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
comercial.edicions@ub.edu
www.edicions.ub.edu



1 Editorial

articles

6 Entrevista a Claudi Alsina
Anton Aubanell

11 Idees per ensenyar i aprendre matemàtiques
Lluís Mora

21 Targetes negabinàries
Sergio Belmonte

seccions

28 Grup Cúbic
Un homenatge a Lluís Antoni Santaló
des d'una perspectiva didàctica

32 El racó del CESIRE-CREAMAT
El CESIRE-CREAMAT, laboratori de matemàtics

37 GeoGebra
Estimació de l'àrea sota una corba
en el càlcul de Pi. Introduint el GeoGebra
al laboratori de matemàtiques
Guillem Bonet Carbó
Manel Martínez Pascual

48 El racó del MMACA
Jocs de simetria arreu
Enric Brasó Campderrós
Carlos Luna-Mota

«Un dels propòsits principals de les matemàtiques, quan s'ensenyen bé, és despertar a l'estudiant la creença en la raó, la seva confiança en la veritat del que s'ha demostrat i en el valor de la demostració.»

Bertrand Russell

En el moment d'escriure aquest editorial fa més de quaranta dies que estem en situació de confinament a causa de la COVID-19. Aquesta malaltia ha fet que el creixement exponencial, la lectura de gràfics en escales logarítmiques o les taxes de creixement o disminució, hagin estat en boca de tothom.

En l'àmbit educatiu aquesta situació ha tingut un impacte enorme: en el temps de confinament les sessions presencials s'han substituït per sessions telemàtiques d'un dia a l'altre. Ha aparegut un aprenentatge a distància de resistència, lluny del que els estàndards demanen a aquest tipus d'ensenyament. En qualsevol cas, cal felicitar els docents en general per l'enorme esforç i treball que han fet per tal que els nostres estudiants mantinguessin el contacte amb l'aprenentatge en general i amb l'aprenentatge de les matemàtiques en particular. Durant aquest tercer trimestre també hem vist aflorar la conversió dels cursos de formació presencials en telemàtics. De cara al mes de juny ja s'observen molts d'aquests cursos de formació de docents que utilitzen suport virtual, ja sigui a partir de teleconferències, ja sigui a partir de càpsules de treball en entorns virtuals tipus Moodle. Sembla que el virus està provocant un canvi en moltes de les nostres maneres de fer. Caldrà veure si aquests canvis es mantenen o no en un futur proper.

Pot ajudar a dotar aquest canvi d'un alt grau de permanència el fet que amb vista al curs 2020-2021 es parla de compaginar l'ensenyament presencial amb l'ensenyament a distància. Això pot portar a consolidar aquests tipus de tasques de formació i, per tant, caldrà demanar a qui correspongui, administració o associacions de docents, un esforç especial a fer arribar bons recursos formatius digitals als docents de tots els nivells educatius.

Val a dir també que no partim de zero. Tenim l'Aplicació de Recursos al Currículum (ARC), repositori digital que va sorgir quan es va posar en marxa el projecte eduCAT1X1, o totes les aportacions que va rebre el congrés C2EM, Congrés Català d'Educació Matemàtica, el 2016 i que es poden trobar en format digital en el web de la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT), o totes les activitats relacionades amb les proves Cangur, o els materials que proporciona el Museu de Matemàtiques de Catalunya

(MMACA). De recursos disponibles en tenim molts, ara només cal que els posem en marxa, cal mobilitzar-se!

Pel que fa a aquest número editat durant el confinament, mostra el menú següent per acompanyar-vos en unes hores de lectura. D'entrada trobareu les seccions habituals en els números parells de la revista.

La secció del Grup Cúbic ens parla de l'homenatge que aquest grup va fer al matemàtic català Lluís Antoni Santaló en la seva 3a Jornada de Didàctica de les Matemàtiques de la UB. En el seu article ens mostren les activitats que es van fer en aquesta jornada en la qual van participar força docents. Podeu trobar més informació sobre aquesta i les altres jornades que han fet, en el seu espai web www.ub.edu/cubic/.

Els membres del CESIRE CREAMAT, a partir d'un paràgraf d'un altre matemàtic català també preocupat per la didàctica, Pere Puig Adam, ens parlen d'una acció que estan desenvolupant per tal de potenciar els laboratoris de matemàtiques en els centres escolars, tant de primària com de secundària. Ens mostren els materials que han preparat i la campanya d'activitats que han endegat per tal d'ajudar els docents en el desenvolupament d'aquests espais, físics o de treball.

En l'espai dedicat al Geogebra es fa també una connexió amb el laboratori de matemàtiques mostrant com es pot introduir aquesta eina digital per fer una estimació de l'àrea que hi ha sota una corba. Això exemplifica que el Geogebra és un excel·lent aliat per tal de complementar una investigació matemàtica. Acompanya l'article una excel·lent proposta de treball d'exploració que integra aquesta eina en el treball habitual a l'aula de matemàtiques.

En la darrera secció, que no per això és la menys important, el MMACA ens mostra una família de trencaclosques que ha aparegut recentment: els jocs de simetria. A continuació es determinen quins d'aquests trencaclosques són més interessants en diferents contextos i es proposen diverses modificacions i activitats per aprofitar al màxim aquest recurs a casa, al Museu i a l'aula.

Pel que fa als articles i les entrevistes, en aquest número en presentem tres. Podreu llegir una entrevista —una conversa, podríem dir-ne— entre Anton Aubanell i Claudi Alsina en la qual fan un recorregut per la tasca que ha desenvolupat al llarg de la seva vida Claudi Alsina al voltant de les matemàtiques i del seu ensenyament. El punt de partida és el premi Gonzalo Sánchez Vázquez que van rebre Claudi Alsina i Carme Burgués, la seva esposa, a les 19 Jornades sobre l'Aprenentatge i l'Ensenyament de les Matemàtiques (JAEM), que es van celebrar a la Corunya.

El segon dels articles ens presenta algunes idees per ensenyar i aprendre matemàtiques. Lluís Mora, l'autor, ens parla de la importància de l'aprenentatge de les matemàtiques i mostra activitats i propostes sobre com les podem treballar. Aquest document està estructurat a partir de vuit idees que l'autor considera importants per desenvolupar aquesta tasca.

En el darrer article, Sergio Belmonte ens amplia el conegut joc de les targetes màgiques endevinatòries, a partir de les potències de 2, a les targetes negabinàries. En aquestes targetes s'amplien les possibilitats màgiques amb la introducció de nombres negatius, fet

que potencia l'efecte de màgia matemàtica i estimula el sentit numèric dels estudiants de qualsevol nivell educatiu.

I, com ja hem fet altres vegades, volem encoratjar tots els lectors a explicar, per mitjà d'aquesta revista, la vostra revista, les propostes, experiències o idees que considereu interessants per a la comunitat d'ensenyants de matemàtiques del nostre país. Esperem els vostres articles!

articles
articles



articles

Entrevista a Claudi Alsina

Anton Aubanell

Grup Cúbic de Didàctica de la
Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la UB

En el marc de les 19 Jornades sobre l'Aprenentatge i l'Ensenyament de les Matemàtiques (JAEM), que es van celebrar a A Coruña, Claudi Alsina i Carme Burgués, la seva esposa, van rebre el premi Gonzalo Sánchez Vázquez de la Federació Espanyola de Societats de Professors de Matemàtiques (FESPM) per la seva tasca d'impuls de millores en l'educació matemàtica. Aquesta és una bona oportunitat per convidar-lo a evocar records, reflexionar a l'entorn de l'ensenyament de les matemàtiques i projectar mirades de futur.

Amb en Claudi ens coneixem des de fa molts anys, admiro la seva obra matemàtica, didàctica i divulgativa, i tinc el goig de compartir amb ell idees, projectes i aventures diverses. Per això agraeixo a la direcció del *NouBiaix* que m'hagi proposat de fer aquesta entrevista.

Claudi, com recordes els teus primers contactes escolars amb les matemàtiques?

Eren unes matemàtiques rutinàries. Recordo encara el primer que vaig aprendre de memòria: «La unidad es una sola cosa». Francament millorable. Ningú no entenia res, però repetíem les coses com si fóssim lloros. Quina pèrdua de temps amb tanta aritmètica!

Ha canviat molt des de llavors l'educació matemàtica a les escoles?

Afortunadament! Avui tenim moltes escoles obertes a la innovació i professorat molt actiu, ben preparat i amb marxa. Però també segueixen existint centres conservadors i professorat tancat a la renovació. Una tasca important serà entre tots deixar de banda les coses obsoletes en matemàtiques i deixar d'explicar per passar a guiar un aprenentatge interessant i actiu per als alumnes. Afortunadament, a Catalunya l'enfocament competencial actual ha estat un encert.

Vas estudiar la llicenciatura a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona al començament dels anys setanta del segle passat. Quins records guardes d'aquella etapa?

La meua etapa universitària (1969-1974) va ser complexa per la situació política que es vivia. Jo era jove i recordo que la vida universitària em va agradar i la meua vocació per les matemàtiques es va confirmar, malgrat que molt professorat de la Facultat tenia molt pocs dots didàctics. Però això també em va influir en la creença que calia ensenyar millor i que valia la pena fer-ho.

La teua formació universitària es va produir en un període en què el moviment *bourbakià*, amb el seu formalisme rigorós i la seva renúncia explícita als aspectes més intuïtius de la matemàtica, impregnava tots els programes i recobria les idees amb un embolcall formal no sempre fàcil de travessar. Com ho vas viure?

Va ser lamentable! Del moviment *bourbakià* diria que l'oblit ha de ser el seu lloc a la història. Es va confondre la *construcció* formal de la matemàtica amb la construcció del seu aprenentatge. Encara avui trobo gent d'aquella època que ens demana explicacions d'aquell període.

Aquesta tendència en l'enfocament de la matemàtica va tenir un reflex escolar en el que es va anomenar *matemàtica moderna*, que va comportar que les pissarres s'emplenessin de diagrames de Venn, de relacions i aplicacions, de propietats i estructures..., i quedessin arraconades la geometria elemental, la intuïció espacial i els aspectes manipulables, per exemple. Què va significar això per a la formació matemàtica bàsica? Què n'ha quedat a la nostra cultura col·lectiva?

Va ser un error immens implementar la matemàtica moderna a l'educació. El que cites de geometria, treball de l'espai i ús de materials manipulables, va ser precisament el que a mi em va motivar més a considerar. Encara avui hem de lluitar perquè aquestes fites impregnin les nostres classes: visca Euclides!

Et vas incorporar molt aviat a les activitats de l'Associació Rosa Sensat formant part del grup Periòdica Pura. Aquest pas és clau per entendre una part important de la teua trajectòria. Què et va impulsar a apropar-te a l'educació matemàtica bàsica?

Sempre m'ha interessat l'educació matemàtica en tots els nivells educatius. A Rosa Sensat, primer vaig estar al grup de l'Adolf Almató; després, a Periòdica Pura. Hi vaig trobar un gran estímul per compartir noves idees, nous materials i noves metodologies. Ens ho passàvem molt bé ideant canvis i compartint-los a les escoles d'estiu.

Precisament, a Rosa Sensat hi vas conèixer la Carme, la teua esposa. Fa molts anys que formeu un gran equip que ha fet una molt bona feina en educació matemàtica. Què creus que us heu aportat mútuament en aquesta tasca?

Va ser una sort conèixer la Carme aleshores i haver compartit amb ella, i seguir compartint, el nostre amor com a persones i la nostra complicitat com a educadors. Una doble passió! És engrescador poder discutir sempre de temes didàctics que ens interessin!

Vas fer estudis a la Universitat de Massachusetts i, a través d'estades, conferències i congressos, vas col·laborar amb matemàtics de primer nivell tot fent aportacions en diversos camps, com ara les equacions funcionals, les desigualtats, la lògica borrosa o els espais mètrics probabilístics. Què va significar per a tu aquesta etapa de treball matemàtic en un context internacional?

Va ser molt engrescador tenir la sort de treballar o aprendre de Berthold Schweizer, Abe Slar, Karl Menger, Janos Aczél, Marshall Stone..., gent generosa i de primer nivell.

És curiós que la vàlua sigui proporcional a la generositat. Vam col·laborar amb alguns d'ells molts anys, compartint recerques i escrivint. Els Estats Units són un gran país. Avui segueixo col·laborant amb Roger Nelsen, amb qui ja he publicat sis llibres de visualització a AMS/MAA. Ara, descobrir demostracions sense paraules, amb imatges, és una de les meves passions.

Vas conèixer Lluís Antoni Santaló, el gran matemàtic gironí que estava exiliat a l'Argentina, i vau forjar una amistat que va perdurar fins a la seva mort. Com era Santaló de prop?

Santaló era una eminència matemàtica, sens dubte el millor matemàtic català del segle xx, però a la vegada era una persona entranyable i modesta. Tot un exemple. Va ser una llàstima no poder incorporar-lo a Barcelona. Jo li portava notícies de Catalunya i sempre teníem reunions i sopars molt agradables. Va ser una gran amistat. Compartíem, a més, l'interès per la millora de l'educació i la formació del professorat. Dels meus seminaris i conferències a l'Argentina en guardo un record especial i poder visitar Santaló era un complement ideal.

La teva tasca docent s'ha centrat sobretot en l'Escola d'Arquitectura de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), en la qual has estat catedràtic. Anys i anys de treball intens, a classe, fent recerca, contribuint a la renovació dels programes d'estudi, assumint tasques directives... Què destacaries d'aquesta llarga i intensa tasca?

Va ser un honor i un repte formar tants arquitectes en matemàtiques i renovar aquest camp seguint uns canvis que vam iniciar amb l'Enric Trillas. Sovint em trobo amb exalumnes que tenen un bon record de les meves classes i ho celebro. Sempre m'he sentit un membre més integrat a l'Escola d'Arquitectura que no pas a la UPC. I, per cert, allà vaig descobrir Gaudí i la seva geometria, un tema que m'ha apassionat.

Vas dirigir setze tesis doctorals, que abasten des de temes estrictament matemàtics fins a matemàtica aplicada i educació matemàtica. Des del cim de la teva vida professional, com contemples aquesta esplèndida empremta de recerca i, sobretot, de persones amb les quals has treballat?

Van ser anys intensos de recerca. Alguns dels doctorands han seguit fent una gran tasca: Josep M. Fortuny, Vicenç Torra, Maria Santos Tomás..., i Jordi Faulí, que ara acabarà la Sagrada Família.

El teu compromís amb l'educació matemàtica ve de lluny. Fins a quin punt la sensibilitat de la teva mare, Maria Català, en aquest camp i el contacte amb el professor Joan Casulleres hi van influir?

La meva mare va ser sempre una peça clau en la meua vida. El seu amor i el seu suport van ser sempre essencials. Va animar-me a ser professor parlant-me sempre del seu temps de mestra i citant-me el seu admirat Pere Puig Adam, que havia estat professor seu a l'Institut Escola. En Joan Casulleres em va tutoritzar el CAP, com a tu, i d'ell vam aprendre l'immens valor dels materials manipulables. Tu i jo en compartim un gran record.

La teua aportació a l'educació matemàtica és amplíssima. Comprèn des d'obres escrites (per exemple, el recordat *Bon dia mates*) fins a creacions molt innovadores, com les *Estades de Motivació Matemàtica*. Aquestes iniciatives comparteixen la voluntat de contribuir a una renovació metodològica de fons. Quins trets comuns les caracteritzen?

Oferir recursos per innovar en el que fem i en com ho fem. Sense oblidar la meua obsessió per l'educació espacial, per fer tallers i per procurar que els nois i les noies, i també el professorat, gaudeixin de les matemàtiques.

Has treballat àmpliament en formació inicial del professorat de matemàtiques; com a professor de didàctica a la UPC i com a secretari general del Consell Interuniversitari de Catalunya, des d'on vas contribuir molt a la creació del màster de Formació del Professorat. També has fet una gran tasca de formació permanent (fins i tot a l'Argentina). Podries assenyalar dos reptes que creus que hauríem d'afrontar en aquest camp?

En formació inicial, hauria d'existir una formació específica de matemàtiques per a secundària, un 3 + 2, tres anys de grau i dos de màster, amb unes bones pràctiques. En formació permanent, caldria treballar més en la formació dels equips dels centres.

Claudi, formes part del selecte, però malauradament reduït, grup de professors de matemàtiques d'universitat que s'han interessat activament per l'educació matemàtica. Miguel de Guzmán també en formava part. Éreu amics i va treballar plegats en diversos projectes. Com el recordes?

En Miguel era una persona molt interessant, amb una fe cristiana molt viva, un sentit familiar molt gran i una gran vàlua matemàtica i didàctica. Compartíem el nostre entusiasme per la geometria clàssica i per la millora de l'educació, en especial a escala internacional. Molts el recordem molt. Va ser trist que ens deixés tan aviat, quan encara hauria pogut fer moltes coses.

Durant molts anys vas estar implicat en organismes internacionals d'educació matemàtica, un marc idoni per contrastar idees i conèixer noves mirades. Des d'aquesta perspectiva més àmplia, com veus la nostra educació matemàtica?

Durant 12 anys vaig ser el delegat espanyol en la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) i la International Mathematical Union (UMI). Molta feina de franc, però un bon coneixement del que es feia arreu. La nostra educació a partir del vuitè International Congress on Mathematical Education (ICME-8), que es va celebrar a Sevilla, també va emprendre el vol i es va obrir a la col·laboració internacional. Cal seguir en aquest camí!

Vas contribuir a la creació de les primeres associacions de professorat de matemàtiques i de la mateixa FEEMCAT. Avui, a Catalunya, disposem d'una sòlida xarxa d'associacions relacionades amb l'educació matemàtica que porten a terme una tasca esplèndida. Com veus el futur d'aquest associacionisme?

Va ser un encert crear les societats, la FESPM i els grups de la FEEMCAT. Cal recordar la gran tasca que Gonzalo Sánchez i el mateix Miguel de Guzmán van fer a tot Espanya. Aquestes entitats són estris essencials per animar a tot el professorat a treballar en grup i desenvolupar activitats. Calen ànims col·lectius! Avui, les JAEM, els molts concursos que es fan, els nostres congressos catalans d'educació..., són activitats molt engrescadores. Molt futur! Junts podem fer molt.

Has estat, Claudi, el mestre indiscutible de la nostra divulgació matemàtica (llibres, conferències, programes de ràdio, intervencions a la televisió...), amb un estil amè, original, amb un punt d'humor i amb formats nous. Aquí tenim molta feina per fer, però podries assenyalar un parell o tres de tasques que creus que haurien de ser prioritàries?

Crec que la tasca prioritària és fer divulgació social, que, més enllà del professorat, la ciència arribi a grans quantitats de persones. No es tracta tant de divulgar el que s'ha fet en matemàtiques com de transmetre bé el servei que les matemàtiques poden fer a la gent. Partim d'una situació no favorable, d'una visió social de les matemàtiques negativa. Cal trencar això. I de vegades és amb humor que es pot intentar canviar el tema. Les matemàtiques són profundament divertides, però cal fer-ho veure.

