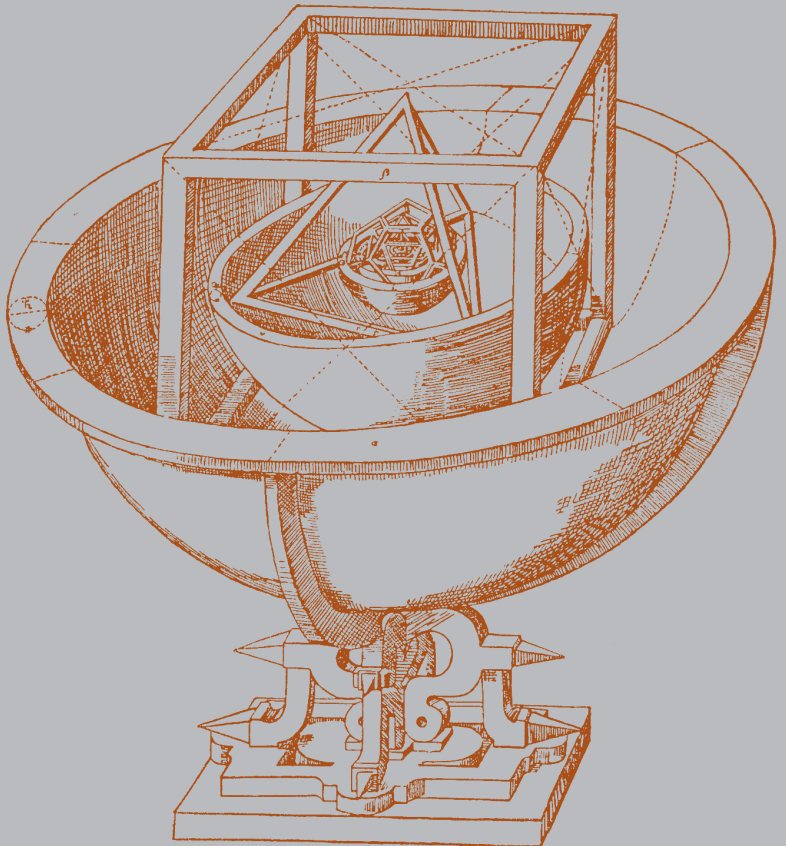
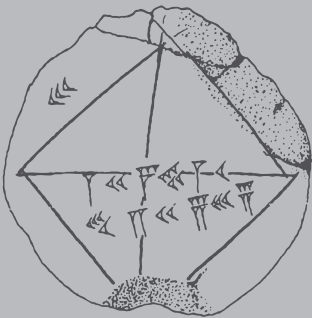


# HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA

Des de Mesopotàmia  
fins al Renaixement

Carlos Dorce Polo

Tercera  
edició



UBe

# HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA

# HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA

Des de Mesopotàmia  
fins al Renaixement

Carlos Dorce Polo



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

---

Edicions

*A la Cristina, l'Arnau i la Marina*

# Sumari

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| PROEMI. <i>Josep Pla i Carrera</i> . . . . .                  | 11  |
| INTRODUCCIÓ . . . . .                                         | 15  |
| LES MATEMÀTIQUES A MESOPOTÀMIA . . . . .                      | 17  |
| LES MATEMÀTIQUES A L'ANTIC EGIPTE . . . . .                   | 41  |
| LA PRIMERA MATEMÀTICA GREGA . . . . .                         | 73  |
| EUCLIDES D'ALEXANDRIA . . . . .                               | 105 |
| ARQUIMEDES DE SIRACUSA . . . . .                              | 137 |
| EL FINAL DE L'ÈPOCA GREGA . . . . .                           | 171 |
| L'HEGEMONIA ÀRAB . . . . .                                    | 195 |
| LES MATEMÀTIQUES A AL-ÀNDALUS . . . . .                       | 235 |
| LEONARDO DE PISA, FIBONACCI . . . . .                         | 257 |
| LA RESOLUCIÓ DE LA CÚBICA . . . . .                           | 281 |
| Annex. ELS GRANS MATEMÀTICS CITATS EN AQUEST LLIBRE . . . . . | 313 |

## Proemi

Era el curs 1992-1993, s'havien acabat els Jocs Olímpics a Barcelona, quan vaig introduir una assignatura novella: Els Nombres. Una Introducció a la Història de la Matemàtica, a primer cycle, en el nou pla d'estudis que s'iniciava. Fou un curs molt apassionant per la novetat i per l'acollida excel·lent que tingué entre els estudiants que hi van assistir. Entre ells hi havia, entre d'altres que no he oblidat, Carles Dorce. Començava així, deixeu-m'ho dir plagiant, «l'inici d'una gran amistat».