Moltes gràcies, Claudi, per les teves respostes i, sobretot, moltes gràcies per tota la teva tasca per ajudar a millorar la nostra educació matemàtica.

.....

Idees per ensenyar i aprendre matemàtiques

Lluís Mora Cañellas

Professor de matemàtiques i formador de docents
lluismora.walipi@gmail.com

Resum

En aquest article parlarem de la importància de l'aprenentatge de les matemàtiques i presentarem una proposta de quines matemàtiques s'han d'aprendre i com podríem treballar-les. I mostrarem algunes idees, vuit, que ens poden ajudar en el procés d'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a l'aula. Començarem situant els motius pels quals cal ensenyar matemàtiques, continuarem amb les matemàtiques que caldria ensenyar i finalitzarem amb les vuit idees que ens ajudaran a construir un bon ensenyament de les matemàtiques.

Abstract

In this article we discuss the importance of learning mathematics, and present a proposal of what mathematics should be learned and how this can best be achieved, as well as several ideas – eight in total – that can be helpful in the process of teaching/learning mathematics in the classroom. We begin by setting out the reasons why mathematics should be taught, continue with a summary of the mathematics that should be taught, and conclude with the eight ideas that can help in constructing an effective mathematics teaching plan.

En aquest article parlarem de la importància de l'aprenentatge de les matemàtiques, per quin motiu és important ensenyar-les i aprendre-les, i presentarem una proposta de quines són les que podrien vehicular aquest ensenyament i com podríem treballar-les. I mostrarem algunes idees, vuit, que ens poden ajudar en el procés d'aprenentatge de les matemàtiques a l'aula.

En tots els casos donarem exemples de les propostes que mostrem que es poden aplicar en diferents nivells educatius.

Començarem situant els motius pels quals cal ensenyar matemàtiques, continuarem després amb les matemàtiques que caldria ensenyar i finalitzarem amb les vuit idees que ens ajudaran a construir un bon ensenyament de les matemàtiques. I, com no podia ser d'altra manera, finalitzarem amb les conclusions, on s'insisteix que tots hem de ser conscients de la importància de l'aprenentatge d'aquesta ciència.

1. Per quin motiu cal ensenyar matemàtiques?

Podem trobar molts motius per ensenyar matemàtiques, però ens centrarem en els cinc següents.

a) El món ha evolucionat d'analògic a digital

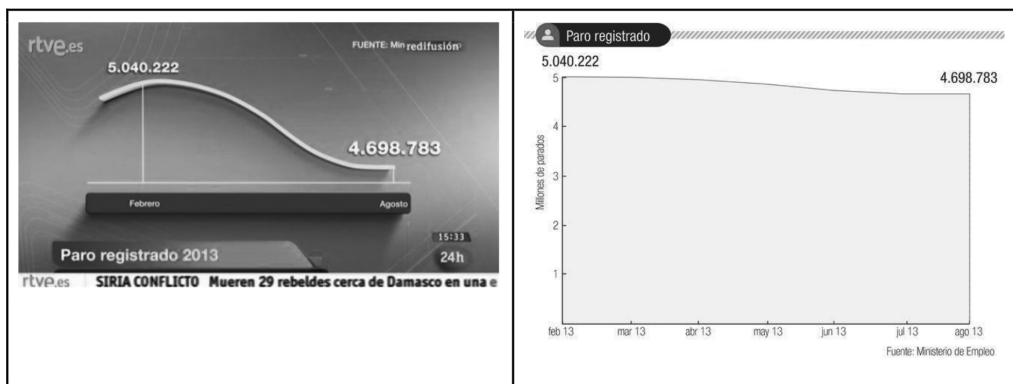
En una entrevista, Josep Baselga, quan era director científic de l'Sloan Kettering Center, va explicar que en la recerca sobre el càncer cada vegada tenen més importància els coneixements de computació per tractar la gran quantitat de dades que s'obtenen i, d'aquestes, seleccionar les que són importants. Separar les dades bones de les dolentes. Va explicar que el tractament de les dades permet saber quin és el millor tractament que es pot oferir en cadascun dels casos amb l'objectiu de prendre les millors decisions. I va especificar que en cap cas es pot oblidar el factor humà i un dels aspectes que té més relació amb ell: la comunicació.

b) Els treballs que demana la societat són cada vegada més tècnics

El món laboral també està canviant: totes les persones han de mostrar habilitat per aprendre coses i resoldre problemes, així com tenir un pensament lògic i estructurat, aspectes en els quals l'aprenentatge de les matemàtiques és fonamental i crea una base aplicable a qualsevol camp de treball.

c) Importància de les matemàtiques en la nostra vida quotidiana

Un dels aspectes que ha fet palès l'informe del Programa internacional per a l'avaluació d'estudiants (PISA), que elabora l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (OCDE), és la importància de l'alfabetització matemàtica de les persones, la capacitat que tots hem de tenir per utilitzar les matemàtiques per a la vida diària i per resoldre problemes. Les persones han de ser capaces d'entendre informacions diverses i d'analitzar-les críticament. Podem veure'n un exemple en els dos gràfics següents:

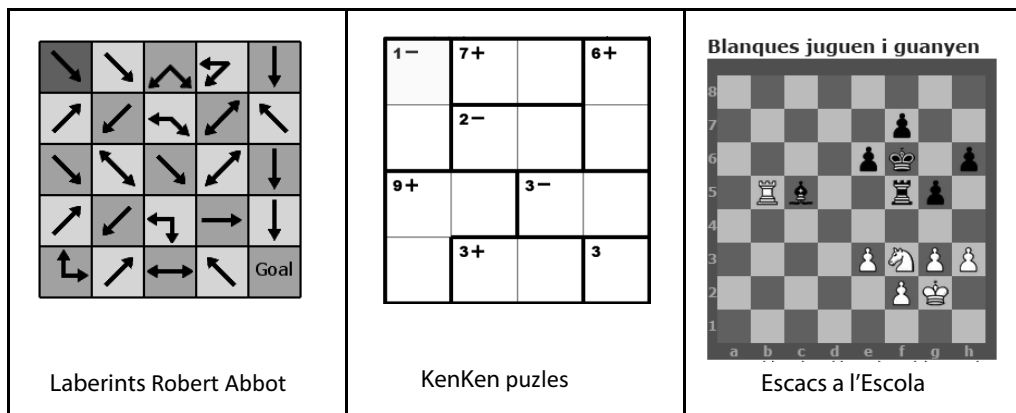


Els dos gràfics mostren la mateixa informació, el descens de l'atur, però la manera de mostrar-ho és absolutament diferent. Què mostra cadascun d'ells? Quin missatge és el que volen

transmetre? Quin és correcte i quin no? L'ensenyament de les matemàtiques ha de permetre respondre a les preguntes anteriors i prendre bones decisions a partir d'elles.

d) El raonament lògic i, també, l'entreteniment

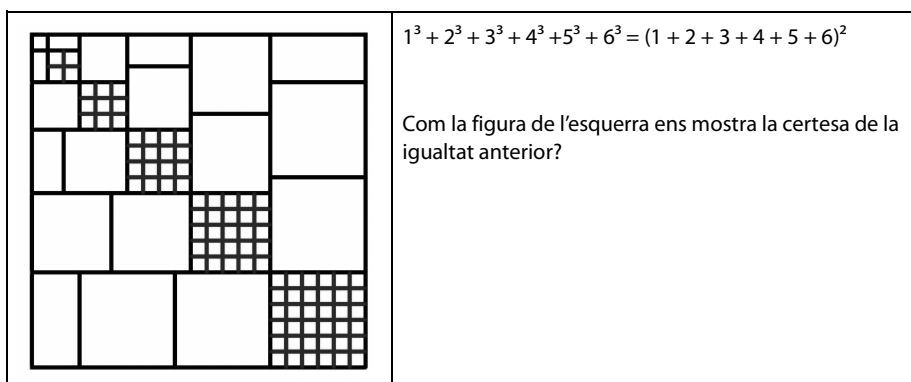
Una part important del temps la passem jugant, i en aquests jocs utilitzem el raonament lògic. Tant és així que en el seu disseny i la seva creació s'utilitzen molts recursos matemàtics. I no només hem de pensar en els jocs d'ordinador, sinó també en els jocs més clàssics: laberints, puzles diversos, etc. Vegeu-ne uns exemples:



Hi trobem els laberints dissenyats pel creador de jocs Robert Abbot, els puzles KenKen, variant dels sudokus composta per quadrats màgics amb operacions aritmètiques, i un dels jocs més antics, els escacs.

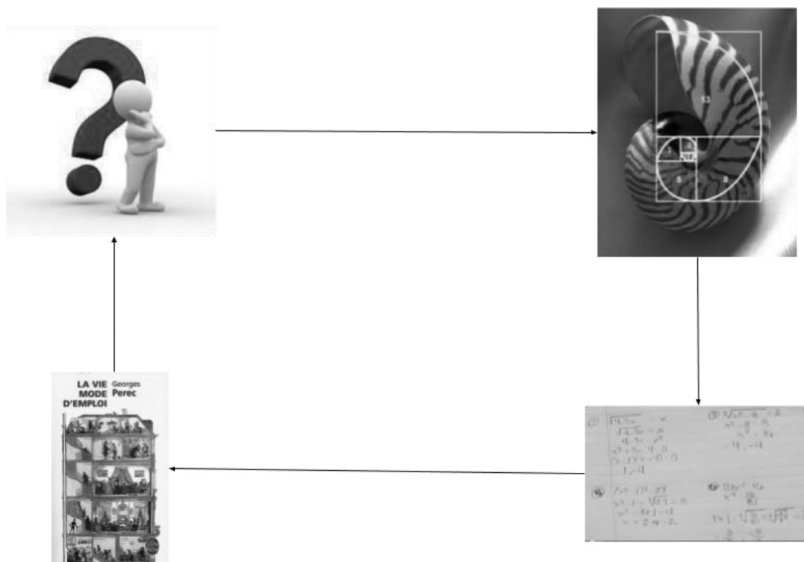
e) Estètica que ens mostren

Les matemàtiques ens mostren una estètica que moltes vegades connecta amb altres camps. Podem parlar de la seva relació amb l'art: pensem en Mondrian i els seus quadres, o en els vídeos de Cristóbal Vila que relacionen les matemàtiques amb la natura; o en les demostracions visuals, com la següent:



2. Quines matemàtiques cal ensenyar?

Les matemàtiques que cal que els nostres estudiants aprenguin han d'estar fonamentades en el procés de matematització, molt relacionat amb la resolució de problemes. Aquest procés consta de quatre fases:



Les quatre fases són: fer-nos preguntes i plantejar-nos problemes, transformar la situació en una situació matemàtica, realitzar la tasca matemàtica que calgui per resoldre la situació matemàtica, fer la traducció a la situació real i comprovar si la solució matemàtica s'adapta a la situació real. En cas contrari, cal revisar el procés i tornar a començar.

Aprofundim una mica en aquests aspectes:

a) Formular preguntes i plantejar problemes

Les matemàtiques, i, en general, la ciència, comencen a partir de la idea de fer-se bones preguntes, preguntes que ens facin pensar sobre situacions diverses. Quines poden ser les bones preguntes? En una entrada del bloc Marro de Nou es proposen algunes idees que ens poden ajudar a formular-les: <https://lluismora.blogspot.com/2019/05/formular-preguntes.html>. Han de ser preguntes obertes i curtes, en funció del tipus de resposta tenen una estructura determinada, cal evitar el perquè i les preguntes no han de jutjar. En podem trobar exemples molt interessants en el blog del VídeoMat: quin és el nom més habitual a la meua escola?, com es compra la compra? o quants grans de sorra hi ha en una platja mitjana?

A partir de les preguntes podem plantejar-nos problemes. Cal entendre que no totes les preguntes es poden respondre matemàticament: caldrà seleccionar aquelles en què les matemàtiques ens seran d'ajuda.

b) Traslladar la situació al món matemàtic

Un cop feta la pregunta i plantejat el problema, caldrà traslladar la situació real al món matemàtic. Buscar la millor representació per ajudar-nos a treballar. Aquí ens cal tenir molt clar quins són els models matemàtics i com els podem utilitzar per representar situacions diverses. Pensem, per exemple, en els problemes de recorreguts i en com es poden representar matemàticament amb els camins hamiltonians de la teoria de grafs.

c) Treballar la situació matemàtica fent els càlculs que calguin o utilitzant les estratègies que considerem convenients

Haurem de tenir les eines necessàries per fer els càlculs mentalment o utilitzant la tecnologia que escaigui. En aquest apartat caldrà entendre molt bé i dominar els algorismes de càlcul. En el blog del Calaix + ie es fa una descripció i una explicació molt interessant i necessària de molts dels algorismes que utilitzem habitualment en els nostres càlculs. <https://calaix2.blogspot.com/search?q=algorismes>

d) Fer la translació a la situació inicial. Haurem contestat a la pregunta o resolt el problema en el món matemàtic

Un exemple d'activitats que permeten desenvolupar aquesta estructura de treball seria el següent problema, proposat en el quadern de competències bàsiques de l'àmbit de matemàtiques del Departament d'Ensenyament:

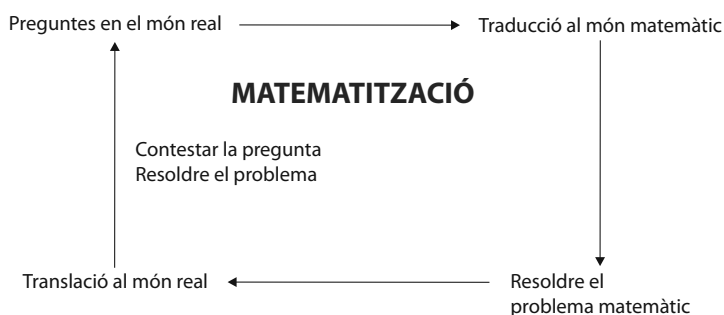
Aquest estiu volem anar a casa de l'àvia, que viu a 1.450 km de casa nostra. La mare diu que podem fer uns 250 km cada dia, màxim 300. M'ha preguntat quin dia arribarem si sortim dilluns al matí a primera hora.

He demanat ajuda als meus amics i han fet això:

- Emma $1.450 : 250 = 5,8$
- Joan $1.450 : 300 = 4,833$
- Rita $1.450 : 290 = 5$
- L'Òscar m'ha dit que tardarem tres dies.

Quina resposta li puc donar a la meva mare i com l'hi explico?

Finalitzem aquest apartat amb un gràfic més informatiu del procés de matematització:



3. Idees per construir un procés d'ensenyament-aprenentatge

En aquesta secció mostrarem amb exemples vuit aspectes que hem de tenir en compte a l'hora de dissenyar el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques.

1. Ambient de resolució de problemes

Per tal de crear aquest ambient cal conèixer els recursos dels quals disposen els estudiants, recursos que poden ser certs o erronis. L'ús de preguntes ens ajudarà a adquirir aquest coneixement, i també la informació que rebem de cursos anteriors. Aquest darrer aspecte no l'hem d'oblidar ni de menystenir. Caldrà facilitar les intervencions dels estudiants, de tots, per tal de conèixer els errors que cometem, les seves opinions i, així, poder establir mecanismes de correcció.

Les idees preconcebudes que acostumen a portar en la seva motxilla i que caldrà reconduir acostumen a ser:

- a) Els problemes matemàtics tenen una única resposta.
- b) Només hi ha una manera correcta de resoldre els problemes, i és la que es va explicar a classe.
- c) L'activitat matemàtica es fa en solitari i en silenci, sense comunicar-se amb els companys.
- d) Els estudiants normals no poden entendre les matemàtiques, només han de memoritzar-les i aplicar les normes.

Per tal de crear l'ambient, haurem d'afavorir el treball en grup, així podran aprendre amb altres i dels altres; donar temps suficient a tots els estudiants per realitzar les tasques; utilitzar diversos recursos, materials i tecnologia; ajudar els estudiants a construir els seus problemes i, per acabar, no ajudar gaire, és a dir, evitar la tendència que podem tenir de voler avançar etapes donant massa pistes als estudiants.

2. Experimentar i preguntar

Per experimentar cal ajudar els estudiants a formular-se preguntes. Aquest és un aspecte que no s'ha treballat gaire. Els llibres de text estan farcits de preguntes que els estudiants han de respondre, però és molt més ric un ensenyament que parteix de preguntes que s'hagin formulat els estudiants. I, per tal que puguin fer-ho, cal introduir la creació de preguntes en les nostres classes, amb molt suport. És un coneixement fonamental. Després caldrà experimentar per tal de poder donar resposta a les preguntes que s'hagin formulat; preguntes que, òbviament, ens interessa que es puguin respondre matemàticament.

Podem trobar molts recursos que ens ajudin en aquesta tasca, però n'esmentarem només tres:

- a) Problemes en tres actes, de Dan Meyer.
- b) El web PuntMat, de David Barba, Cecilia Calvo i Ana Cerezo.
- c) El concurs VídeoMat.

3. Contextos

Les classes de matemàtiques han de mostrar-les interactuant en diferents àmbits. Aquests entorns haurien d'incloure situacions:

- a) de l'entorn més immediat a l'estudiant, el més proper,
- b) de rellevància social i/o que tinguin relació amb altres àmbits de coneixement,
- c) lúdiques, relacionades amb jocs i entreteniments,
- d) històriques, on es mostrin les matemàtiques d'ahir i la seva evolució en relació amb un context social,
- e) científiques, on les matemàtiques apareguin com a àmbit propi de coneixement.

4. Raonar, argumentar i contrastar

Com hem comentat anteriorment, el procés de matematització comença quan ens formulem preguntes sobre situacions. Per poder construir les preguntes i després poder-les respondre, ens cal entendre les situacions adequadament per, primer, trobar la idea fonamental que porten associades. Un cop l'haguem trobat, ens caldrà determinar o identificar la seva millor representació matemàtica, que haurem d'explicar i justificar. El mateix passarà en el tram final del procés, quan s'hagi de fer la traducció de la solució del model matemàtic a la situació real. Podem ressaltar la importància de la creativitat en tot aquest procés.

Trobem un exemple d'això que hem dit en l'activitat següent:

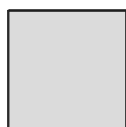


Figura 1

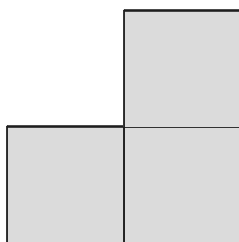


Figura 2

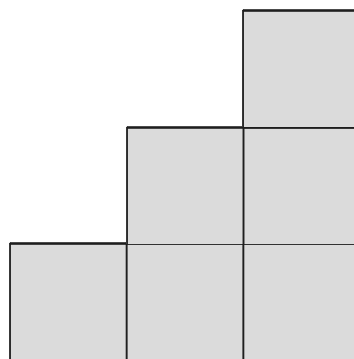


Figura 3

Les figures anteriors estan construïdes amb escuradents.

- a) Quants quadrats hi ha en la figura 4?
- b) Quants escuradents necessitarem per construir-la?
- c) Quin és el seu perímetre?
- d) I en la figura 10?

Les tres primeres preguntes ens ajuden a trobar la idea fonamental en la construcció de les tres figures: veure quin és el patró per tal de poder construir la figura següent. A partir d'aquest coneixement podem argumentar i contrastar la resposta per a l'activitat d.

En aquest procés ens ajudaran molt les eines matemàtiques; en aquest cas, les taules. Si anotem els resultats del que observem en una taula com la següent, els tindrem ordenats i ens serà molt més fàcil poder determinar aquest patró fonamental de la situació. Aquesta tasca, determinar patrons, segons Marcus Du Sautoy, és la tasca fonamental dels matemàtics i —m'atreviria a afegir— dels científics en general.

Figura	Nre. de quadrats	Nre. d'escuradents	Perímetre
1	1	4	4
2	3	10	
3	6		
4			
5			

5. Blocs de contingut

Cal procurar que els cinc blocs de contingut presents en el currículum: numeració i càlcul, relació i canvi, espai i forma, mesura, i dades i atzar, tinguin un pes equilibrat, tant pel que fa a la seva presència a les aules com pel que fa a la manera de treballar-los. Sense oblidar les importants connexions que s'estableixen entre ells: no s'haurien de mostrar com blocs de contingut deslligats, sinó que se n'hauria de donar una visió interconnectada. L'activitat de l'apartat anterior en podria ser un exemple, atès que treballa diversos blocs de contingut al mateix temps: relació i canvi, espai i forma i mesura serien els més evidents, però l'ús que es fa de les taules ens permet introduir situacions del bloc de dades i atzar.

6. Diversitat de recursos

Sovint davant d'una dificultat es proposa la repetició, com si repetint s'aprengués. Repetir pot ajudar a automatitzar i això pot ser bo si hi ha una bona comprensió. Si no es comprèn, en canvi, repetir no serveix per a res: cal buscar altres camins, esbrinar a què es deu la dificultat i mirar d'oferir recursos per superar-la.

Cal defensar l'ús de material de manipulació en tots els nivells educatius. Aquest material ajuda a formar els models, tan importants en la resolució de problemes. El seu ús és fonamental per al viatge que fan els nostres estudiants cap a l'abstracció, sense oblidar la mirada matemàtica que tot professor ha d'incorporar a les tasques i els materials amb què treballa.

Cal aportar combinacions d'activitats que integrin recursos diversos: TIC, materials de manipulació, contes i relats, jocs, treballs de camp...

Poden ser exemples d'aquests materials els diversos tipus de tangrams, els policubs, les fotografies i els vídeos, el web del concurs VídeoMat o els geoplans, per exemple.

7. Comunicar i compartir el treball matemàtic

Molts docents, de tots els nivells educatius, elaboren molt material perquè els estudiants treballin a les seves classes, i és un material excel·lent. L'ARC, que n'és plena, n'és un exemple, però, a banda, cal tenir en compte dos aspectes que són molt importants:

- a) Cal donar a conèixer a la resta de la comunitat educativa el que fem com a docents: presencialment en congressos, en les jornades de les associacions de docents de matemàtiques o bé en les eines de comunicació de la comunitat, les revistes *SUMA* i *NouBiaix*.
- b) Cal donar a conèixer la feina que fan els nostres estudiants: a les famílies, a la resta d'estudiants.

8. Avaluar coherentment

Finalitzarem aquest recull d'idees al voltant de l'ensenyament de les matemàtiques amb el tema de l'avaluació, la qual ha de ser coherent amb el procés d'ensenyament-aprenentatge que portem a la pràctica a l'aula. Aquesta avaluació ens ha de ser útil per millorar l'aprenentatge que realitzen els nostres estudiants, però també ens ha de servir per millorar el nostre procés d'ensenyament. En aquest sentit, és interessant assenyalar que els mètodes d'avaluació haurien de:

- a) Permetre als estudiants revelar el que saben, i no el que no saben.
- b) Utilitzar múltiples formats, d'acord amb els processos —dimensions en el currículum— que ens porten a fer matemàtiques, la resolució de problemes, el raonament i la prova, les connexions i la comunicació i representació. Cal elaborar, doncs, activitats que ens permetin detectar el grau de destresa dels nostres estudiants en cadascun d'aquests processos. I això implica utilitzar formats d'activitats diversos.
- c) Posar en pràctica els objectius dels plans d'estudi. En el nostre cas, estaríem parlant de les competències associades a cada dimensió d'acord amb els continguts conceptuals que treballem en cada curs. Els estudiants han de ser conscients d'aquests objectius; en un llenguatge proper a ells, han de conèixer el que s'espera d'ells i el que no.
- d) Incorporar activitats. Les activitats de recollida d'informació, d'avaluació haurien d'incorporar activitats d'identificació i de reproducció de coneixements en diferents nivells de dificultat, activitats que permetin als estudiants comparar-los i connectar-los i, finalment i en menor mesura, activitats que permetin transformar i reflexionar sobre els coneixements adquirits i la manera d'adquirir-los.
- e) El procés d'avaluació ha d'estar obert als estudiants i és molt important que vagin rebent una realimentació freqüent de l'estat del seu aprenentatge.

I un bon punt de partida és disposar altes expectatives en les possibilitats dels estudiants.

4. Síntesi

Els estudiants han de ser conscients de la importància de l'aprenentatge de les matemàtiques en la societat actual, i no només des del punt de vista laboral, sinó també des d'altres punts de vista que les enriqueixen com a ciència i permeten el seu ús en múltiples disciplines. I que l'objectiu fonamental de les matemàtiques demana tenir la capacitat de resoldre problemes o, si més no, conèixer les seves estratègies de resolució.

Ensenyar i aprendre matemàtiques implica conèixer i desenvolupar unes dinàmiques de treball que condueixin estudiants i professors a poder desenvolupar la seva tasca en un ambient de treball adequat on predominin les preguntes, diverses, sobre situacions i contextos. És important que tinguin temps de raonar, argumentar i contrastar a classe, que s'agafin el temps necessari per fer les coses. Les connexions ens permeten poder gestionar bé el temps. I atès que la diversitat d'estudiants i docents és gran, cal utilitzar una diversitat d'estratègies, eines i idees en la nostra metodologia d'ensenyament-aprenentatge. Sense una avaluació coherent amb la manera de treballar, no aconseguirem millorar els resultats dels estudiants i la nostra pràctica docent. El que hem dit referent al procés d'ensenyament-aprenentatge també és vàlid per a l'avaluació i per a la recollida d'informació que ens serà útil en la millora dels processos i dels resultats dels estudiants.

I, finalment, però cosa no menys important, cal donar a conèixer la bona tasca que s'està fent als nostres centres. Cal donar a conèixer i compartir les tasques i les bones activitats que desenvolupem com a docents i també els bons treballs que fan els nostres estudiants.

5. Referències

www.xlsemanal.com/conocer/salud/20170409/josep-baselga-las-cifras-del-cancer-bestiales-no-van-bajar-superpreocupante.html

Laberints Robert Abbot: www.logicmazes.com/alice.html

KenKen puzzles: www.kenken.com/

Escacs a l'Escola: www.escaquejant.com/

Cristóbal Vila: ETÉREA FILMS: <https://etereaestudios.com/>

Marro de Nou. Bones preguntes: <https://lluismora.blogspot.com/2019/05/formular-preguntas.html>

VídeoMat: www.videomat.cat/

Algorismes: <https://calaix2.blogspot.com/search?q=algorismes>

Competències bàsiques de l'àmbit de les matemàtiques: <http://apliense.xtec.cat/arc/competencies-basiques>

Problemes en tres actes: <https://blog.mrmeyer.com/2011/the-three-acts-of-a-mathematical-story/>

Blog PuntMat: <http://puntmat.blogspot.com.es/2014/07/activitats-en-3-actes.html>

Targetes negabinàries

Sergio Belmonte

Professor de matemàtiques
Vicepresident del Museu de Matemàtiques de Catalunya
sbelmon4@xtec.cat

Resum

Molts de nosaltres coneixem les targetes numèriques endevinatòries, que utilitzen les potències de dos o el sistema binari, si voleu, per tal d'endevinar un nombre entre dos valors determinats. Però això no acaba aquí: una de les virtuts de les matemàtiques és que sempre podem anar més enllà. I això és el que farem en aquesta proposta: ampliar aquestes targetes amb nombres negatius. Si bé els mags no expliquen els seus trucs, en matemàtiques esbrinar i explicar el motiu de les coses és un dels seus motors, així com trobar els models que els expliquen —podríem dir-ne sistemes de numeració, en aquest cas—. Això també ho veurem en aquest article.

Abstract

Many of us are familiar with the number cards which use powers of two — or the binary system, if you wish — to determine a number between two given values. But it doesn't end there: one of the virtues of mathematics is that we can always take things further. And that is what we do in this paper, by expanding these cards with negative numbers. While magicians never reveal their tricks, finding out and explaining the reasons for things is one of the key motivations in mathematics, as is discovering models that can explain them. In this case these models are called numeral systems, which we also discuss here.

Mireu aquestes targetes:

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
25	25	25	25	25	25	25	25
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

II-lustració 1. Targetes binàries.

Si us dic que penseu en qualsevol nombre de l'1 al 63 (els que apareixen a les targetes), que em digueu només en quines targetes apareix el nombre que heu pensat i que seré capaç d'endevinar-lo tan sols amb aquesta informació, segurament em direu: — «Ei, Sergio, jo també ho sé fer!».

Estic segur que la immensa majoria de vosaltres ja coneixeu aquest petit efecte mate-màgic i sabeu perfectament com funciona: es basa en la representació en un sistema binari (base 2) dels nombres en base decimal (els que fem servir normalment) i funciona fonamentalment perquè aquesta representació és única. Això permet saber inequívocament el nombre en el qual una persona està pensant només dient en quines targetes apareix. Aquestes targetes es coneixen com a targetes binàries i cada targeta s'associa a una potència de 2. D'aquesta manera (d'esquerra a dreta i de dalt a baix), la targeta 1 és l'1, la targeta 2 és el 2, la targeta 3 és el 4, la targeta 4 és el 8, la targeta 5 és el 16 i la targeta 6 és el 32.

Vegem-ne un exemple.

Imaginem que una persona pensa el nombre 42. Així, ens dirà que apareix a les targetes 2, 4 i 6, que corresponen a les potències 2^1 , 2^3 i 2^5 . Per calcular el nombre pensat, doncs, només hauríem de sumar aquestes potències: $2 + 8 + 32 = 42$.

Per si de cas encara hi ha alguna persona per a la qual això és nou, els amics de *Divermates* van fer un article amb l'explicació i van posar a disposició del públic uns arxius amb les targetes per imprimir i portar-les com a activitat a l'aula. És molt recomanable: <http://divermates.es/blog/tarjetas-magicas/>.

A més, si voleu practicar, també n'hi ha versions en línia, on màgicament l'ordinador ens esbrina el nombre pensat: <http://matemagia.educacia.com/html/tarjetero.html>.

Unes noves targetes

Però ara vull que mireu aquestes targetes:

-9 -7 -5 -3	-10 -9 -6 -5	-6 -5 -4 -3	-10 -9 -8 -7	6 7 8 9
-1 1 3 5	-2 -1 2 3	2 3 4 5	-6 -5 -4 -3	10 11 12 13
7 9 11 13	6 7 10 11	10 11 12 13	6 7 8 9	14 15 16 17
15 17 19 21	14 15 18 19	18 19 20 21	10 11 12 13	18 19 20 21

II·lustració 2. Targetes negabinàries.

Penseu un nombre entre el (−10) i el 21 (ambdós inclosos). Només dient-me en quines targetes és, podré endevinar de quin nombre es tracta.

Bé, sembla que sigui el mateix que les targetes binàries, però si ho mireu bé i ho intenteu fer, no surt. Llavors, com ho faré per endevinar el vostre pensament? Com s'han fet aquestes targetes? Per què funcionen?

Ara és un bon moment per deixar de llegir, fer un cafè o un suc i pensar una mica en les respostes de les preguntes anteriors abans de seguir llegint...

És clar que si no podeu esperar més, a continuació us dono les respostes.

Explicació i matemàtica

L'explicació és que ara no he fet servir la base 2 (com en les clàssiques targetes binàries), sinó la base (-2) ; és a dir, ara he fet servir les potències de (-2) per fer la descomposició dels nombres. Aquesta base s'anomena base negabinària:¹

$$\begin{aligned} (-2)^0 &= 1 \\ (-2)^1 &= -2 \\ (-2)^2 &= 4 \\ (-2)^3 &= -8 \\ (-2)^4 &= 16 \\ &\vdots \end{aligned}$$

I, en conseqüència, les targetes anteriors s'anomenen targetes negabinàries.²

D'aquesta manera, a la primera targeta li correspon el nombre 1; a la segona, el (-2) ; a la tercera, el 4, a la quarta, el (-8) , i a la quinta, el 16. La mecànica per esbrinar el nombre pensat és exactament igual que en les famoses targetes binàries.

Amb un parell d'exemples, entendreu com funcionen aquestes targetes:

1. *Nombre pensat: -10*

Apareix a les targetes 2 i 4. Així, el que fem és: $-2 - 8 = -10$

2. *Nombre pensat: 13*

Apareix a les targetes 1, 3, 4 i 5. Així, el que fem és: $1 + 4 - 8 + 16 = 13$.

Per a la construcció de les targetes, el que he fet és escriure a la primera targeta tots el nombres que tenen l'1 en la seva representació negabinària; a la segona, els que tenen el (-2) ; a la tercera, els que tenen el 4, i així successivament.

Aquí teniu la taula amb els nombres del (-10) fins al 21 amb la seva descomposició negabinària. Les X indiquen quines potències de (-2) componen cada nombre enter:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_base.

2. Exploding Dots, James Tanton and Kiran.

	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Targ 1: 1		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X
Targ 2: -2	X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X			X	X		
Targ 3: 4					X	X	X	X					X	X	X	X					X	X	X	X						X	X	X
Targ 4: -8	X	X	X	X	X	X	X	X									X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Targ 5: 16																	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

	Targ 1 1	Targ 2 -2	Targ 3 4	Targ 4 -8	Targ 5 16
-10		X		X	
-9	X	X		X	
-8				X	
-7	X			X	
-6		X	X	X	
-5	X	X	X	X	
-4			X	X	
-3	X		X	X	
-2		X			
-1	X	X			
0					
1	X				
2		X	X		
3	X	X	X		
4			X		
5	X		X		
6		X		X	X
7	X	X		X	X
8				X	X
9	X			X	X
10		X	X	X	X
11	X	X	X	X	X
12			X	X	X
13	X		X	X	X
14		X			X
15	X	X			X
16					X
17	X				X
18		X	X		X
19	X	X	X		X
20			X		X
21	X		X		X

II·lustració 3. Descomposició en base (−2).

Llavors, per exemple, la representació negabinària del nombre 6 seria:

$$6 = -2 - 8 + 16 = 0 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^1 + 0 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4,$$

amb la qual cosa apareixerà en les targetes 2, 4 i 5 (ho podeu comprovar).

Crec que és un molt bon exercici per fer a classe amb l'alumnat, calcular el desenvolupament en base (−2) de cada nombre i després aprofitar l'ocasió per fer-se algunes preguntes riques, com ara:

- Per què he fet servir del −10 al 21? Es pot fer servir una altra franja de nombres?
- Quants nombres posem a cada targeta?
- Es poden fer més targetes? I menys? Quants nombres posem a cadascuna?

I, a més, si mireu les descomposicions dels nombres, us vull fer notar que:

- Tots els nombres positius necessiten un nombre senar de dígit.
- Tots els nombres negatius necessiten un nombre parell de dígit.

Podríeu explicar per què? Podeu trobar-ne més patrons?

Pel que fa a la presentació de l'efecte màgic i la seva execució, us vull comentar que quan ho presenteu, crec que és millor ensenyar les targetes en ordre invers; és a dir, primer la que

correspon al 16, després la que correspon al (-8) , després la que correspon al 4, després la del (-2) i, per acabar, la de l'1, ja que això facilita molt els càlculs mentals que s'han de fer.

Per exemple, si haig d'esbrinar el nombre 18, a mi em resulta molt més fàcil calcular mentalment $16 + 4 - 2$ que no pas $-2 + 4 + 16$. Però, òbviament, és una qüestió de gustos i els càlculs són suficientment fàcils perquè no hi hagi cap problema a fer-los d'una manera o de l'altra.

Més enllà de l'efecte màgic...

En tot cas, si volem analitzar fil per randa tota la matemàtica d'aquest efecte màgic, la primera pregunta que s'haurà de respondre és si en aquesta base la representació d'un nombre és única. I la sorprenent resposta és que sí i que no. M'explico:

En general, representem un nombre enter en la base negabinària; així,

$$r = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (-2)^i,$$

on els nombres $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ es diuen coeficients i han de complir que $|a_i| \leq 1$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

En el sistema binari, on la base és 2, tots els coeficients són no negatius; és a dir, 0 o 1. Però si la base és negativa, podem obrir la possibilitat que els coeficients siguin també negatius.

Així doncs, si obrim aquesta possibilitat per a la base negabinària, tenim que:

- Si els coeficients són tots 0 o 1, llavors la descomposició de cada nombre és única.
- Si els coeficients són tots 0 o (-1) , llavors la descomposició de cada nombre és única.
- Si els coeficients són 0, 1 o (-1) , llavors la descomposició no és única; més encara: d'un nombre qualsevol, hi ha infinites descomposicions diferents! (excepte per al zero).

Les dues primeres afirmacions són certes gràcies a la unicitat en la descomposició d'un nombre en qualsevol base (teorema fonamental de la numeració), i per a l'última afirmació només cal notar que qualsevol potència de (-2) es pot expressar d'infinites maneres fent servir els coeficients 0, 1 o (-1) . Podríeu esbrinar per què?

És per això que abans us comentava que la descomposició pot ser única o no, depenent dels coeficients que considerem.

Per exemplificar les afirmacions anteriors, vegeu:

- $-10 = -2 - 8 = 1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^3$,
la descomposició (única) de la qual és $(1, 0, 0, 1)$.
- $-10 = 2 - 4 + 8 - 16 = (-1) \cdot (-2)^1 + (-1) \cdot (-2)^2 + (-1) \cdot (-2)^3 + (-1) \cdot (-2)^4$,
la descomposició (única) de la qual és $(-1, -1, -1, -1, 0)$.

$$\bullet -10 = -2 + 8 - 16 = -2 + 8 + 16 - 32 = -2 + 8 + 16 + 32 - 64 = \dots,$$

les descomposicions de les quals són, respectivament, $(-1, -1, 0, 1, 0) = (1, 1, -1, 0, 1, 0) = (-1, -1, 1, -1, 0, 1, 0) = \dots$

En les targetes negabinàries que us he presentat, l'efecte de màgia funciona perquè els coeficients que es fan servir són 0 (no) i 1 (sí), és a dir, són no negatius, i la descomposició de cada nombre és única.