Més tard el vaig retrobar en els cursos d'Història de la Matemàtica I i II, ja en el segon cycle de la llicenciatura de matemàtiques.

En acabar l'ensenyament, per la seva qualitat com a estudiant, va aconseguir una beca per col·laborar en la docència del Departament —aleshores, de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència de la Divisió, i amb docència a Filosofia i a Matemàtiques— i per iniciar la seva recerca en l'àmbit de la Història de la Matemàtica.

També en aquest segon aspecte —la recerca d'en Carles— vaig tenir el privilegi de ser un protagonista actiu, ja que amb el professor Julio Samsó, del Departament de Semàntiques, vam dirigir-li la tesi doctoral que estudiava unes taules d'un matemàtic de l'època de l'Islam clàssic.

Ara fa cinc anys, acollint-me a la possibilitat d'una prejubilació pensada amb la intenció de formar un futur professor ordinari, em vaig jubilar i vaig deixar la meua docència d'Història de la Matemàtica, a la Facultat de Matemàtiques, i al Màster d'Història de la Ciència —que, amb el pla d'estudis de Bolonya, s'ha ampliat amb el Màster de Formació del Professorat, en mans del Carles, amb el convenciment meu particular i del Departament, ara ja de Probabilitat, Lògica i Estadística, de la Facultat de Matemàtiques—, que era una excel·lent opció de futur.

Per desgràcia, l'errònia política econòmica endegada pels governs de Madrid, i de casa, i seguida amb els ulls clucs pels equips de govern de les universitats, fa molt difícil —si no impossible— que aquell projecte d'ara fa cinc anys arribi al port al qual havíem posat rumb.

Tanmateix, en aquests anys, en Carles ha fet una feina docent excel·lent. No hi ha res més amable, més gratificant, que poder veure com els alumnes esdevenen «deixebles» i, en alguns aspectes, van més lluny del que tu has fet. És el cas d'en Carles.

Fruit dels cinc anys de classes d'Història de la Matemàtica, ha elaborat un seguit de lliçons —molt acurades, amb exercicis i textos—, que Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona ha considerat que podien ser adaptades per constituir un text de divulgació seriosa d'una part de la Història de la Matemàtica, en català. És, sense cap mena de dubte, un text que feia molta falta, ja que serà el primer en aquest sentit en la nostra llengua.

És una síntesi magnífica del període antic de la matemàtica —va de Babilònia i Egipte fins al Renaixement italià. És a dir, tracta dels resultats matemàtics assolits abans que la matemàtica iniciï el camí de la modernitat del segle XVII —albirada pels grans astrònoms— i que portarà a l'eclosió del segle XX, un cop superades aparentment les crisis epistemològiques i amb la introducció del «paradís del qual ja mai no ens en expulsarà ningú»: la teoria de conjunts.

Es tracta, doncs, d'una primera part —que espero que tingui continuïtat— en la qual trobem amb mà mestra el més notable que ha esdevingut a la matemàtica babilònica, egípcia, grega —en diversos camps i èpoques—, en la musulmana i, com deia, en el Renaixement italià, amb l'inici del que esdevindrà l'àlgebra.

És difícil trobar, fins i tot en castellà, una síntesi tan elaborada, tan rica de matisos, tan acurada en l'exposició, tan ajustada en l'aportació de cada època i de cada autor, tan correcta metodològicament i tan valuosa com a eina per ser emprada en l'ensenyament de la matemàtica d'ESO i de batxillerat. Crec, sincerament, que cobreix tots els aspectes històrics necessaris en aquests graus formatius.

M'heu sentit a dir, en més d'una ocasió, que l'acte docent no és un acte individual —una lliçó, una classe, un curs—, sinó que és un *procés* que es desenvolupa en espiral i, en cada volta de l'espiral, s'aprofita allò adquirit en les voltes anteriors per aprofundir-ho sobre un fonament, inicialment feble, però cada cop més sòlid.

En Carles, amb aquest text, comença la primera volta d'aquesta espiral del coneixement de la Història de la Matemàtica, una espiral que, espero i desitjo, vagi creixent d'ara endavant.