Ara bé, a partir del que he comentat anteriorment, les targetes també es podrien preparar amb els coeficients 0 i (-1) , i com que la representació és única, també funcionaria. Això sí, per poder fer els càlculs i aconseguir l'efecte màgic, el valor associat a cada targeta hauria de canviar de signe: a la primera li correspondria el (-1) ; a la segona, el 2; a la tercera, el (-4) , etc.

A tall d'exemple, vegeu:

$$6 = 2 - 4 + 8 = 0 \cdot (-2)^0 + (-1) \cdot (-2)^1 + (-1) \cdot (-2)^2 + (-1) \cdot (-2)^3 + 0 \cdot (-2)^4$$

i hauria d'aparèixer ara a les targetes 2, 3 i 4.

Us deixo com a exercici, si voleu, fer la descomposició de cada nombre i fer les targetes corresponents, que crec que també és una activitat molt interessant per portar-la a l'aula.

Comentaris finals

Aquest sistema negabinari que us he presentat té l'avantatge que es pot escriure amb tots els nombres enters, positius i negatius, sense haver de fer servir un *dígit* (coeficient) extra per al signe, com sí que es necessitaria en el sistema binari, però, en canvi, les operacions aritmètiques bàsiques resulten bastant complexes de fer.

També us vull obrir la porta a explorar, jugar i experimentar amb altres bases negatives amb altres nombres per descobrir propietats interessants, fer-vos més preguntes *riques* i, qui sap, inventar nous efectes màgics.

Per acabar, vull afegir que segurament aquests sistemes no són uns *bons sistemes* de numeració per utilitzar quan es necessita fer operacions, però resulten bastant enginyosos per presentar un efecte de màgia matemàtica com aquest, no creieu?

Enllaços d'interès sobre les bases negabinàries

<https://math.stackexchange.com/questions/3251605/how-to-add-negabinary-numbers>

<http://mathworld.wolfram.com/Negabinary.html>

<http://oeis.org/wiki/Negabinary>

secciones
secciones



cions

Un homenatge a Lluís Antoni Santaló des d'una perspectiva didàctica

Grup Cúbic

.....

El passat 22 de novembre es va dur a terme la 3a Jornada de Didàctica de les Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la UB. Des del grup Cúbic (Grup de Didàctica de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la UB, compost per professorat de matemàtiques de secundària i batxillerat) es va voler retre un homenatge a Lluís Antoni Santaló, considerat el millor matemàtic català del segle XX.

Recordem que Lluís Antoni Santaló forma part de la *Línia del temps de l'educació matemàtica a Catalunya*, presentada en el C²EM 2016.

Paral·lelament a la Jornada, a la Biblioteca de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica es va fer una exposició de llibres de Santaló. A la vegada es va publicar una magnífica exposició virtual titulada *Matemàtics catalans. Lluís A. Santaló: de Girona a l'Argentina*.

El programa de la Jornada va ser el següent:



- **17.00 h.** Presentació de la jornada i benvinguda (a càrrec de Carles Casacuberta, degà de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la UB)
- **17.10 h.** «Recordant Lluís Antoni Santaló» (a càrrec de Claudi Alsina)
- **17.25 h.** «Role-play de probabilitats»
- **17.40 h.** «Lluís Santaló: un científic, un mestre» (a càrrec de David Juher, director de la càtedra Lluís Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica de la Universitat de Girona)
- **17.55 h.** Visita a l'exposició de llibres de Lluís Santaló a la Biblioteca de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la UB
- **18.25 h.** Taller d'activitats didàctiques inspirades en l'obra de Santaló
- **19.50 h.** Cloenda

En la primera presentació, en Claudi Alsina, que va treballar directament amb Lluís Antoni Santaló, ens va presentar un Santaló més personal, fent un repàs de la seva vida i de la seva obra, tant l'acadèmica com l'educativa.



Entre les dues presentacions es va dur a terme un *role-play* de probabilitats anomenat Joc del 6, segons el qual cada assistent havia d'anar tirant un dau cúbic i s'anava assegint en el moment que li sortia un 6.



Tot seguit, David Juher, com a director de la càtedra Lluís Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica de la Universitat de Girona, ens va presentar la feina que s'està fent des de la càtedra.

A continuació ens vam desplaçar a la Biblioteca de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica per visitar l'exposició de llibres de Lluís Santaló.



Per tancar la Jornada es va portar a terme un taller d'activitats didàctiques inspirades en l'obra de Santaló.

- Joc del 6
- Monedes i agulles de Buffon
- Tirar entre ratlles (TER)
- Tacs, Hanjie, cubs *multilink*



Al web de la Jornada també es pot consultar la fitxa del problema de les coincidències de Monmort, que acompanyava el material inspirat en l'obra de Santaló exposat a la vitrina de la Biblioteca.



- El problema de les coincidències de Monmort



Fotografia del grup Cúbic.

Bibliografia

Santaló, L.A. *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*. Vic: Eumo, 1993.

Pàgines web

Exposició virtual a la Biblioteca de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica <https://crai.ub.edu/ca/coneix-el-crai/biblioteques/biblioteca-matematiques/matematics-catalans-lluis-a-santaló-de-girona-a-l-argentina>.

Línia del temps de l'educació matemàtica a Catalunya. <https://sites.google.com/site/matematicquesacatalunya/>

Web del grup Cúbic www.ub.edu/cubic/

creammat

el racó del cesire-creammat

EL CESIRE-CREAMAT, laboratori de matemàtics

.....

Estem convençuts que entre els lectors d'aquesta revista, persones interessades en l'ensenyament i l'aprenentatge, no existeix el dubte que l'experimentació és una eina didàctica de primer ordre. Fins i tot que, més que una eina, és un deure i una necessitat. Aquesta experimentació pot tenir un punt abstracte (podem fer exploracions matemàtiques riques amb nombres i figures sobre un paper): pot ser virtual (amb miniaplicacions), però també pot ser material i molt concreta (fent servir materials tangibles). Les experiències vitals i d'aprenentatge són diferents i l'empremta que deixen també ho és. Deia Puig Adam el 1957:

El concret comença essent pel nen allò que percep; sobre aquestes primeres percepcions actua elaborant analogies de les quals sorgeixen conceptes més generals, més abstractes, arribant a vegades a processos d'abstracció de rapidesa insospitada. La percepció i l'acció semblen constituir el binomi sobre el que es desenvolupa l'aprenentatge matemàtic.

Però sembla que a les aules de matemàtiques la manipulació, amb objectes quotidians o modificats i amb materials didàctics dissenyats específicament per a l'aprenentatge, no acaba d'ocupar el lloc que li pertoca. La manipulació i l'experimentació encara no estan prou presents a les aules de primària i fins i tot sovint són menystingudes a les de secundària. Tots i totes hem vist centres on no existeixen materials didàctics matemàtics (com geoplans, Polydron o similars, cubs *multilink*, reglets...) o, si n'hi ha, estan agafant pols als armaris. I si no agafen pols, és perquè encara estan embolicats amb plàstic, pendents de ser estrenats. Per sort, no és la norma general i sembla que hi ha un canvi de tendència: quan el professorat de matemàtiques veu i toca els materials, es respiren més bones sensacions.

No entrarem en aquest article en l'anàlisi detallada dels motius per a la poca extensió de l'ús dels materials manipulables, però un d'ells, i potser un dels principals, és no saber exactament com usar-los. I és que els materials, per si mateixos, no són un recurs. El recurs el constitueix el material, les activitats que proposem amb ell i la forma en què ho gestionem tot plegat. Aquesta idea, com moltes d'altres, la recollim dels diferents escrits de l'Anton Aubanell, tot un referent en aquest tema. Hi ha molts ensenyants que volen canviar la manera de treballar les matemàtiques a l'aula, però que no acaben de fer el pas perquè no coneixen prou idees o no senten prou seguretat per substituir les velles activitats per activitats belles. Una activitat

bella és, per a nosaltres, un activitat rica, que crea coneixement de forma viscuda i que ajuda a desenvolupar les competències matemàtiques personals.

És en aquest marc que des del CESIRE ens hem plantejat dur a terme algunes accions d'impuls de la utilització de materials manipulables.

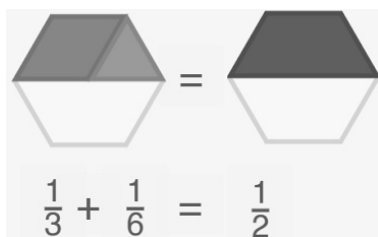
1a acció. Préstec de lots de material per a primària i secundària

Des del CESIRE hem preparat deu lots (cinc per a primària i cinc per a secundària) amb material que considerem bàsic per començar a introduir-lo a l'aula. La llista, per si pot ser d'interès a algun centre, és la següent: space*-0.2cm

- Tauler de nombres de l'1 al 100 (panell amb 121 caselles)
- Lot de càlcul
- Maleta de daus
- Quadre de fraccions unitàries
- Fraccions amb sectors circulars (cercles) (2 unitats)
- Tangram xinès (24 unitats)
- Blocs de patrons (*pattern blocks*) (4 unitats)
- Cubs *multilink* (cubets encaixables) (4 bosses de 100)
- Lokon (polígons encaixables) (4 unitats)
- Joc de volums per omplir: volums transparents, grans i petits...
- Llibres de miralls grans (10 miralls, 5 llibres) (2 unitats)
- Geoplans (quadricular i circular) (12 unitats)
- Metre cúbic per construir
- Pentòminos
- Roda (hodòmetre)



Imatge del lot de material per a secundària.



Exemple de suma de fraccions amb *pattern blocks* (proposta 1 de la campanya).

3a acció. Grup de treball sobre laboratoris de matemàtiques

Aquesta acció vol anar una mica més enllà, de manera que s'ha creat un grup de discussió sobre la implementació de laboratoris matemàtics i l'experimentació als centres amb professorat que ja els està tirant endavant. Tot i el convenciment que l'experimentació és cabdal en l'aprenentatge de les matemàtiques i que hi ha diferents recerques pedagògiques que ho validen, encara hi ha camí per recórrer i preguntes no del tot resoltes. Per exemple:

- *Cal que el laboratori de matemàtiques sigui un espai físic?*

A aquesta qüestió, deixant ara al marge la possibilitat real de cada centre de disposar de tal espai, es pot contestar de diverses maneres. L'Anton Aubanell diu que «potser podríem definir el laboratori de matemàtiques com un àmbit propici a l'experiència matemàtica». És una definició prou oberta perquè la idea de laboratori no quedi cenyida a un espai, i convida a pensar que el concepte de laboratori pot estar lligat, bàsicament, a una manera de fer, a una metodologia que es basa en l'experimentació i que s'aplica amb un mínim de continuïtat, que no es fa de manera esporàdica. En aquesta línia, el laboratori pot ser mòbil o ubic. Hi ha centres que tenen «carrets de matemàtiques», i molts de primària tenen el material bàsic a l'aula, o en espais accessibles propers, per poder-hi recórrer fàcilment quan el necessiten. Fins i tot una pregunta encara oberta al debat és si als centres, especialment als de primària, és realment necessari aquest espai específic. Una argumentació que acompanya aquest parer és que si hem d'experimentar sempre..., per què no hem de fer-ho a l'aula?

- *Què aporta un espai físic específic?*

Molts centres disposen ja d'espais especialitzats: gimnàs, aula de música, laboratoris de ciència, taller de tecnologia... Als centres de secundària aquesta diversificació d'espais és més evident. Tothom veu clar que no es poden fer tombarelles ni bullir una dissolució d'aigua amb sal a l'aula estàndard. L'existència d'aquests espais ha respost a una evidència educativa: s'aprèn fent, s'aprèn experimentant. L'espai ha d'estar adaptat al que s'hi ha de fer i el material necessari ha d'estar a l'abast. Però, a més, aquests espais poden estar ambientats. No hi ha, per exemple, un laboratori de química sense un cartell de la taula periòdica penjat. L'ambientació pot ajudar a orientar el clima de treball.

Un efecte secundari és que la reserva d'un espai obliga a la seva utilització. En molts instituts l'alumnat ha de passar, com a mínim, una hora a la setmana pel laboratori científic o pel taller de tecnologia. Això no significa que experimentin o practiquin, perquè ja sabem que totes les idees es poden pervertir. No és estrany que en aquests espais es

continui fent la mateixa feina de paper i llapis que a la classe estàndard. Però, en tot cas, s'entén que l'experimentació (i, de retruc, la immersió ambiental) està incorporada en la filosofia del centre. Per què no també en les matemàtiques? L'existència d'aquest espai podria acomplir una funció de motor de canvi important. Està confirmat també per la recerca educativa que perquè els canvis educatius tinguin una repercussió efectiva, real i continuada, és més important que siguin d'equip o de línia de centre que no pas fer-los a escala individual. Des d'aquesta perspectiva, l'existència d'un laboratori de matemàtiques, amb el seu espai específic definit, pot repercutir d'una manera positiva en la millora pedagògica del centre. Podríem dir que facilitarà fer de llavor, de taca d'oli, d'irradiador..., o qualsevol altra metàfora que considerem.

- *Quin model de fitxa de laboratori és el més adient?*

Tal com diuen els companys del laboratori de l'Institut Baix a Mar, l'ideal seria que la feina del laboratori s'integrés com un tot. Per tant, el que ha de regular la pràctica amb material no és la fitxa de laboratori, sinó els objectius d'aprenentatge. La proposta pretén recobrir el currículum amb activitats manipulatives. Però estem d'acord que és convenient que l'activitat deixi rastre, de vegades en una fitxa o al quadern, d'altres amb una entrada en un bloc o amb una fotografia. S'aposta per seguir la seqüència «experimentació, descobriment, conceptualització i formalització», que descriu l'Anton Aubanell en els seus escrits. D'aquesta manera, intentem que la resolució de problemes, l'experimentació amb materials, l'exploració amb jocs..., siguin la base de l'activitat a l'aula.

Debate aquestes qüestions i d'altres com la gestió de l'espai, la continuïtat laboratori-aula, la comunicació de les experiències, la manera de compartir activitats, etc., són alguns dels objectius d'aquest grup de treball. En el futur estudiarem com compartir els seus resultats.

En resum: una línia d'impuls que recull allò que el Museu de Matemàtiques a Catalunya (MMACA) declara amb el lema «Prohibit NO tocar».

Bibliografia

Aubanell Pou, Anton. *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. Memòria de la llicència d'estudi retribuïda corresponent al curs 2005-2006 en l'especialitat de Matemàtiques. www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1005m.pdf

Alsina Català, Claudi; Aubanell Pou, Anton; Burgués Flamarich, Carme. *Tres professors de matemàtiques*. www.rosasensat.org/producte/tres-professors-de-matematiques/

Ruiz Aguilera, Dani; Rueda Portillo, Maria Àngels. *Pattern Blocks, tot un ventall de possibilitats a l'aula*. *Actes del Congrés Català d'Educació Matemàtica c2em 2016*. <https://c2em.feemcat.org/es/deveniments/pattern-blocks-tot-un-ventall-de-possibilitats-a-laula/>

Institut Baix a mar (El Garraf). *Matemàtiques marines*. Bloc. <http://matematiquesmarines.blogspot.com/>

Estimació de l'àrea sota una corba en el càlcul de Pi

Introduint el GeoGebra al laboratori de matemàtiques

Guillem Bonet Carbó i Manel Martínez Pascual

Associació Catalana de Geogebra

.....

Introducció. El GeoGebra a l'aula

Sovint, quan programem una sessió amb GeoGebra, ens la plantegem com una hora de treball només amb el programa. Ens oblidem que GeoGebra, a part de ser una bona eina per treballar la matemàtica, es pot convertir en el nostre millor aliat a l'hora de completar una investigació, encara que aquesta no estigui planificada inicialment per ser treballada amb el programa.

GeoGebra no només ens pot servir per comprovar resultats, dibuixar situacions geomètriques i fer-ne els càlculs, sinó que també pot esdevenir una eina de gran ajut per descobrir propietats matemàtiques i visualitzar algunes idees que difícilment podrien ser representades gràficament en un full de paper si no és de manera dinàmica. A més, també permet que els alumnes puguin fer les seves investigacions matemàtiques.

Precisament, aquest article seguirà la línia que acabem de definir. Us presentem una experiència d'aula realitzada per Manel Martínez a batxillerat i que es complementa molt bé amb GeoGebra. Esperem que us agradi.

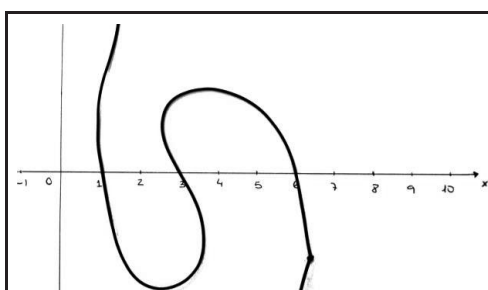
Introducció del problema

Tot seguit exposarem una seqüència d'idees per treballar amb els alumnes el concepte d'àrea sota una corba. Aquest concepte es pot generalitzar i aplicar al càlcul de l'àrea d'una superfície qualsevol. Amb tot, procurarem que sigui una superfície amb un perfil que tingui

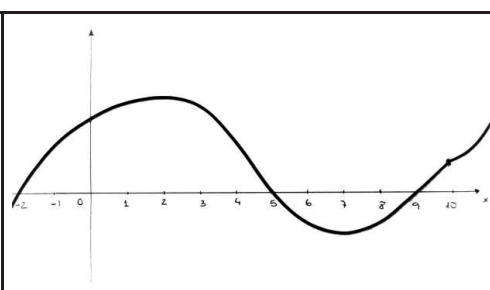
certa curvatura; en cas contrari, la resolució del problema podria ser massa senzilla i no ens serviria per al concepte que pretenem introduir. També ens interessa que la corba que s'estudii pugui expressar-se matemàticament amb una funció. Això no és imprescindible per a la primera part de l'activitat, però sí per a la darrera.

En l'activitat d'aula que us presentem, proposem als alumnes calcular, de la manera més aproximada possible, l'àrea que es troba entre una funció i l'eix de les abscisses en un interval determinat. Els alumnes es disposaran per parelles amb l'objectiu de fomentar el debat i la discussió matemàtica en aquelles situacions de conflicte que vagin sortint en les seves investigacions i, alhora, provocar l'argumentació i el consens en el moment de prendre decisions. Unes condicions idònies per treballar les competències agrupades en la dimensió de comunicació i representació.

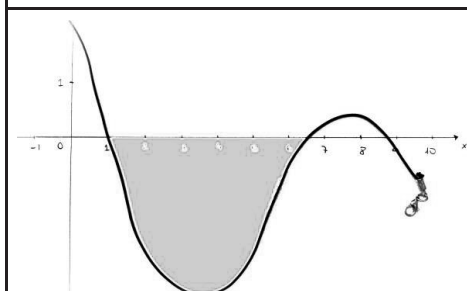
Una primera activitat ha de ser la comprensió del problema utilitzant esquemes o una representació matemàtica aproximada que els permeti identificar l'àrea que han de mesurar i, alhora, evidenciar els elements que la determinen. Per a això, facilitarem a cada parella un bon tros de cordill i un DIN-A3 on tan sols hi hauran representats els eixos de les coordenades. Amb el cordill representaran corbes i pintaran l'àrea delimitada per aquestes i pels eixos de les abscisses. En aquest moment sorgirà de manera natural quines corbes són funcions i quines no, i, a la vegada, la importància del domini a l'hora de seleccionar les àrees.



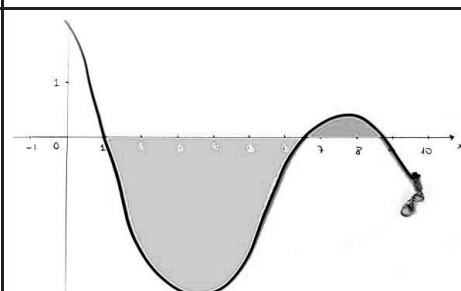
No es pot expressar com una funció.



Sí que es pot expressar com a funció.



Mesurem des de $x = 1$ fins a $x = 6,5$.



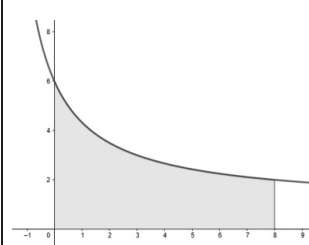
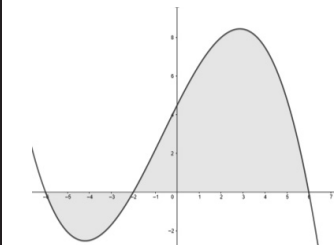
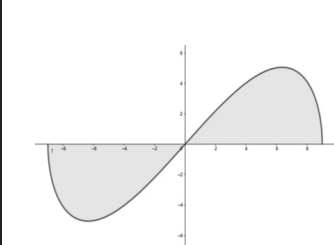
Mesurem des de $x = 1$ fins a $x = 8,75$.

Tot seguit hauran de discutir en grup petit quina serà la seva estratègia de resolució, s'hauran de plantejar com poden assolir amb èxit l'objectiu de l'activitat, aproximar l'àrea entre la funció i l'eix de la manera més exacta possible.

Amb l'objectiu d'assegurar-nos que s'adquireixen els conceptes que es treballen, assignem les funcions següents als alumnes segons el seu nivell d'assoliment habitual.

- $f_A(x) = 2 - \frac{x-8}{x+2}$ en $[0, 8]$. Funció positiva en tot aquest interval.
- $f_B(x) = \frac{(x+2)(36-x)^2}{16}$ en $[-6, 6]$. La funció agafa tant valors positius com valors negatius.
- $f_C(x) = \frac{1}{8}x\sqrt{81-x^2}$ en tot el seu domini. Funció antisimètrica amb valors positius i valors negatius.

Un cop discutit tot això, del grup petit al grup gran, els demanarem que comencin a treballar en aquesta estratègia usant una gràfica de la funció que els demanarem que representin ells amb GeoGebra i que imprimirem en un DIN-A3.

Funció A	Funció B	Funció C
$f_A(x) = 2 - \frac{x-8}{x+2}$ en $[0, 8]$	$f_B(x) = \frac{(x+2)(36-x)^2}{16}$ en $[-6, 6]$	$f_C(x) = \frac{1}{8}x\sqrt{81-x^2}$ en $[-9, 9]$
		

Un cop discutit tot això, del grup petit al grup gran, els demanarem que comencin a treballar en aquesta estratègia usant una gràfica de la funció que els demanarem que representin ells amb GeoGebra i que imprimirem en un DIN-A3.

Per dibuixar una funció $f(x)$ definida en un interval $[a, b]$ amb GeoGebra, cal usar la instrucció:

funció(f(x), a, b)

En cas que els alumnes no trobin cap solució viable per resoldre el problema, els induïrem a seguir la proposta que està desenvolupada en el punt següent.

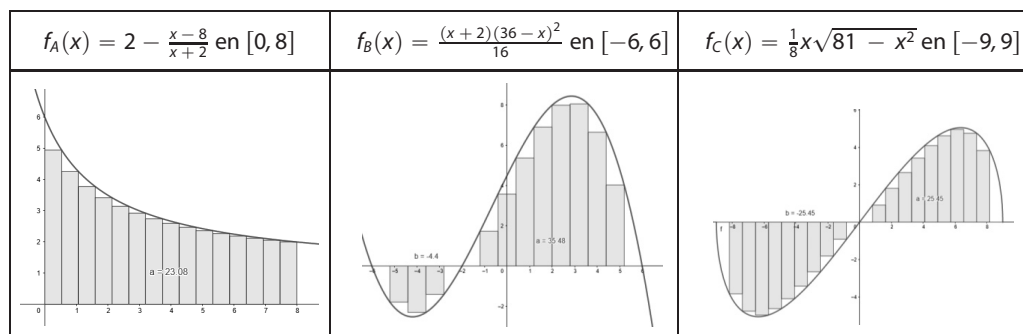
Proposta de treball d'exploració

Comencem manipulant

Un dels factors clau per entendre bé un problema és familiaritzar-se amb ell mitjançant la manipulació i descobrir a poc a poc la matemàtica que hi està implicada. Per aquest motiu, la primera proposta per aproximar l'àrea sota la corba pot consistir en la comparació amb figures senzilles, de les quals sapiguem calcular l'àrea de manera ràpida. Les millors opcions són els rectangles i els triangles. En cas que els alumnes hagin emprat una altra figura per omplir l'àrea buscada, analitzarem la situació, comentarem els pros i els contres que hi trobem i, si és el cas, els animarem a continuar amb la seva proposta.

Volem simplificar tant com sigui possible el càlcul i el muntatge del recobriment de l'àrea. Per aquest motiu, usarem rectangles que tinguin tots la mateixa base situada sobre l'eix de les abscisses.

Podem fer unes primeres estimacions de l'àrea usant tiretes de paper d'un gruix enter i determinat. Deixarem que els alumnes dedueixin que aprimant aquestes tiretes 5 cm, 3 cm, 2 cm, 1 cm..., poden ajustar millor el valor de l'àrea. Una primera consideració sobre la decisió presa serà si amb els rectangles seleccionats es podrà cobrir el domini i quines solucions aporten en cas que no es pugui, tenint en compte que hauran de mantenir sempre la mateixa amplada en tots els rectangles. Un cop consensuada la resposta, hauran de retallar les tires de paper i alhora decidir l'alçada, tot depenent de la part d'àrea que es cobreixi.



Molt probablement els alumnes decidiran l'alçada del rectangle mesurant directament en el full amb el regle. Això ens pot semblar que els aparta d'usar la funció i de treballar amb les imatges de la funció. No ens hem d'alarmar, ja que és des de l'experimentació que acabaran entenent quin paper hi té la funció. Aquesta serà una primera aproximació de l'àrea, i no serà fins que no s'hagi produït la descoberta que els alumnes estaran en condicions de formalitzar el procés seguit i expressar matemàticament el que han estat manipulant.

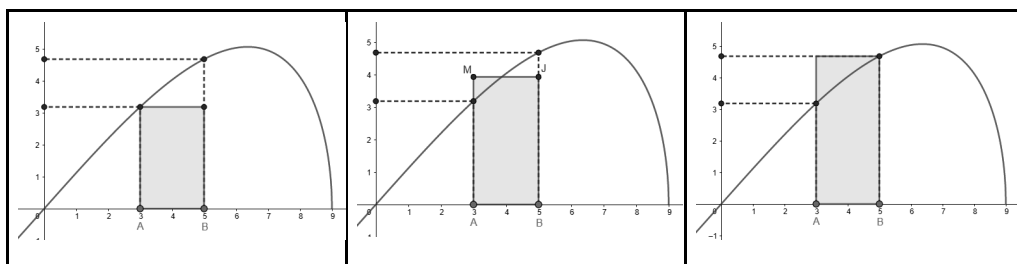
Un cop omplerta la regió amb rectangles, aproximaran la seva àrea amb la suma de les àrees de tots ells.

Pas a la formalització del procés

La formalització del procés seguit és important per dos motius: en primer lloc, l'estudiant ha de reflexionar sobre la manipulació realitzada, sobre el que ha descobert en grup, relacionant el que sap de funcions amb el que ha fet amb els rectangles; en segon lloc, cal que els alumnes aprenguin a organitzar el seu pensament i les seves idees, i a redactar i explicar el procés seguit. En aquest moment es pren consciència de tot el que s'ha fet i es dona pas a la reflexió amb l'objectiu d'introduir millores en cas que es pugui.

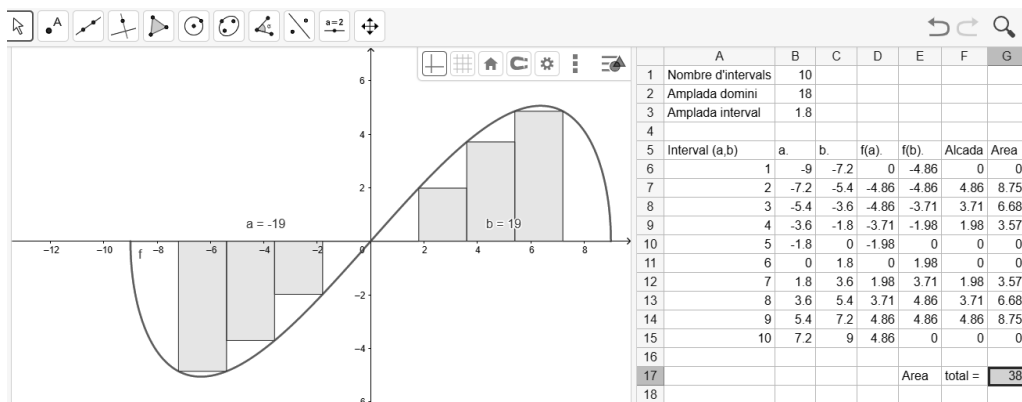
En aquest procés, els estudiants hauran deduït que l'alçada de cada rectangle ve determinada per la funció i, concretament, per la imatge d'un punt determinat de la base. L'elecció d'aquest punt també és digna d'investigació i discussió per part dels integrants del grup de treball. Per fer-ho, no els donarem cap indicació, sinó que hauran de ser ells els que prenguin les decisions en cada moment.

És a dir, posem que hem de calcular l'alçada d'un rectangle que tindrà la base entre les abscisses $x = a$ i $x = b$; la seva alçada estarà relacionada amb les imatges d'algun dels punts de l'interval $[a, b]$. Per l'experiència que tenim, els alumnes acaben consensuant raonadament quines alçades del rectangle agafen. La majoria escullen l'alçada mínima entre $f(a)$ i $f(b)$, de manera que el rectangle caigui completament dins de la regió, però si haguessin escollit la mitjana entre les dues, probablement estarien retallant l'error; cal valorar-ho. Aquí les opcions són múltiples i es produeix un tractament molt ric del control de l'error.



En el punt en què ens trobem, no caldrà calcular gaires imatges perquè els rectangles tenen prou amplada i els alumnes podran estimar l'àrea fent els càlculs a mà o amb la calculadora. En el punt següent, els intervals del domini seran molt més petits i la cosa ja es complicarà. Serà convenient llavors usar un full de càlcul; per exemple, el de GeoGebra.

Què succeirà quan la imatge doni valors negatius? Aquest serà un punt important que la manipulació amb materials ajudarà a resoldre. Mentre s'utilitzen tires de rectangles, no hi ha dubtes a l'hora de calcular àrees. És quan es relaciona l'alçada dels rectangles amb la imatge de la funció en un punt, que aquest debat sorgeix i es resol. Caldrà prendre sempre el valor absolut de les imatges.

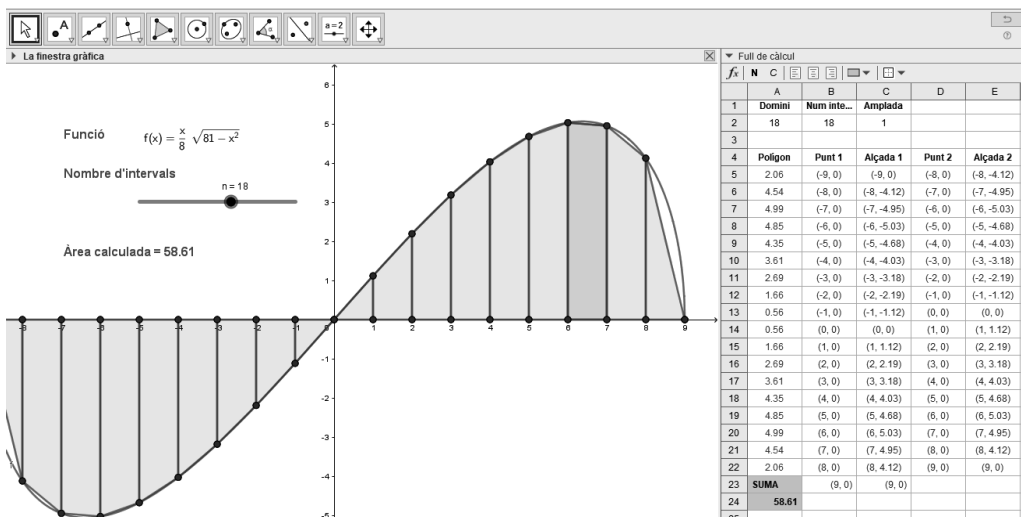


Els grups que ho necessitin, podran ampliar el que han fet experimentant; per exemple, fent un estudi sobre com varia l'àrea obtinguda en funció del punt de la base que s'ha escollit com a referència. Experimentació que, com hem comentat anteriorment, els pot portar a fitar el valor real de l'àrea i fer una primera estimació de l'error comès en l'aproximació.

Una altra ampliació interessant és provocar que els alumnes aprenguin a connectar el full de càlcul creat amb la pantalla gràfica. En aquest cas, hauran de calcular i definir els punts o vèrtexs de cada quadrilàter i crear dins la columna A (o la que sigui) del mateix full de càlcul l'element Polígon(Bk,Ck,Ek,Dk), on k és la fila on es troben els punts creats.

D'aquesta manera, a la imatge anterior s'han calculat les alçades dels rectangles amb la funció mínim o màxim, mentre que a la imatge següent no s'ha fet aquesta precisió i s'ha agafat la imatge de cada punt com a alçada del vèrtex base corresponent, per la qual cosa aquesta segona vegada s'han obtingut els trapezis que ens aproximaran l'àrea. Noteu que en aquest segon cas s'ha modificat l'ordre dels vèrtexs per aconseguir el polígon buscat.

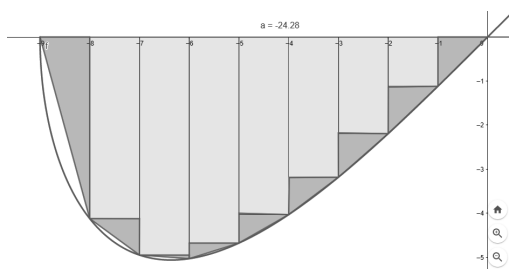
Paral·lelament, a la pantalla gràfica es dibuixen automàticament els polígons creats.



Amb aquesta idea, els alumnes visualitzen els càlculs realitzats i s'asseguren que el que han calculat és realment el que hi ha dibuixat. A l'exemple proposat, s'han calculat els trapezis sota la corba, però es podrien haver calculat els rectangles usant la funció màxim o mínim de les alçades.

Valoració del resultat

Un cop executada la proposta de resolució per part dels alumnes, ens hem de preguntar fins a quin punt el resultat trobat és fiable i òptim. Recordem que els alumnes han usat rectangles per aproximar una funció corba i que, per tant, quedaran petits espais entre la corba i els rectangles que no estaran mesurats. Ens interessa que els alumnes es preguntin com es poden cobrir aquests espais, ja que d'aquesta pregunta en sortiran de ben segur bones idees. Una podria ser cobrir els espais amb trapezis en lloc de rectangles, una altra podria ser afinar l'amplada del rectangle per ajustar-nos més a la corba.

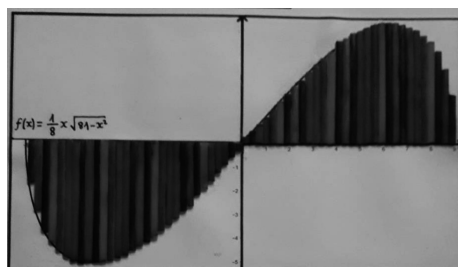


Ens fixarem que, fent-ho d'aquestes maneres, haurem aproximat el nostre resultat molt més del que ho havíem aconseguit en la resolució inicial.

Una resposta ens porta un altre problema

Un cop tenim una hipòtesi sobre el que estem treballant, ajustem la intuïció de l'alumne amb una altra pregunta: quina quantitat d'espaguetis o de tallarines cabrà sota la corba? Fem el càlcul primer i després comprovarem el resultat.

Els alumnes se les hauran d'enginyar per mesurar l'amplada d'una tallarina i d'un espagueti. Acostumen a posar-ne uns quants l'un al costat de l'altre, i a repartir l'amplada total que ocupen entre el nombre total d'unitats posades. Un cop obtingudes les amplades, apliquen el mateix mètode i els mateixos càlculs al nou problema.



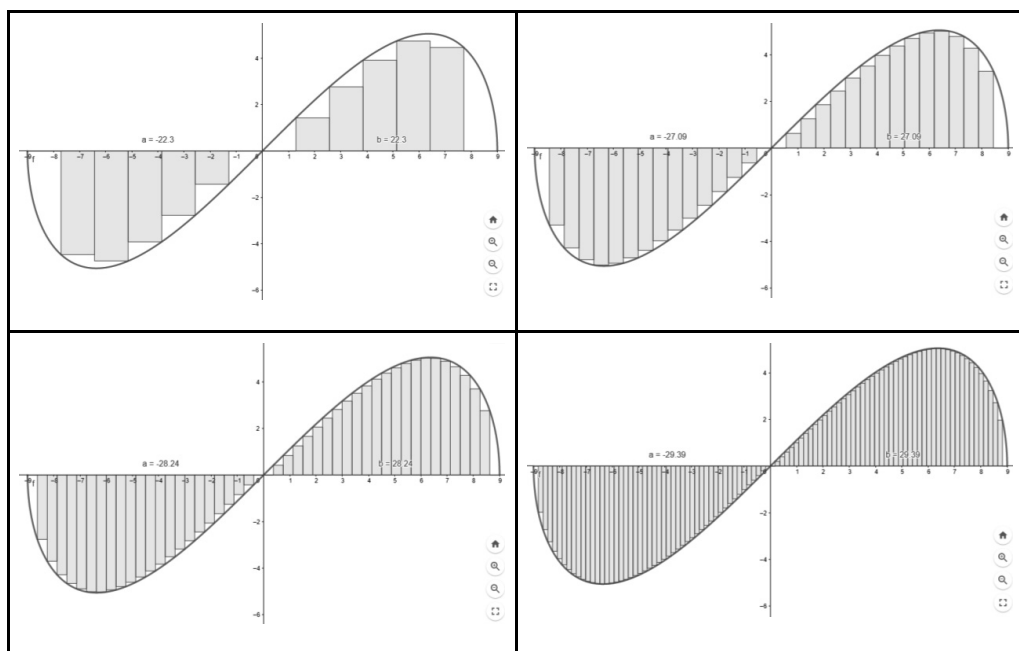
Mesura de l'àrea sota la corba mitjançant tallarines.