Vull felicitar, doncs, en Carles per la feina feta i encoratjar-lo a no abandonar-la, i també a Publicacions i Edicions de la UB per haver pres la decisió, encertada, de publicar aquest text.

Se'm podrà dir que, atesa la llarga interdependència que hi ha entre en Carles i jo, aquesta introducció pot ser un simple acte de cortesia per a l'autor i un frau per al lector.

Això no obstant, jutja-ho tu mateix, lector! Permet-me que t'inciti al plaer que el text, si el llegeixes com una novel·la en primera instància, i l'aprofundeixes després com un text formatiu, de ben segur et proporcionarà, i, alhora, que et felicitï per la conquesta intel·lectual que hauràs assolit.

JOSEP PLA I CARRERA  
Professor emèrit de la UB  
Departament de Probabilitat,  
Lògica i Estadística  
Facultat de Matemàtiques  
Universitat de Barcelona  
Barcelona, 5 de novembre de 2012



# Introducció

Les matemàtiques són una de les disciplines científiques més apassionants que existeixen. En paraules del gran David Hilbert:

Tinguem en compte que nosaltres, com a matemàtics, estem en el punt més alt del cultiu de les ciències exactes. No tenim més remei que assumir aquesta alta posició ja que tots els límits, especialment els nacionals, són contraris a la naturalesa de la matemàtica. És un error absolut en la nostra ciència construir diferències basades en persones i races, i les raons per les quals això s'ha produït són vils.

I és que les matemàtiques no entenen de fronteres, ni de nacionalismes, ni de cap trava que les pugui aturar. Tant se val si un nen de Panamà està descobrint ara la demostració del teorema de Pitàgores com si una estudiant búlgara de la Universitat de Sofia està entenent l'algorisme d'Euclides per al càlcul del màxim comú divisor: tots dos comparteixen la passió per una ciència que està darrere de coses de la vida quotidiana com poden ser la construcció d'una carretera, els principis bàsics d'una reacció química, l'optimització de les finances domèstiques o la codificació de secrets militars. Tanmateix, el camí que ha seguit aquesta ciència fins a arribar a l'actualitat està ple de personatges il·lustres, teories fantàstiques, demostracions intuïtives, aventures apassionants, raonaments genials i anècdotes imprescindibles, les quals són necessàries per a tota persona àvida de coneixement. Tot aquest conjunt de savieses ha estat progressivament alimentat per gent de diferents èpoques, edats i localitzacions geogràfiques, amb diferents interessos, motivacions i al·licients. Podem avançar, doncs, en el coneixement de les matemàtiques sense parar-nos un instant a gaudir de tot aquest procés tan brillant? Crec fermament que no.

Aquesta és la història de l'evolució de les matemàtiques començada en el moment en què un home primitiu va decidir gravar una sèrie de marques en el fèmur d'un mico, ara farà uns 25.000 anys. Probablement, no es va imaginar mai que estava aportant a la humanitat el primer document matemàtic de la

història i només el temps ens podrà donar llum (o no) sobre quina era la seva intenció en fer-ho. Tanmateix, per tal de situar la línia cronològica del temps i poder parlar de la matemàtica amb un cert grau d'abstracció, iniciarem el recorregut en els antics pobles mesopotàmics i egipcis i anirem avançant progressivament per l'època grega i romana, l'hegemonia àrab i el Renaixement europeu. És, doncs, una història incompleta, ja que s'atura tot just abans d'introduir-se en el que podem considerar com la matemàtica moderna. D'aquesta manera, diferents pobles, cultures, religions, persones... participaran d'aquest viatge i ens aniran afegint les seves aportacions a l'equipatge. A poc a poc, anirem construint la nostra matemàtica i veurem com el que molts de nosaltres sabem i/o som capaços de recordar va ser forjat fa molt de temps. Reconec que ens deixarem força coses per veure en aquest turisme intel·lectual, però el lector sabrà com continuar el seu viatge en el moment en què trobi un punt especial d'interès: el llibre ha estat pensat com una primera aproximació amb les ampliacions pertinents per a aquelles persones que ja han passat aquesta primera fase.