Observem que ara els càlculs seran molt més llargs, ja que per omplir el domini es necessiten més intervals i, per tant, més rectangles. Per aquest motiu, és molt aconsellable fer totes aquestes operacions amb el full de càlcul. S'enganxaran amb cola totes les tallarines, d'una en una, i tots els espaguetis, d'un en un, fins a recobrir tota l'àrea sota la corba, i es tallaran al punt que toca (vegeu la imatge anterior amb el resultat final).

Un darrer pas seria comprovar si els càlculs realitzats a partir de la pràctica s'ajusten als teòrics. En aquest cas, el resultat es podria validar a partir d'un càlcul senzill si sabem quant pesen els espaguetis que hi ha sota la gràfica (caldrà usar una balança de precisió) i l'àrea que cobreixen 100 g dels mateixos espaguetis. Amb tot, és convenient que els alumnes argumentin quin mètode han emprat per resoldre la situació.

Pas al límit, els intervals es fan petits

Arribats fins aquí, ens podem preguntar fins a quin punt podem millorar l'estimació de l'àrea. D'alguna manera, manipulativament hem fet tot el que hem pogut i volem fer un pas més. Geogebra acabarà ajudant en aquesta fase.



Afinant l'amplada dels rectangles per explicar el pas al límit amb GeoGebra.

En aquest cas, de manera natural després del procés seguit surt que

$$\text{Àrea buscada} = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{|f(a_k) - f(a_{k-1})|}{2}, \text{ si es treballa amb trapezis.}$$

$$\text{Àrea buscada} = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n |\max(f(a_{k-1}), f(a_k))|, \text{ si es treballa amb sumes superiors.}$$

$$\text{Àrea buscada} = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n |\text{mín}(f(a_{k-1}), f(a_k))|, \text{ si es treballa amb sumes inferiors.}$$

Com veiem, el que hem fet ha estat treballar amb els diferencials de manera natural i sense haver-los introduït.

Visualització del límit amb GeoGebra

Al punt anterior hem comentat que no podem trobar manipulativament cap aproximació més precisa de l'àrea buscada. Bé, no és del tot així. GeoGebra és una eina molt potent que ens permet visualitzar i manipular aquest pas al límit. Això ho podem fer gràcies a les funcions *SumaSuperior* i *SumaInferior*.

Per calcular i representar gràficament la suma superior o la suma inferior d'una funció $f(x)$ definida en un interval $[a, b]$ amb n subinterval, cal usar les instruccions següents:

$$\text{SumaSuperior}(f(x), a, b, n) \quad \text{i} \quad \text{SumaInferior}(f(x), a, b, n)$$

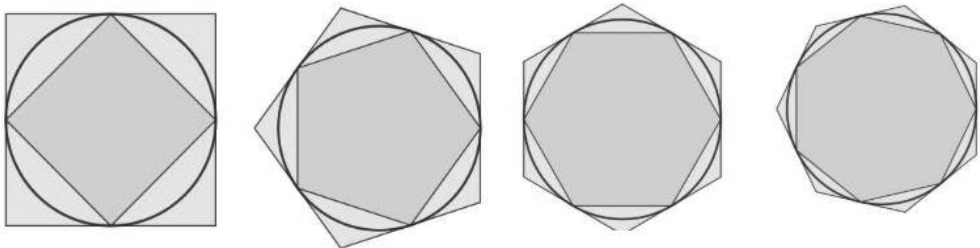
Si, a més, pretenem crear cert dinamisme, cal definir el nombre d'interval n en forma de punt lliscant que només prengui valors naturals (per exemple, des d'1 fins a 100).

Usarem les funcions *Integral*($f(x), a, b$) o *IntegralEntre*($f(x), g(x), a, b$) si el que volem és calcular el valor exacte de l'àrea definida sota una funció $f(x)$ definida en un interval $[a, b]$ o l'àrea definida entre dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ al mateix interval.

L'ús d'aquestes funcions per visualitzar l'aproximació de l'àrea amb sumes inferiors i superiors serà el pas que necessiten els nostres alumnes per acabar de copsar el pas al límit descrit.

Referents històrics

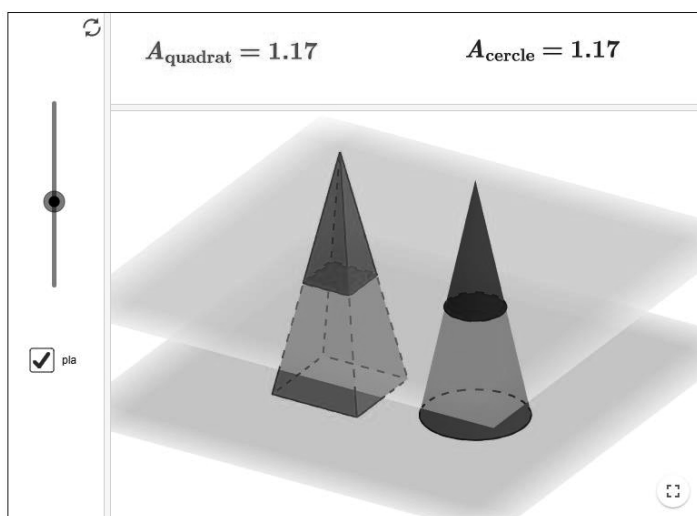
El mètode que hem usat per apropar-nos a la integral i aproximar una àrea curvilínia donada és en realitat molt antic. Una idea molt semblant a aquesta va ser usada per Èudox de Cnidos (s. IV aC) per aproximar de manera exhaustiva àrees i volums a través d'una successió de polígons d'àrea coneguda que convergien en l'àrea buscada.



Idea d'Arquimedes per aproximar l'àrea d'un cercle.

El mateix mètode va ser usat pocs anys més tard per Arquímedes (s. iii aC), que el va emprar per trobar una aproximació de π , fitant-lo entre $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ a través del càlcul d'àrees de polígons regulars que s'aproximaven a la circumferència (vegeu la imatge superior). També va treballar en el càlcul d'un segment d'espiral i en el de l'àrea d'un segment de paràbola (si voleu treballar aquest darrer, us aconsellem la miniaplicació de GeoGebra d'E.M. Fernández Aguilar, titulada «La cuadratura de la parábola de Arquímedes»: www.geogebra.org/m/uNRgJDvJ). Poc més tard, a la Xina, Liu Hui i Zu Chongzhi usaven aquest mateix mètode d'exhaustió per aproximar, respectivament, l'àrea del cercle i el volum d'una esfera.

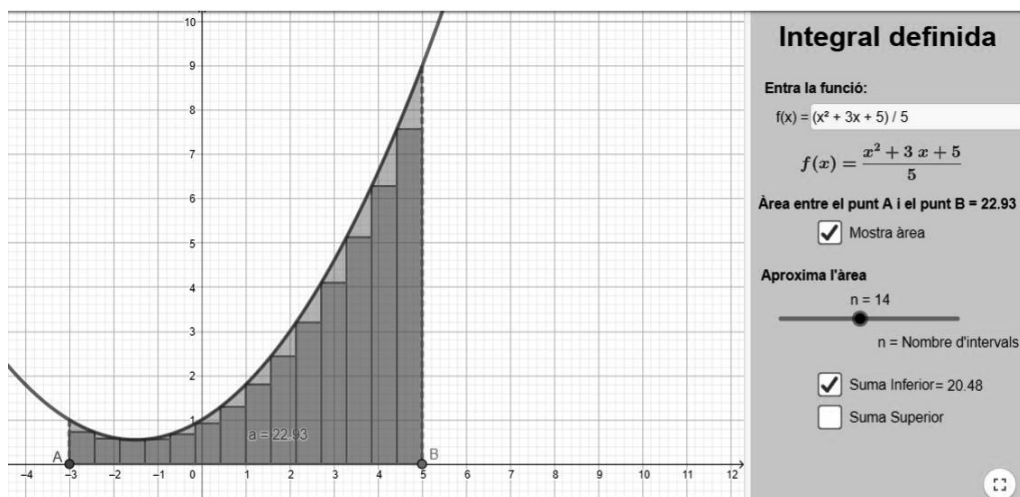
Molt més endavant, ja al segle XVI, Cavalieri va fer servir la idea del mètode d'exhaustió d'Èudox per deduir el que avui coneixem com a principi de Cavalieri: «Si dos cossos de la mateixa alçada són tallats per plans paral·lels a les seves bases i produeixen regions d'igual àrea, tenen el mateix volum».



Miniaplicació de Juli Jurado Llamas que ajuda a visualitzar el principi de Cavalieri.

Per treballar el principi de Cavalieri podeu mirar el llibre de GeoGebra de Ramon Nolla, titulat *Sobre àrees i volums* (www.geogebra.org/m/wqsyzHAa) o l'applet de Juli Jurado Llamas titulada *Volum d'un con - Cavalieri* (www.geogebra.org/m/h2GVAbYP) (veg. la imatge anterior). Després de Cavalieri, la teoria va passar per Newton i Leibnitz, que amb el teorema fonamental del càlcul van posar marc al que va ser la teoria del càlcul infinitesimal. Posteriorment, Riemann i després Lebesgue van recollir el treball dels seus predecessors i van establir amb rigor el càlcul integral.

En aquest cas, per treballar les integrals de Riemann recomanem les miniaplicacions de Guillem Bonet sobre integrals definides (www.geogebra.org/m/AR9EN8TS), a la imatge, o la de Raül Fernández *La integral definida* (www.geogebra.org/m/Td2Qtm2Z), que inclou també una comprovació de la integral amb la regla de Barrow.



Miniaplicació de Guillem Bonet per treballar les integrals de Riemann.

Conclusions i recomanacions

Com segurament deueu haver deduït, aquesta proposta d'activitat no és més que una descoberta del mètode de Riemann, on els alumnes de batxillerat, sense necessitat de grans coneixements previs, van descobrir tots els detalls del mètode, com ara els càlculs infinitedimals, les sumes superiors o les inferiors..., seguint les fases d'experimentació, descoberta, conceptualització i formalització que el professor Anton Aubanell esmenta que ha de tenir tot bon recurs didàctic.

L'experimentació s'ha dut a terme amb materials manipulatius i amb GeoGebra. Destaquem la importància d'haver emprat els dos suports i d'extreure de cadascun d'ells l'ajut necessari per fer les investigacions corresponents. La visualització dels resultats que es van obtenir, així com la de cadascuna de les etapes que conformen l'estudi, mostren que la matemàtica també pot ser presentada com una ciència experimental, i això permet als nostres alumnes treballar i desenvolupar les competències que la constitueixen.

Referències

Aubanell Pou, Anton. «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria». *Quaderns d'Avaluació*, 31.

Aubanell Pou, Anton. *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. Llicència d'estudis. 2005-2006.

Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Educació secundària. Departament d'Educació.

mmaca

el racó del mmaca

Jocs de simetria arreu

Enric Brasó Campderrós i Carlos Luna-Mota

Museu de Matemàtiques de Catalunya, MMACA

Introducció

Aprofitant l'efemèride d'un dia tan palindròmic com el 02/02/2020, volem donar a conèixer una família de trencaclosques que ha guanyat cert renom internacional i amb la qual hem estat experimentant recentment (Ramellini, 2019): els jocs de simetria.

Un joc de simetria és un tipus particular de trencaclosques que té les característiques següents:

- El joc està format per un conjunt de peces planes.
- L'objectiu és formar una figura plana amb simetria, normalment axial.
- Les peces no es poden superposar les unes a les altres.
- Si no es diu el contrari, cal fer servir totes les peces.

En tots els jocs que presentarem en aquest article cal fer servir totes les peces per formar figures amb simetria axial. En els casos en què hi hagi més d'una solució, calgui fer servir un subconjunt de les peces o la figura resultant hagi de tenir simetria rotacional, així ho explicarem.

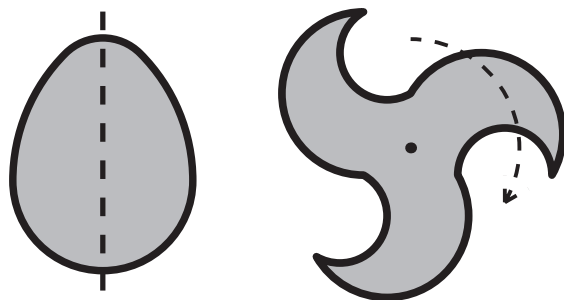


Figura 1. Figures amb simetria axial (esquerra) i amb simetria rotacional (dreta).

L'element característic que distingeix aquest tipus de trencaclosques d'altres de semblants és la imprecisió del seu objectiu. Allà on altres trencaclosques permeten un atac sistemàtic del problema que s'ha de resoldre, aquí ens trobem sovint amb un oceà de possibilitats i molt d'assaig i error. De fet, està demostrat que resoldre'ls, en general, és un problema computacionalment intractable (Demaine *et al.*, 2015).

Per exemple, quan mirem de cobrir una silueta particular amb les peces del tangram, sempre és una bona idea cercar o bé les parts més amples de la silueta (per tal d'encabir-hi els triangles grans), o bé les parts més estretes (que necessàriament s'hauran de cobrir amb les peces més petites). Aquesta manera sistemàtica d'atacar un trencaclosques "començant per les cantonades" gairebé mai no es pot aplicar als jocs de simetria i, per tant, la seva resolució acostuma a ser més difícil del que es podria pensar a primer cop d'ull.

De fet, és precisament aquest contrast entre la simplicitat de les regles i la dificultat de la resolució el que fa especialment atractiu aquest tipus de jocs i permet trobar reptes interessants amb només dues peces. Per exemple, el dissenyador japonès Hiroshi Yamamoto va assenyalar que amb la peça més gran (pentàgon) i amb la peça més petita (triangle) del famós trencaclosques de la T es poden formar dues figures diferents amb simetria axial (Demaine *et al.*, 2015).

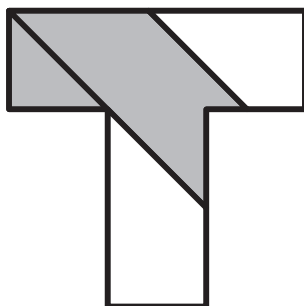


Figura 2. El trencaclosques de la T, amb el pentàgon i el triangle destacats.

A la figura 2 podeu veure les quatre peces del trencaclosques de la T amb les dues peces que heu de fer servir destacades. Al final de l'article trobareu les dues solucions d'aquest joc de simetria, però us recomanem que intenteu resoldre'l abans de seguir llegint per tal que pugueu entendre com de difícils poden ser aquest tipus de reptes i com de necessàries són les adaptacions que proposem de cara a fer-los servir en entorns educatius. De la resta de jocs que apareixen en aquest article, no en donarem cap solució per respecte als seus autors i per tal de donar al lector l'oportunitat de trobar-les pel seu compte.

Jocs de simetria a casa

El gran atractiu intel·lectual dels jocs de simetria fa que hagin tingut força èxit en concursos internacionals de jocs d'enginy, com ara la Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition, on cada any acostuma a presentar-se'n algun de nou. Malauradament, però, encara avui dia és difícil trobar-los a les botigues i sovint no queda més remei que visitar pàgines web especialitzades o contactar directament amb els dissenyadors per adquirir-ne una còpia.

Per sort, la gran majoria d'aquests jocs consten de poques peces, que a més a més tenen una natura geomètrica senzilla (fragments de quadrat, fragments de triangle equilàter, cercles...). En conseqüència, resulta raonablement fàcil fabricar-les a casa amb cartró o goma EVA o, si disposem d'eines més sofisticades, fer servir una talladora làser o una impressora en 3D per fer-ne una còpia. En qualsevol cas, qui vulgui provar immediatament algun dels jocs presentats en aquest article, pot fer servir els retallables que trobarà a: <http://mmaca.cat/docs/simetriesretallables.pdf>.

Així, si el nostre objectiu és, simplement, passar una estona entretinguts a casa, hem d'escollir jocs de simetria que siguin fàcils de construir i molt difícils de resoldre. Un dels millors exemples és l'**Ex 3**, del mateix Hiroshi Yamamoto, que va guanyar una menció d'honor del jurat a la Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition del 2010 (Rausch, 2010).

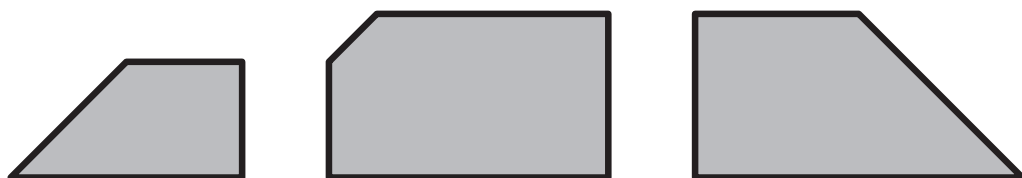


Figura 3. Ex 3 (©Hiroshi Yamamoto).

Un altre punt que cal tenir en compte és que el joc que fabriquem proporcioni més d'un repte i, per tant, més entreteniment pel mateix preu. Aquest és el cas del **Think Twice**, de Vladimir Krasnoukhov (Rausch, 2016), que té dues solucions que són prou diferents entre si perquè trobar-ne una no doni gaires pistes sobre com serà l'altra.

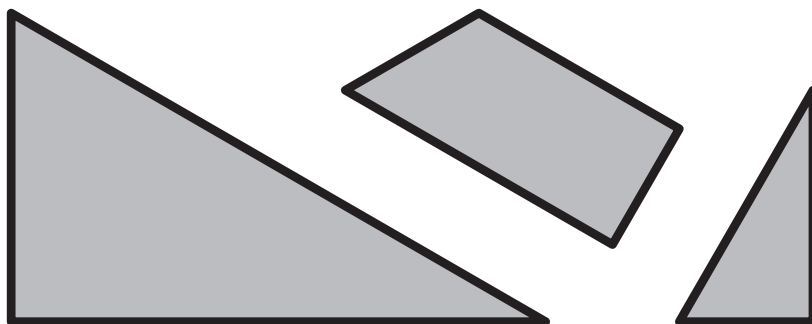


Figura 4. Think Twice (©Vladimir Krasnoukhov).

Encara millor és el **Symmetrix**, de Tadao Kitazawa, que l'any 2003 va inaugurar aquesta família de trencaclosques (Demaine *et al.*, 2015) i que proporciona tres reptes diferents:

- Fer una figura simètrica amb dues de les quatre peces.
- Fer una figura simètrica amb tres de les quatre peces.
- Fer una figura simètrica amb totes quatre peces.

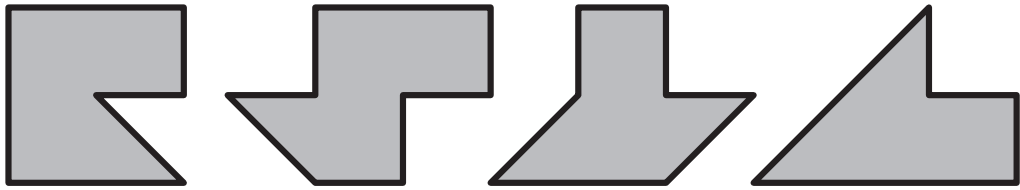


Figura 5. Symmetrix (©Tadao Kitazawa).

El fet d'haver d'escollir quines peces necessitem per resoldre els problemes *menors* compensa amb escriure que facin servir menys peces, i tots tres reptes acaben resultant igualment interessants.

Jocs de simetria al Museu

Si l'objectiu no és entretenir-se (o fer un regal enverinat a un conegut), el criteri canvia. Al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), per exemple, no ens podem permetre fer una exposició en què cada persona dediqui una hora a cada mòdul i seleccionem els materials de manera que els visitants puguin aprendre matemàtiques (sovint sense adonar-se'n) alhora que es diverteixen. Així doncs, els criteris canvien i cal adaptar els trencaclosques al nostre llenguatge expositiu.

Per exemple, quan vam descobrir el **3-4-5 Symmetry**, de Donald Bell (Bell, 2015), vam estar d'acord que era un trencaclosques molt interessant perquè ens permetia treballar no només la simetria axial, sinó també el teorema de Pitàgores i el càlcul mental.

Malauradament, es tracta d'un trencaclosques força difícil i calia adaptar-lo abans de fer-lo servir. Per això vam afegir unes marques als costats dels cinc triangles. L'objectiu és doble: d'una banda, evidenciar les mides de cada peça per donar pistes sobre com s'ha d'atacar el problema i permetre a l'usuari comprovar si una determinada figura és simètrica o no; d'altra banda, transformar un problema continu (com encaixar dos triangles) en un problema discret (com encaixar dos triangles de manera que les marques quedin alineades) per reduir la complexitat del repte.

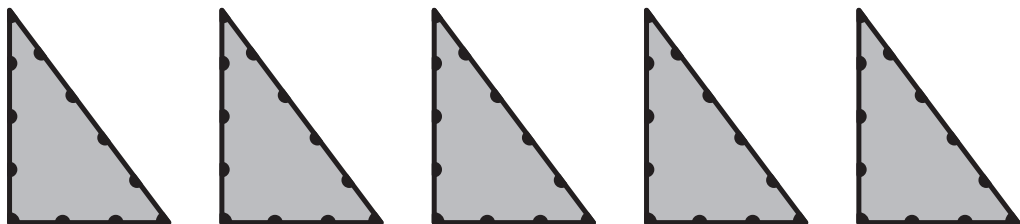


Figura 6. 3-4-5 Symmetry (©Donald Bell), amb marques afegides als costats.

De vegades no n'hi ha prou amb discretitzar un problema i cal simplificar-lo encara més. Per exemple, el **Bitten Biscuits**, de Jin-Hoo Ahn, és un joc de simetria molt difícil que admet dues solucions i que va guanyar una menció d'honor del jurat a la Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition del 2016 (Rausch, 2016).

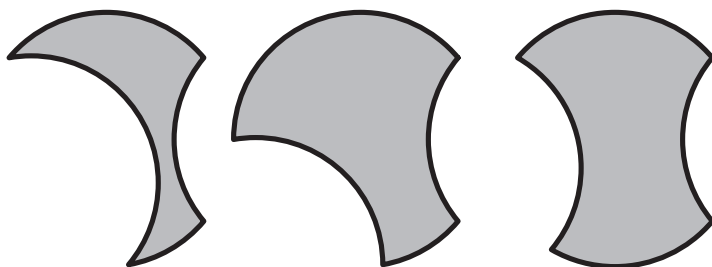


Figura 7a. Bitten Biscuits (©Jin-Hoo Ahn).

La clau per resoldre'l és adonar-se que tots els arcs de circumferència implicats són múltiples de 20° . A partir d'aquesta dada no és difícil obtenir una versió molt més tractable i fàcil de fabricar simplement transformant els arcs de circumferència en arcs d'octadecàgon regular.

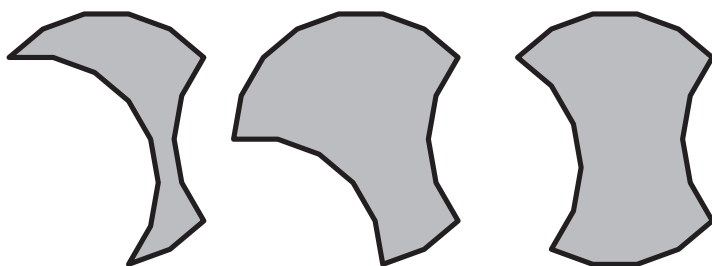


Figura 7b. Bitten Biscuits (©Jin-Hoo Ahn), discretitzat.

El problema, però, segueix sent força difícil i la geometria de l'octadecàgon no ens interessava prou, de manera que vam decidir simplificar-lo encara més fent una nova versió basada en dodecàgons regulars, aquests sí, molt més familiars i interessants per al nostre públic.

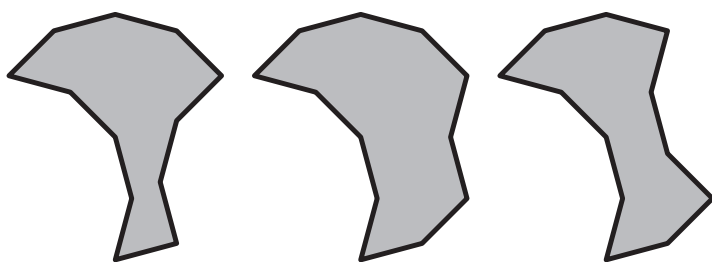


Figura 7c. Bitten Biscuits (©Jin-Hoo Ahn), discretitzat i simplificat.

Una manera diferent de simplificar el problema és la que vam fer servir amb el **SYM-353**, de Jerry Loo i Stanislav Knot (Rausch, 2017), un joc format per tres peces que admet quatre solucions diferents. Afegint unes marques addicionals a la peça pentagonal podem regular la dificultat del repte: si no donem cap altra informació, les marques ajuden el visitant a entendre les dimensions i la natura geomètrica de les peces (que estan formades per fragments de triangles equilàters), mentre que si afegim que les quatre línies són, precisament, els quatre eixos de simetria de les quatre solucions d'aquest joc, aconseguim simplificar prou el repte perquè tothom el pugui afrontar amb èxit.

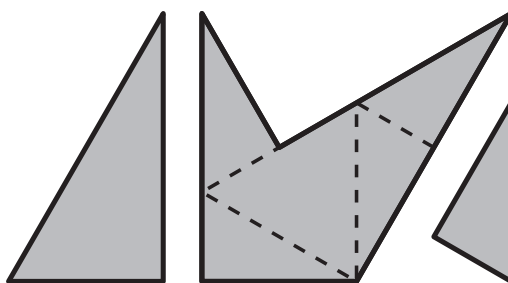


Figura 8. SYM-353 (©Jerry Loo & Stanislav Knot), amb marques afegides al pentàgon.

Els jocs de simetria que tenen un excés de solucions presenten un problema ben diferent. En aquests casos acostuma a haver-hi un grapat de solucions més o menys òbvies i d'altres extremament difícils de trobar. Així doncs, no és satisfactori demanar al visitant que en trobi només una (seria massa fàcil) o que les trobi totes (seria massa difícil).

Una manera tradicional de resoldre aquest problema consisteix a acompanyar el joc d'un cartell on apareixen algunes solucions que no ens interessen (o bé perquè són massa fàcils o bé perquè són massa difícils) i demanar al visitant que en trobi alguna de diferent (i, per tant, alguna del rang de dificultat que volem treballar). Una altra manera, molt més elegant i temàtica, és la que va fer servir Vladimir Krasnoukhov en el seu joc **Symm-Aster** (Stegmann, 2019).

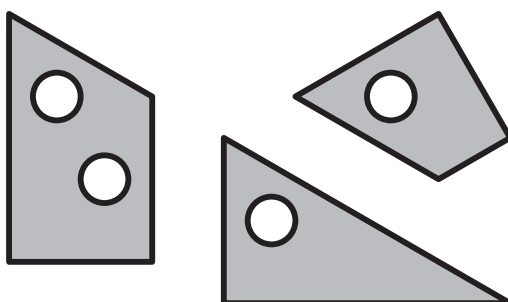


Figura 9. Symm-Aster (©Vladimir Krasnoukhov).

En aquest joc s'afegeixen una sèrie de forats a les peces i es demana trobar solucions que també respectin la simetria d'aquests forats. D'aquesta manera, el **Symm-Aster** va passar de tenir nou solucions amb simetria axial i tres més amb simetria rotacional, a tenir-ne només cinc i una, respectivament.

Nosaltres hem aplicat la mateixa filosofia al **Multi-Symmetrics-2**, del mateix Vladimir Krasnoukhov (Krasnoukhov, comunicació personal, 10 de juny de 2019), afegint un únic forat i imposant que l'eix de simetria de les figures hi passi per sobre. Amb aquesta senzilla modificació s'eliminen dos terços de les solucions possibles, però es conserven les que ens semblen més interessants (dos heptàgons, un octàgon, un enneàgon, un decàgon, un dodecàgon i un tridecàgon). Addicionalment es dona un punt de partida sòlid al visitant, "l'eix de simetria creua aquest punt", a partir del qual pot construir alguna d'aquestes solucions de manera sistemàtica.

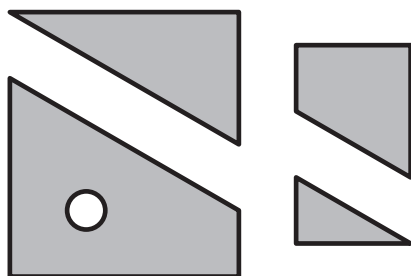


Figura 10. Multi-Symmetrics-2 (©Vladimir Krasnoukhov), amb un forat afegit.

Jocs de simetria a l'aula

Finalment, si l'objectiu és treballar a l'aula amb jocs de simetria, haurem de tenir en compte altres criteris. Un dels més determinants serà el preu del material i el temps que tardarem a fabricar el joc, ja que serà imprescindible que cada alumne (o petit grup d'alumnes) disposi de la seva còpia del trencaclosques durant tota l'activitat.

Una possible solució és fer servir materials didàctics que ja tinguem al nostre centre, com ara els pentòminos. Si disposem d'un joc de pentòminos per a cada grup, podem improvisar (potser dins d'una activitat més àmplia que faci servir aquest material) un parell de jocs de simetria *ready-made*: el **Crab Puzzle**, de Vladimir Krasnoukhov (Stegmann, 2019), i el **Symptomino**, de Peter Gal (Rausch, 2014).

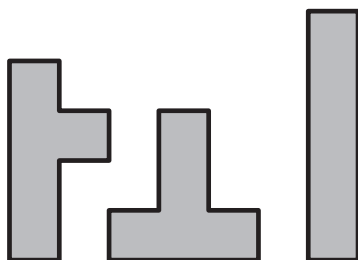


Figura 11. Crab Puzzle (©Vladimir Krasnoukhov).

En el primer cas, es tracta de fer una figura simètrica amb els pentòminos I, T i Y, mentre que en el segon es fan servir els pentòminos W, X, Y i Z per oferir tres reptes:

- Fer una figura simètrica amb dos d'aquests quatre pentòminos.
- Fer una figura simètrica amb tres d'aquests quatre pentòminos.
- Fer una figura simètrica amb tots quatre pentòminos.

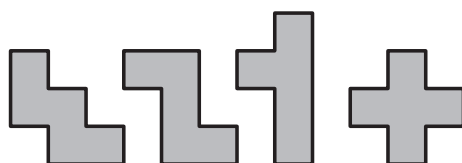


Figura 12. Symptomino (©Peter Gal).

Si disposem de diversos jocs complets de pentòminos, també podem mirar de resoldre alguna de les **Pentomino Oddities** proposades per Mike Reid (Sicherman, 1997a): formar figures amb simetria axial fent servir un nombre senar de pentòminos idèntics.

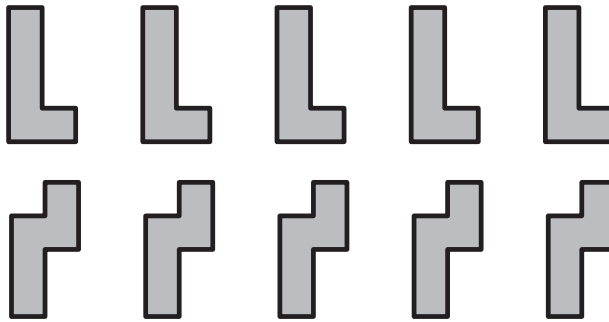


Figura 13. Dos exemples de Pentomino Oddities: 5L i 5N (©Mike Reid).

Una altra possible solució és fer servir materials de construcció (policubs) per fabricar les peces de manera temporal. Per obtenir els millors resultats, cal escollir jocs de simetria de natura quadriculada que compleixin dues condicions:

- Que facin servir un nombre reduït de cubs en total perquè puguem fabricar prou còpies amb els cubs de què disposem.
- Que puguem formar un *cicle*, de manera que cap connexió mascle sobresurti de les peces, un cop construïdes, per tal d'evitar problemes d'encaix o peces que ballin sobre la taula.

Afortunadament, aquestes dues condicions les compleixen un bon nombre de jocs de simetria. Podem trobar una recopilació especialment interessant a la pàgina que George Sicherman dedica a les **Polyomino Oddities** (Sicherman, 1997b).

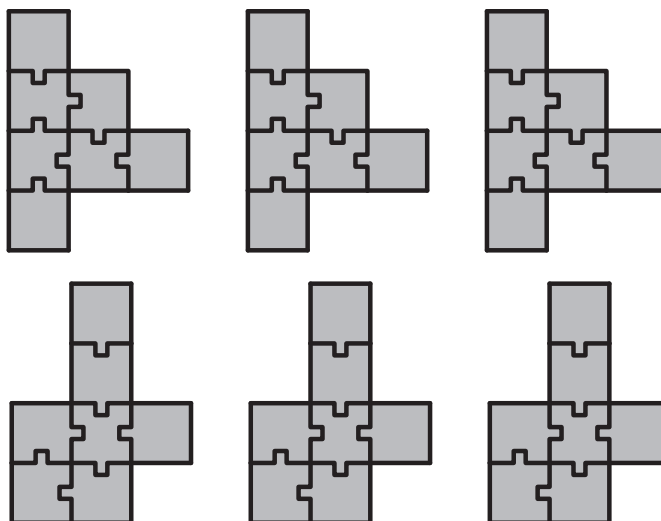


Figura 14. Dos exemples de Polyomino Oddities (©George Sicherman).

Fer servir jocs de simetria *quadriculats* no només facilita la fabricació de les peces, sinó que també ens permet treballar amb coordenades cartesianes, calcular àrees i perímetres amb facilitat, representar les solucions en una llibreta quadriculada i, fins i tot, treballar amb aquest tipus de joc sense fabricar les peces físicament. L'activitat següent exemplifica alguns d'aquests avantatges:

1. Utilitzant una graella quadriculada, dibuixeu una figura de 30 quadrats unitat d'àrea que tingui un eix de simetria (l'eix pot estar inclinat 45°). Procureu que sigui una figura relativament complicada (no feu un rectangle!).
2. Penseu com podeu dividir la figura anterior en dos trossos d'àrea 15 o en tres trossos d'àrea 10 d'una forma original i poc evident (no trenqueu la figura per l'eix de simetria!).
3. Dibuixeu les peces en un full a part, retalleu-les i passeu-les a un company, que haurà d'intentar reconstruir la figura inicial.

Treballar amb la quadrícula també redueix, en general, la dificultat dels jocs per diversos motius:

- La quadrícula és un entorn familiar per a l'alumne.
- El problema queda automàticament discretitzat.
- Redueix el nombre potencial d'eixos de simetria.

Tenint en compte aquests avantatges, fins i tot ens pot interessar quadricular un joc de simetria que no ho sigui en origen. És el que vam fer amb el **SymmeTrick**, de Vesa Timonen, un dels trencaclosques més votats a la Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition del 2013 (Rausch, 2013).

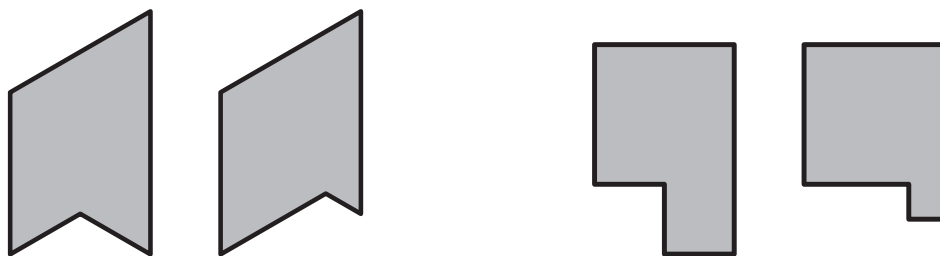


Figura 15. Esquerra: SymmeTrick (©Vesa Timonen). Dreta: SymmeTrick quadriculat.

Els jocs de simetria són un recurs més que hi ha a la nostra disposició i sempre que tinguem cura de seleccionar-los i adaptar-los a cada ús, podem fer-los servir en l'àmbit privat, en museus i a l'aula per treballar nocions geomètriques com ara els diferents tipus de simetria o el càlcul d'angles, distàncies i àrees de les peces.

Us convidem a resoldre tots els jocs proposats en aquest article, a buscar-ne de nous a la xarxa i a adaptar-los a les vostres necessitats. De ben segur que us proporcionaran moltes hores d'entreteniment i un bon grapat d'idees per aplicar a classe.

Ah! I no ens n'hem oblidat, aquí teniu la solució del primer repte:



Figura 16. Les dues solucions del repte de la figura 2.