Com ja s'ha dit, aquesta història està inacabada, però tinc la ferma intenció de poder-la continuar: els reptes del segle XVII, la creació del càlcul infinitesimal, de les probabilitats, de la teoria de nombres... De moment, tot això queda aparcats, amb la intenció de retrobar-nos-hi en una segona part, la qual espero que sigui tan interessant de llegir com sembla que ho serà d'escriure. Això, el temps i els lectors ho diran.

Abans de començar, però, haig d'agrair la intervenció que han tingut en aquest llibre el Dr. Josep Pla, que és l'autèntic instigador de la meua vocació, els meus companys de docència Fèlix Bou i Josep M. Font, que van col·laborar en el disseny de l'assignatura d'Història de les Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques de la UB, la Jessica Cáliz, que m'ha ajudat en la part sintàctica i ortogràfica del text i, finalment, la meua família, sense el suport de la qual aquest llibre no hauria estat possible.

Barcelona, 4 de gener de 2013  
370è aniversari del naixement de Sir Isaac Newton

# Les matemàtiques a Mesopotàmia

## BREU CONTEXT HISTÒRIC

El període més important de l'antiga Mesopotàmia comença cap a l'any 3500 aC, moment en què petits nuclis urbans van començar a evolucionar progressivament fins a esdevenir grans ciutats. D'aquesta manera, van començar a sorgir petites ciutats estat com ara Lagash, Nippur o Ur, totes elles a la regió asiàtica compresa al voltant dels rius Tigris i Eufrates. Aquestes ciutats sumèries es van anar organitzant en un notable conglomerat social i cultural fins que van ser envaïdes pel rei accadi Sargon I (c. 2400 aC). Els accadis van establir-se a tota la regió i van ser capaços de dominar un gran imperi que abastava del mar Negre al golf Pèrsic i des del nord de Pèrsia fins al mar Mediterrani. Gràcies al contacte amb els sumeris, els accadis van heretar la seva escriptura cuneïforme i el seu sistema de numeració, avenços que van sobreviure a la caiguda de l'imperi en el segle xxii aC i a la recuperació de la independència de les ciutats estat.

Al voltant del 1900 aC, l'Imperi Sumeri d'Ur va caure a causa de la invasió elamita per l'est i l'amorita per l'oest. Els amorites van fundar la ciutat de Babilònia i van aconseguir adaptar-se perfectament a la fusió de les cultures sumèria i accàdia que es van trobar. Aquest nou Imperi Babilònic va anar progressant fins a arribar a una gran esplendor en temps del rei Hammurabi (c. 1750 aC). A partir d'aquí, els segles següents es caracteritzaren per les successives invasions de la zona a càrrec de diferents pobles: els hitites (c. 1600 aC) —amb l'ús de les armes de ferro en lloc de les de bronze habituals—, els hurrites (c. 1000 aC) i els assiris (c. 885 aC). Va ser justament amb el rei assiri Assurnasirpal (668-629 aC) que l'imperi va assolir una certa hegemonia cultural i científica. Més tard, al 612 aC, els assiris van tornar a ser conquerits, aquest cop pels caldeus, els quals van arribar al gran zenit cultural sota el regnat de Nabucodonosor II (605 aC-562 aC). Finalment, Cir II el Gran va acabar amb aquest imperi després de la seva conquesta l'any 539 aC.

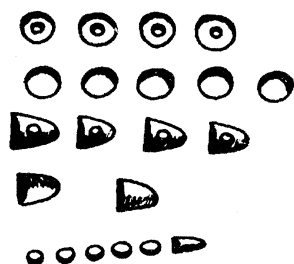
Tal com va passar a l'Antic Egipte, la guerra civil posterior a la mort d'Alexandre el Gran va suposar la fundació de la dinastia selèucida el 312 aC. En aquesta nova etapa, els selèucides van dominar un territori que s'estenia des del mar Mediterrani fins al riu Indus i que comprenia l'Àsia Menor, Mesopotàmia, Síria i Pèrsia. En aquesta època es van fusionar la cultura i els coneixements babilonis i grecs.

### EL SISTEMA DE NUMERACIÓ BABILONI

Al voltant de l'any 3200 aC, els sumeris van dotar-se del primer sistema de numeració conegut de la història. Per fer-ho van escollir la base 60, de manera que els seus comptes agrupaven les coses de 60 en 60, tal com es fa actualment amb els minuts i els segons d'un rellotge (amb alguna intervenció del 10). Com que encara no es coneixia el paper ni cap altre suport semblant, aquests «nous» nombres van començar a aparèixer a les seves tauletes d'argila en forma de diferents marques:

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |  |  |
| 1                                                                                 | 10                                                                                | 60                                                                                | 600                                                                               | 3.600                                                                             | 36.000                                                                            |

Feien una petita marca allargada per representar la unitat i una de circular per a la desena. Per a la unitat de l'ordre següent —és a dir, per a la seixantena—, feien la mateixa marca allargada de la unitat però més gran. Amb la combinació de les «xifres» 10 i 60 obtenien el 600 i una gran marca circular representava el 3.600. Finalment, combinant el 10 amb el 60<sup>2</sup> representaven el 36.000. Aquestes grafies no suposaven cap esforç per als escribes sumeris ja que utilitzaven cànams de canya circulars per una banda i punxeguts per l'altra. Cap el segle xxvii aC, les xifres van caure 90° cap a l'esquerra, tal com es pot observar en una tauleta trobada a Suruppak datada del 2650 aC, aproximadament:



$$4 \cdot 36.000 = 144.000$$

$$5 \cdot 3.600 = 18.000$$

$$4 \cdot 600 = 2.400$$

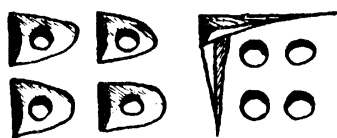
$$2 \cdot 60 = 120$$

$$5 \cdot 10 = 50$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{Total: } 164.571$$

Amb aquest sistema de numeració, els mateixos sumeris van començar a idear simplificacions ja que implicava posar moltes marques per als nombres grans. Per exemple, en una tauleta d'argila del s. XXVII aC, es troba la simplificació següent:



Coneixent les xifres, no és difícil identificar que es tracta dels nombres  $4 \cdot 600 = 2.400$  i  $4 \cdot 10 = 40$ . Tanmateix, no representen el 2.440 ja que l'angle que cobreix els quatre cercles és un signe «menys», de manera que el nombre és la diferència de  $2.400 - 40 = 2.360$ .

Posteriorment, l'escriptura sumèria va evolucionar cap a les grafies cuneïformes (de *cuneus*, 'tascó', en llatí), motiu pel qual els pictogrames inicials que representaven les paraules van anar adoptant combinacions de marques cuneïformes. En conseqüència, els nombres també es van veure implicats en aquesta transformació i van simplificar la seva escriptura per adoptar una autèntica base 60, expressada a partir de dues marques úniques: una de vertical en forma de clau per a la unitat i una d'obliqua per a la desena. Per exemple, en aquesta tauleta del s. XX aC es pot llegir la següent llista:

- 4 xais grassos
- 38 anyells petits
- 117 xais
- 221 ovelles
- 11 mascles cabrons
- 88 cabres
- 281 borregos
- 139 cabrits gairebé adults
- 20 cabres petites



A la cantonada superior de l'esquerra, es poden contemplar quatre símbols similars a un clau que ens indiquen el número 4, un per a cada unitat. A sota,

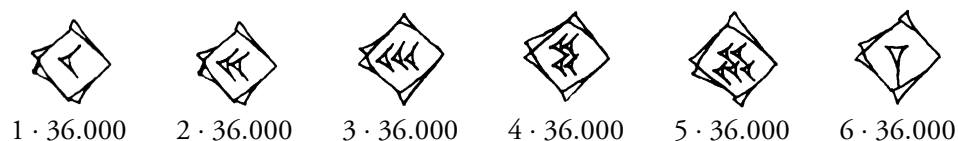
tres marques obliqües i vuit unitats representen el número 38. Pel que fa al número 117, s'observa que està format per 1 unitat, 5 desenes i 7 unitats. Per poder llegir-lo, com que es tracta de la base 60, es comença per la dreta: 7 unitats i 5 desenes; és a dir, el nombre 57. Ja que va seguit d'una unitat, aquesta ha de ser d'ordre superior a l'anterior i, per tant, ha de ser una unitat de seixantenos:  $1 \cdot 60^1 = 60$ . Conseqüentment, es tracta del número:

$$1 \cdot 60^1 + 57 \cdot 60^0 = 117$$

En aquests casos, s'indican els nombres sexagesimals separant les xifres per una coma i, en cas que hi hagi decimals, se separaran de les unitats mitjançant un punt i coma. Per exemple:

$$2,34,17;42,60 = 2 \cdot 60^2 + 34 \cdot 60^1 + 17 \cdot 60^0 + 42 \cdot 60^{-1} + 30 \cdot 60^{-2}$$

En aquesta evolució de l'escriptura cuneïforme, també es van adoptar simplifications d'escriptura per tal de poder escriure nombres grans de manera més còmoda:



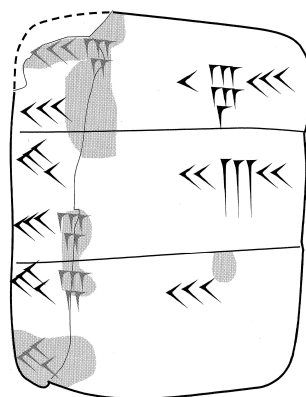
Per finalitzar, es pot especular sobre el motiu pel qual els antics habitants de Mesopotàmia van escollir la base 60 per a la seva numeració. La pregunta ja va ser plantejada pel gran Teó d'Alexandria al segle IV quan comentava l'obra de Ptolemeu (s. II). La base 60 no va quedar-se a Babilònia, sinó que el seu ús en els treballs d'astronomia va condicionar els astrònoms grecs i també els àrabs medievals. Teó va pensar que l'elecció del 60 va ser deguda al fet que es va buscar un nombre amb molts divisors i el 60 era el més practicable possible. Una altra possibilitat suggerida al segle XVIII apunta que aquesta elecció podria haver estat condicionada pels 365 dies de l'any que, arrodonits a 360, haurien estat l'origen de la divisió del cercle en 360°. Dividint aquest cercle segons la mesura d'un radi s'hauria obtingut un hexàgon que hauria donat el 60 com a unitat en cadascun dels seus angles interiors. Malgrat que hi ha altres hipòtesis que apunten, entre d'altres, als 5 planetes coneguts combinats amb els 12 mesos de l'any, o a la combinació d'una base 10 i una base 6, la idea que l'elecció tingués un origen astronòmic és força plausible.

## LES OPERACIONS ARITMÈTIQUES

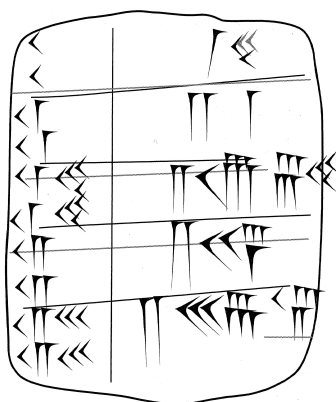
Amb aquest sistema de numeració, els babilonis van poder desenvolupar les operacions aritmètiques bàsiques de la mateixa manera que es fa avui dia, sobretot quant a la suma, la resta i el producte. El mateix sistema posicional implica la suma de xifres de diferents ordres de magnitud i, per tant, es pot pensar que els escribes babilonis no tenien gaires problemes per realitzar una suma, o una resta, d'una manera molt semblant a la nostra: com que no es conserva cap suma o resta realitzada sobre una tauleta, s'ha de suposar que les feien de cap, les escrivien a part i després les tapaven, o utilitzaven algun tipus de comptador o àbac com si fos una calculadora.

Pel que fa a la multiplicació, s'han trobat multitud de tauletes d'argila amb taules de multiplicar sexagesimals exactament iguals que les taules que ara aprenem quan som petits. Amb el seu ajut, havien de conèixer algun tipus d'algorisme tenint en compte poquíssims exemples que es troben en tauletes, tots ells sense més explicació que l'enunciat i la solució.

La tauleta anterior està dividida en tres parts amb tres productes diferents. El primer correspon a la multiplicació dels dos nombres situats a l'esquerra, és a dir, el 35 i el  $[0;]30$ , el resultat de la qual és  $35 \cdot [0;]30 = 17;30$ . Els altres dos productes són  $[0;]40 \cdot 35 = 23;20$  i  $45 \cdot 40 = 30[0]$ . També s'han trobat tauletes que enumeren els quadrats dels primers nombres naturals i d'altres amb càlculs de quadrats com la següent:



Tauleta d'argila amb tres productes



$$10 \cdot 10 = 1,40$$

$$11 \cdot 11 = 2,1$$

$$11;40 \cdot 11;40 = 2,16;6,40$$

$$12 \cdot 12 = 2,24$$

$$12;30 \cdot 12;30 = 2,36;15$$