Referències

Bell, D. (2015). *Curious and Interesting Triangles*. Disponible en línia a: <https://mathsjam.com/assets/talks/2015/DonaldBell-CuriousTriangles.pdf>.

Demaine, E.D.; Korman, M.; Ku, J.S.; Mitchell, J.S.; Otachi, Y.; Renssen, A.V.; Roeloffzen, M.; Uehara, R.; Uno, Y. (2015). "Symmetric Assembly Puzzles are Hard, Beyond a Few Pieces". A: *Revised Papers from the 18th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCGG 2015)*, p. 180-192 (Lecture Notes in Computer Science, 9943).

Ramellini, G. (2019). "¿Con qué juega la gente del MMACA?". *Suma*, 92, p. 61-66.

Rausch, J. (2010). "2010 Puzzle Design Competition Entries". A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. <https://johnrausch.com/DesignCompetition/2010/>.

Rausch, J. (2013). "2013 Puzzle Design Competition Entries". A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. <https://johnrausch.com/DesignCompetition/2013/>.

Rausch, J. (2014). "2014 Puzzle Design Competition Entries". A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. <https://johnrausch.com/DesignCompetition/2014/>.

Rausch, J. (2016). "2016 Puzzle Design Competition Entries". A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. <https://johnrausch.com/DesignCompetition/2016/>.

Rausch, J. (2017). "2017 Puzzle Design Competition Entries". A: Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition Home Page. <https://johnrausch.com/DesignCompetition/2017/>.

Sicherman, G. (1997a). "Pentomino Oddities". A: Col. Sicherman's Home Page. www.recmath.org/PolyCur/pentodd/.

Sicherman, G. (1997b). "Polyomino Oddities". A: Col. Sicherman's Home Page. www.recmath.org/PolyCur/oddities/.

Stegmann, R. (2019). "Assembly". A: Rob's Puzzle Page. <http://robspuzzlepage.com/>.

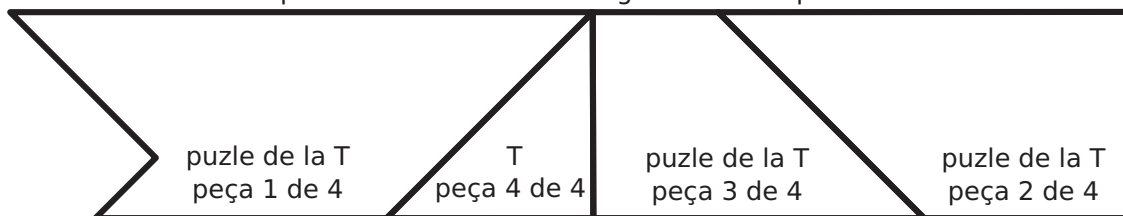
ANNEX RETALLABLE a l'article **Jocs de simetria arreu**

d'Enric Brasó i Carlos Luna-Mota (MMACA) al NOUBIAIX 46
descarregable a <http://mmaca.cat/docs/simetriesretallables.pdf>.

Retalleu les peces seguint el centre de les línies d'1 mm de gruix 

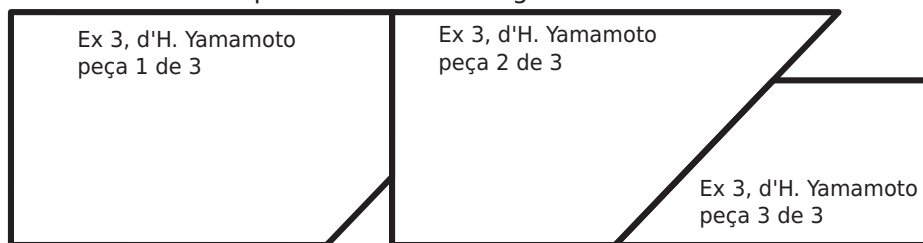
Trencaclosques de la T

- Amb les quatre peces formeu una T.
- Amb les peces 1 i 4 formeu dues figures simètriques.



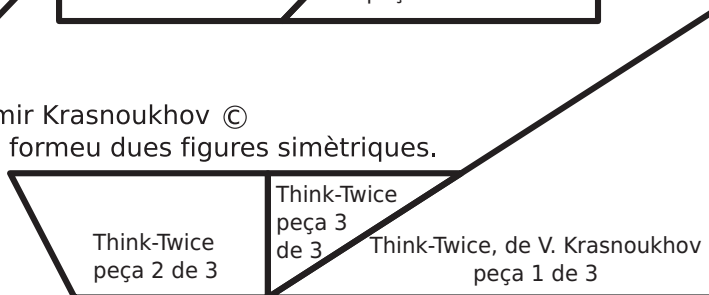
Ex 3, d'Hiroshi Yamamoto ©

- Amb les peces 1 i 3 formeu una figura simètrica.
- Amb les peces 2 i 3 formeu una figura simètrica.
- Amb les tres peces formeu una figura simètrica.



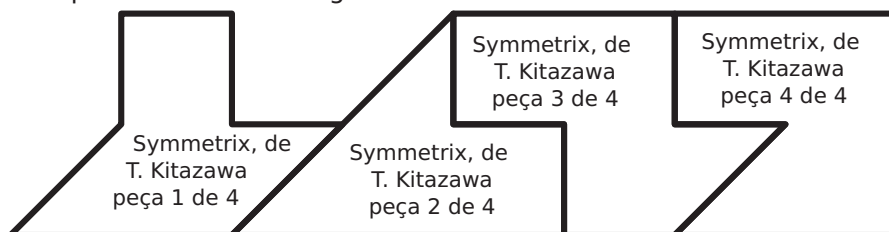
Think-Twice, de Vladimir Krasnoukhov ©

- Amb les tres peces formeu dues figures simètriques.



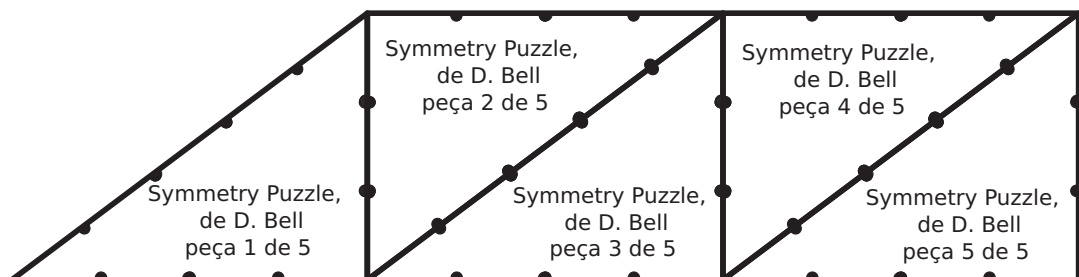
Symmetrix, de Tadao Kitazawa ©

- Amb les quatre peces formeu una figura simètrica.
- Amb tres peces formeu una figura simètrica.
- Amb dues peces formeu una figura simètrica.



3-4-5 Symmetry Puzzle, de Donald Bell©

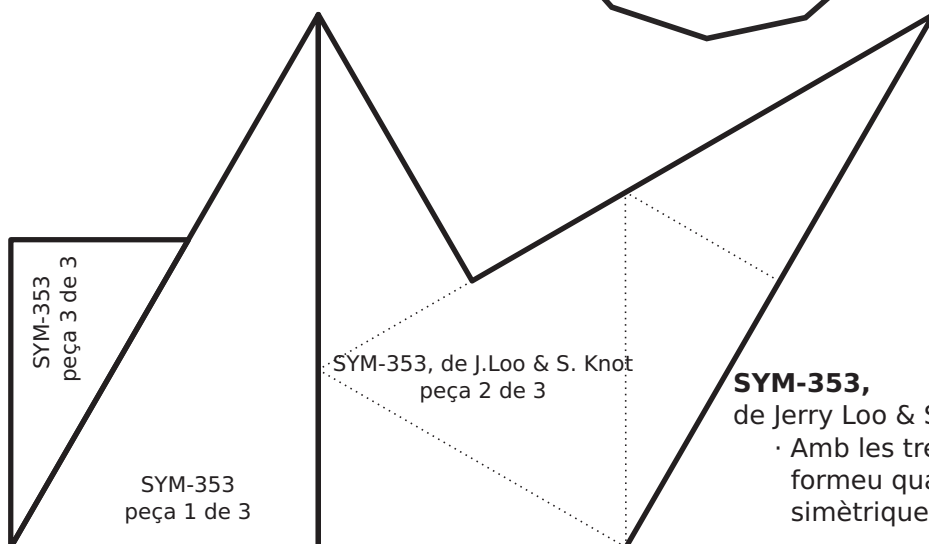
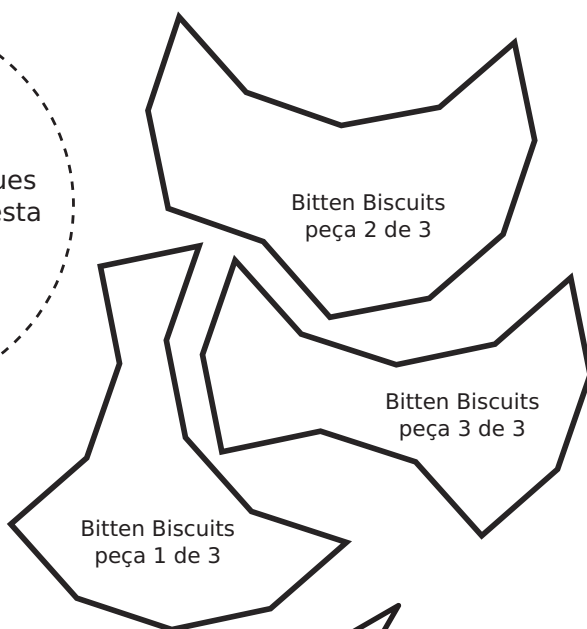
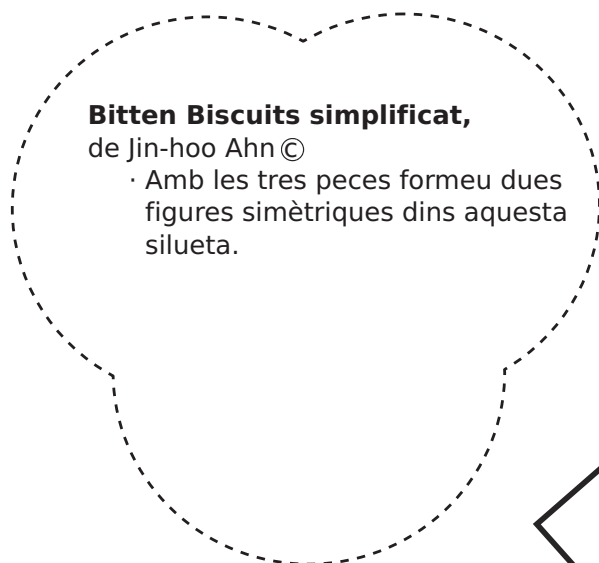
- Amb els cinc triangles formeu una figura simètrica.



Bitten Biscuits simplificat,

de Jin-hoo Ahn©

- Amb les tres peces formeu dues figures simètriques dins aquesta silueta.



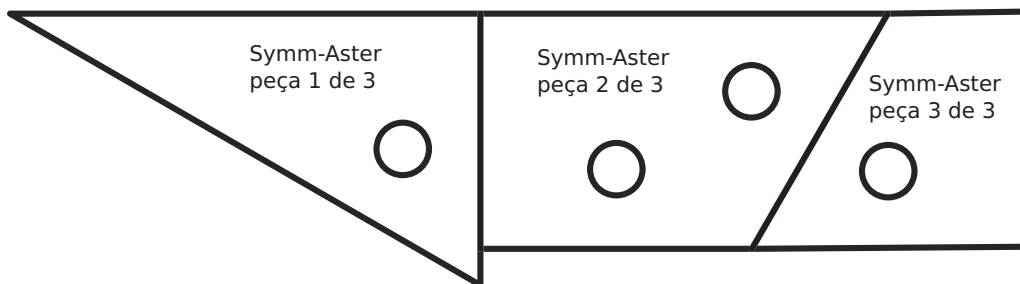
SYM-353,

de Jerry Loo & Stanislav Knot©

- Amb les tres peces formeu quatre figures simètriques.

Symm-Aster, de Vladimir Krasnoukhov ©

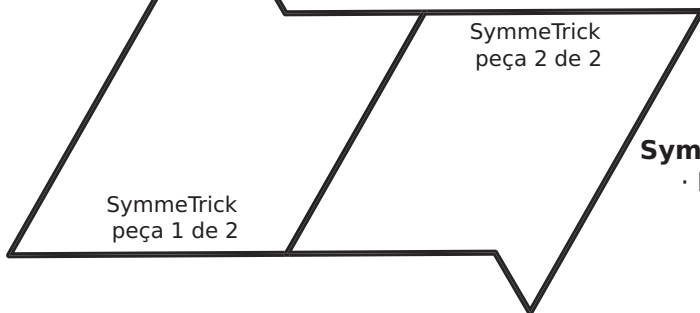
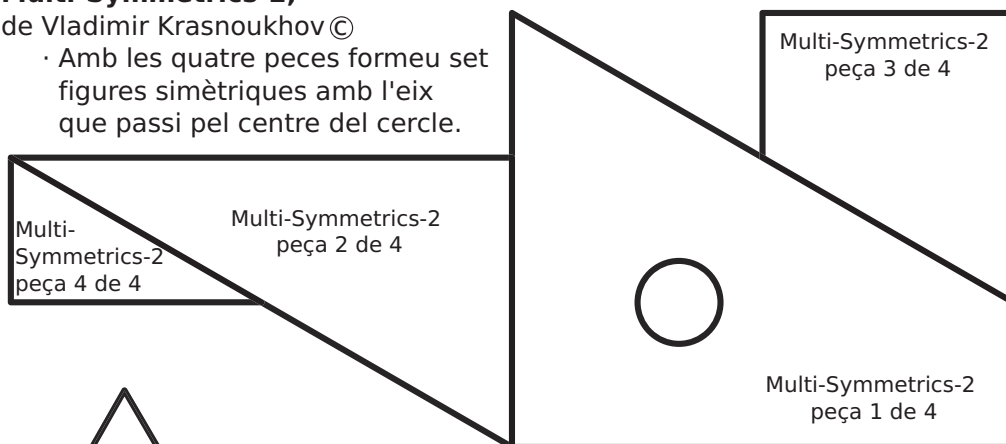
- Amb les tres peces formeu cinc figures amb simetria especular.
- Amb les tres peces formeu una figura amb simetria central.



Multi-Symmetrics-2,

de Vladimir Krasnoukhov ©

- Amb les quatre peces formeu set figures simètriques amb l'eix que passi pel centre del cercle.

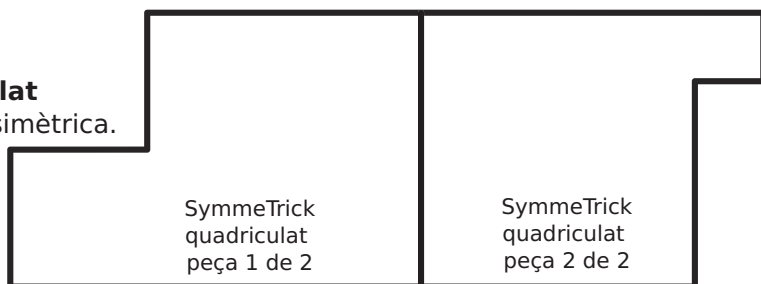


SymmeTrick, de Vesa Timonen ©

- Formeu una figura simètrica.

SymmeTrick quadriculat

- Formeu una figura simètrica.



Normes per a la presentació de contribucions

1. La revista *Nou Bixa* accepta per a la seva publicació contribucions originals relacionades amb experiències didàctiques, activitats d'ensenyament i aprenentatge, escrits d'opinió, de divulgació i d'investigació en el camp de la matemàtica i el seu ensenyament en qualsevol nivell educatiu.
2. Les contribucions rebudes seran avaluades prèviament per dos especialistes reconeguts. L'acceptació de la publicació serà notificada directament a l'autor amb una indicació de la data aproximada de publicació. En el cas que una comunicació no sigui acceptada, també es notificarà a l'autor.
3. Per a la presentació de treballs originals, l'autor trametrà a l'adreça noubixa@gmail.com un arxiu, en Word o en LaTeX, amb un document a doble espai i amb marges amplis (65 caràcters per línia). Els gràfics, els diagrames i les figures hauran de ser originals (no fotocopiats). Els arxius gràfics es presentaran en format eps o tif.
4. La contribució haurà d'incorporar el títol, el nom de l'autor o autors, la seva adreça postal professional completa i la seva adreça electrònica. S'adjuntarà un resum no més llarg de 300 paraules en català i anglès. Al final del document s'inclourà obligatòriament la bibliografia per ordre alfabètic de cognoms, d'acord amb la normativa APA, com en els exemples següents:

Articles

Albertí, M. (2002). Les matemàtiques des d'una perspectiva cultural: Etnomatemàtiques. *Bixa*, 20, 6-25.

Llibres

Godino, J., Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Capítols de llibres

Edo, M., Revelles, S. (2004). Situaciones matemáticas potencialmente significativas. Dins M. Antón i B. Moll (ed.), *Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (p. 410/103-410/179). Barcelona: Praxis.

Actes de congressos

Morales, M., Font, V., Planas, N. (2004). Estudio microetnográfico en torno a un conocimiento matemático situado. Dins A. Franzé i altres (ed.), *Actas de la I Reunión Científica Internacional sobre Etnografía y Educación* (CD-ROM). València: Germania, Polis Paideia.

Pàgines web

Ibanyez, A., Paolu, N., Pedreira, J. (2007). Reloj binario de sobremesa, a Microservos. www.microservos.com/archivo/gadgets/relojo-binario-sobremesa.html

5. Els continguts de *Nou Bixa* estan subjectes —llevat que s'indiqui el contrari en el text, en les fotografies o en altres il·lustracions— a una llicència de Reconeixement-No comercial-Sense obra derivada 3.0 de Creative Commons, el text complet de la qual es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>. Així, doncs, s'autoritza el públic en general a reproduir, distribuir i comunicar l'obra, sempre que es reconegui l'autoria i l'entitat que la publica, i no se'n faci un ús comercial ni se'n difongui cap obra derivada.
6. Els articles es publicaran en llengua catalana. Només es traduiran al català les contribucions acceptades d'autors no residents als Països Catalans.
7. Els autors es responsabilitzaran del compliment de les normes establertes per a l'autorització de la reproducció de material procedent d'altres fonts bibliogràfiques.
8. Els articles tindran una extensió de 6 a 12 pàgines de text —és a dir, un total màxim de 12.000 caràcters—, incloses les notes a peu de pàgina. Podran anar acompanyats d'il·lustracions, sempre que no superin l'extensió de dues pàgines. En definitiva, tot complet —quan el text contingui quadres, figures, fotografies, gràfics, mapes, etc.— no podrà superar, en cap cas, les 15 pàgines.
9. Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per tal de facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques.