

45

*nou*biaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Desembre 2019



Consell de redacció:
Lluís Mora / Marianna Bosch (coords.)
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Josep Pla
Romà Pujol
Manuel Udina

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM),
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat
noubiaix@gmail.com
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
Geomevda
Lluís Mora

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
Fax: 934 035 531
comercial.edicions@ub.edu
www.publicacions.ub.edu



sumari

1 Editorial

articles

4 Xarxes bayesianes: una metodologia per avaluar riscos Rosario Delgado

31 Una experiència de canvi metodològic en matemàtiques al cycle inicial de primària Joaquim Reyes

44 Editar la Viquipèdia: punt de trobada de competències matemàtiques, lingüístiques i digitals Martí Cuquet i Agnes Schlüter

56 Entrevista a Antoni Gomà Nasarre Carles Barceló i Vidal

seccions

66 El racó de l'oriflèxia Papiroflèxia d'alguns mosaics de l'Alhambra de Granada Jaume Coll Guerrero

75 Per pensar d'un minut a una hora Jordi Deulofeu

79 Resolució de problemes del Fem Matemàtiques Carme Vicens i Cyntia Riquelme

88 La Comissió per a l'Impuls de les Conclusions del Segon Congrés Català d'Educació Matemàtica. Continuem fent camí cap al C²EM 2020 Cecilia Calvo i Antoni Vila

94 Segon Congrés Català d'Educació Matemàtica, C²EM Reus-Tarragona 2020. Primer anunci



"No es tracta de fer aprendre definicions que, sovint, semblen exigències absurdes i es limiten a paraules sense sentit apreses de memòria. Cal incitar els alumnes, a través de problemes motivats per una dinàmica concreta i de les diverses qüestions de la realitat en què vivim, a construir ells mateixos les matemàtiques amb l'ajut del professor. Un ensenyament d'aquest tipus converteix les matemàtiques en una disciplina de les mes engrescadores."

Emma Castelnuovo (1981)

El treball en equip, ja sigui en cooperació, ja sigui en col·laboració, és una de les competències que els experts situen com a fonamentals en l'ensenyament de qualsevol disciplina. Tant la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) com la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) ja fa força anys que l'han inclòs en les seves propostes d'activitats adreçades a estudiants. Per aquest motiu, es van posar en marxa diversos concursos i activitats amb l'objectiu que els seus participants resolguessin problemes treballant en equip, dues capacitats fonamentals. Així, tal com explicàvem en el número anterior, va aparèixer el Fem Matemàtiques adreçat a estudiants d'onze a catorze anys i, més recentment, el +Mates i els Problemes a l'esprint i la copa Cangur, entre d'altres, que cobreixen un ventall d'edats diferents, des de l'educació primària fins al batxillerat.

Però aquesta col·laboració no només s'estén a les activitats adreçades a estudiants, sinó que també impregna molts dels projectes que desenvolupem. N'és un exemple la revista que teniu a les mans, *Nou Biaix*, un exemple de col·laboració entre la SCM i la FEEMCAT que va sortir a la llum el setembre del 2011.

I un exemple molt més ampli d'aquesta col·laboració que s'intenta que impregni tota la nostra manera de fer és el Premi Maria Antònia Canals. En el curs 2012-2013 les societats SBM-Xeix (Societat Balear de Matemàtiques) i Al-Khwarizmi (Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana, SEMCV) es van incorporar a la convocatòria i des d'aleshores es decideixen conjuntament les bases i els guanyadors.

A punt de tancar aquest número i amb temps per incloure-ho en l'editorial, hem rebut l'excel·lent notícia de l'atorgament del Premi Maria Antònia Canals 2019 a Antoni Gomà, que valora la seva trajectòria vital en el món de l'educació i especialment de les matemàtiques.

Llegiu l'entrevista que li vam fer quan encara no coneixíem la notícia i us adonareu de seguida de l'encert del premi que la FEEMCAT, SCM, SEMCV i SBM-Xeix li han atorgat. Des del consell de redacció de la revista volem donar-li l'enhorabona.

Val a dir que l'entrevista l'ha realitzat Carles Barceló, professor emèrit de la Universitat de Girona, i fa un recorregut molt interessant, i de lectura obligada, per un període de temps que va estar farcit d'innovacions i de problemes.

A banda d'aquesta magnífica entrevista, també podreu llegir les seccions habituals i un recull d'articles de diferents nivells educatius.

La Rosario Delgado ens parla en la seva col·laboració de les xarxes bayesianes, models matemàtics probabilístics, molt importants per a l'avaluació de riscos, un tema important en una societat on la incertesa cada vegada té un pes més important.

Joaquim Reyes ens mostra el canvi metodològic que va representar treballar amb material manipulatiu en l'àmbit de les matemàtiques a l'Escola Las Seguidillas de Badia del Vallès, i també amb aspectes significatius relacionats amb l'entorn on és situada l'escola.

La comunicació, com a procés fonamental en l'àmbit de les matemàtiques, és el punt de partida de la col·laboració de Martí Cuquet i Agnes Schlüter, professors de matemàtiques i de català de l'Institut Domus d'Olivet. I ens mostren una col·laboració triple, Matemàtic, Lingüístic i Digital. En aquest últim, amb la Viquipèdia de fons. Una experiència realitzada a tercer d'ESO.

En les seccions, en aquest número trobareu la informació de les activitats que s'han realitzat durant aquest darrer any. És a dir, es presentaran la informació que han recollit, com l'han classificat i ordenat i com els docents s'han implicat en aquesta elaboració. I, sobretot, ens parlen dels propers passos que es desenvoluparan.

En la secció dedicada a l'oriflèxia, Jaume Coll parla dels diferents mosaics i tesselles que podem trobar a l'Alhambra de Granada. Ens situa en el que entenem per mosaic i després ens mostra com podem obtenir-los plegant paper.

"Pensar d'un minut a una hora" és la secció on Jordi Deulofeu, a partir de problemes, ens fa donar voltes a les diferents situacions que ens proposa. En aquest número ens presenta quatre problemes joc per a dos jugadors que fàcilment podem portar a l'aula.

En la darrera secció de la revista mostrem com es generen els problemes del concurs Fem Matemàtiques. S'ha format un grup de treball per tal d'elaborar-los de manera conjunta, i això posa de manifest que una de les característiques de tot l'ecosistema català de treball matemàtic és la col·laboració i cooperació entre els seus membres.

articles
articles



articles

Xarxes bayesianes: una metodologia per a avaluar riscos

Rosario Delgado

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Resum

En aquest article presentem les xarxes bayesianes, que són models matemàtics probabilístics que es fan servir per modelar situacions en contextos d'incertesa i complexitat. Es poden fer servir, en particular, per a l'avaluació de riscos, és a dir, per estimar la probabilitat de fenòmens amb efectes negatius. Introduïm aquesta metodologia a partir d'exemples i presentem la fórmula de la probabilitat total i la fórmula de Bayes com a eines per actualitzar l'avaluació dels riscos. També parlem de (cor)relacions espúries i factors de confusió, i de com es pot fer servir l'*odds ratio* (o *raó de versemblances*) per valorar el pes de les evidències.

Abstract

In this paper we introduce the Bayesian networks, which are probabilistic mathematical models that are used to model situations in contexts of uncertainty and complexity. They can be used, in particular, for the evaluation of risks, that is to say, to estimate the probability of phenomena with negative effects. We introduce this methodology from examples and present the Total Probability Formula and Bayes' Formula, as tools to update the risk assessment. We also talk about spurious (cor)relationships and confounding factors, and about how the odds ratio (or likelihood ratio) can be used to assess the weight of the evidence.

1. Introducció

En aquest article presentarem les xarxes bayesianes, que són una metodologia que es pot fer servir en contextos on hi ha incertesa per a l'avaluació del risc, és a dir, per estimar la probabilitat d'un fenomen amb efectes negatius. És, per tant, una metodologia probabilística en essència. Consisteix a construir un model matemàtic probabilístic (que acabarà sent estadístic, ja que els paràmetres del model, que són probabilitats, s'estimaran a partir d'una base de dades) per representar les relacions de dependència entre les variables que afecten el fenomen. Un cop construït el model, es pot fer servir per estimar el risc en diferents escenaris i ajudar en la presa de decisions.

Introduïrem la metodologia a partir d'exemples i també tractarem altres aspectes relacionats amb aquesta, com són les (cor)relacions espúries i els factors de confusió, que poden representar-se i ser entesos molt millor mitjançant les xarxes bayesianes.

Com acabem de dir, les **xarxes bayesianes** són models matemàtics probabilístics que es fan servir per modelar situacions en contextos d'incertesa i complexitat i, segons l'opinió de molts investigadors del camp de recerca de la **intel·ligència artificial**, la contribució més important en aquest àmbit en els darrers anys ([9]). Trobar la millor manera de raonar en situacions d'incertesa ha estat sempre un tema de preocupació per als científics.

La intel·ligència artificial, si mai arriba a existir en sentit literal, serà una intel·ligència desenvolupada pels humans però implementada com un mecanisme que, sens dubte, haurà de ser capaç de raonar lògicament i de fer front a la **incertesa**. És a dir, haurà de ser capaç de **raonar probabilísticament**, i així podrà tractar amb evidències que porten a creences basades en un coneixement incomplet, a partir de les quals s'arriba a conclusions fal·libles, i podrà reconèixer la necessitat d'aprendre dels errors i de millorar. Per entendre el raonament humà tal com és, és a dir, restringit per la ignorància i la incertesa, l'únic mitjà de què disposem és la teoria de la probabilitat, que ens permet entendre i representar de manera adient la força de les nostres creences i el nostre grau d'incertesa mitjançant la probabilitat, i aplicar les eines de dita teoria per arribar a conclusions.

En una forma molt embrionària, la metodologia de les xarxes bayesianes es va començar a desenvolupar al segle XVII i des de llavors ha estat utilitzada per abordar una gran varietat de problemes que, tanmateix, han hagut de restringir-se quant a la seva mida i complexitat, a causa de la demanda computacional de fer front a problemes de grans dimensions. Fins i tot treballant amb versions simplificades de problemes reals, els humans tenim dificultats per fer els càlculs probabilístics necessaris per resoldre'ls. El desenvolupament de les **xarxes bayesianes** facilita aquest procés, automatitzant-lo i evitant així aquestes dificultats. D'altra banda, tant les millores en la capacitat computacional dels ordinadors actuals, com la facultat de les **xarxes bayesianes** d'aprofitar des d'un punt de vista computacional les relacions d'independència entre algunes variables del model, que és un dels seus trets més distintius, permetran en el futur ampliar i aprofundir en l'estudi del raonament probabilístic.

Ja de manera més formal, les xarxes bayesianes van ser introduïdes en la dècada de 1920, encara que no amb el nom i la nomenclatura actuals, com a eina gràfica que descriu el coneixement probabilístic de les relacions entre variables que afecten un determinat fenomen no determinista. Des de llavors han demostrat la seva enorme utilitat en els procediments de presa de decisions en un gran nombre de camps, i el seu ús per a l'avaluació de riscos està guanyant popularitat dia a dia i inclou aplicacions en àrees tan diverses com l'economia ([1]), la medicina ([18], [4], [20]), el risc mediambiental ([3], [17]), els desastres ecològics ([19]), els accidents amb residus nuclears ([10]) o la criminologia ([5, 6]), per esmentar alguns exemples.

El terme **xarxa bayesiana** i la metodologia en si, ja en el seu format actual, apareixen per primera vegada l'any 1985 en l'article *A Model of Self-Activated Memory for Evidential Reasoning* [15], de Judea Pearl (figura 1 (b)), enginyer, informàtic i filòsof nord-americà, on posa en relleu el paper fonamental que en aquesta metodologia té la **fórmula de Bayes**, introduïda pel matemàtic britànic i ministre presbiterià Thomas Bayes (figura 1 (a)) en el seu famós treball



(a) T. Bayes
(Londres, 1702 – Tunbridge Wells, 1761).



(b) J. Pearl (Tel Aviv, 1936).

Figura 1

An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances [2], publicat pòstumament el 1763, justament 222 anys abans que el de Pearl. En aquest treball, Bayes tracta el problema de les causes mitjançant els efectes observats i enuncia la fórmula que porta el seu nom, de la qual parlarem en aquest article, presentant-la com a eina bàsica per tal d'actualitzar les probabilitats, que són una mesura de les nostres creences, a partir de noves evidències.

Juntament amb [15], el text que va marcar una nova era en l'aplicació del raonament probabilístic en la intel·ligència artificial és el llibre del mateix autor, *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems* (1988) [16]. Va influir decisivament en altres investigadors, que es van sentir atrets per aquesta metodologia, com va ser el cas de Richard Neapolitan, que el 1990 va publicar *Probabilistic Reasoning in Expert Systems* [12], un llibre de text que complementa els de Pearl i és una referència bàsica per introduir-se en aquest tema. Aquests textos van establir les xarxes bayesianes com un camp d'estudi perfectament definit i delimitat, amb una gran projecció de futur i una enorme versatilitat i potencialitat quant a les aplicacions als àmbits més variats.

Com ja hem comentat, una de les aplicacions de més èxit de les **xarxes bayesianes** és l'avaluació de riscos. És en aquesta aplicació que ens centrarem en aquest article. A la secció 2 parlarem de què és el risc i com avaluar-lo. Primer presentarem l'aproximació tradicional i després, la nova eina per fer-ho: les xarxes bayesianes. Introduïrem tant aquesta metodologia com la **condició de Markov**, la **fórmula de la probabilitat total** i la **fórmula de Bayes**, íntimament relacionades amb ella. Finalment, a la secció 3 parlarem de com es poden presentar les evidències mitjançant l'*odds ratio*, i de la seva interpretació.

L'objectiu de l'article és contribuir que es pugui entendre millor com les probabilitats ens ajuden a representar el nostre coneixement i les relacions entre variables que afecten fenòmens d'interès, i a interpretar la realitat, evitant errors i prejudicis. En definitiva, com ens ajuden a tenir una visió més crítica i a entendre millor el món que ens envolta.

2. Avaluació del risc

2.1. El risc

Segons la definició donada per l'organisme Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission¹ el 2004, el **risc** és un esdeveniment que pot tenir conseqüències negatives. En canvi, d'un esdeveniment que pot tenir conseqüències positives en diem una **oportunitat**. Amb un abús del llenguatge, també s'anomena **risc** una mesura numèrica associada a l'esdeveniment que pot tenir conseqüències negatives. És en aquest sentit que farem servir aquest terme a partir d'ara.

Donat un esdeveniment que pot tenir conseqüències negatives, estimar el seu risc associat ens permetrà prendre decisions que ajudin a intentar evitar-ho o a pal·liar les seves conseqüències. Exemples d'esdeveniments pels quals podem estar interessats en estimar el risc serien les catàstrofes naturals o les provocades per l'home. Una catàstrofe és, per definició, un escenari amb una baixa probabilitat de produir-se però amb unes conseqüències desastroses... Segons Craig Fugate, de la Federal Emergency Management Agency dels Estats Units, «treballant ara sobre els plans d'emergència, estarem millor preparats quan necessitem respondre a un esdeveniment així». L'èmfasi és, per tant, en la **prevenció**. I la prevenció passa per una estimació prou acurada del risc que es produeixi la catàstrofe.

Són catàstrofes naturals les erupcions volcàniques, com la del Kilauea, el més actiu dels cinc volcans de l'arxipèlag de Hawaii, que va entrar en erupció el maig del 2018 i, segons els experts, pot continuar durant mesos i, fins i tot, anys, provocant que rius de pedra fosa, fum i cendres corrin pel sud-est de l'illa Gran fins a les aigües del Pacífic. Altres catàstrofes són les tempestes tropicals, els ciclons i els huracans, així com les fortes inundacions o les tempestes de sorra, per esmentar-ne algunes.

A banda d'aquestes catàstrofes que es produeixen al si del nostre planeta, d'altres poden ser provocades des de l'exterior. Per exemple, la Terra es troba sota un bombardeig gairebé constant de partícules carregades que li arriben des de l'espai i que poden ser perjudicials. La principal font d'aquestes partícules és el Sol. Les tempestes (o vents) solars causades per les flamarades solars, que són explosions que es produeixen a la nostra estrella i causen una expulsió de massa de la corona, ens fan arribar radiació electromagnètica que pot arribar massivament a la magnetosfera (zona d'aproximadament 100 Km al voltant de la Terra en la qual el camp magnètic terrestre desvia la major part del vent solar formant un escut protector contra les partícules carregades d'alta energia procedents del Sol) i aconseguir travessar-la, de manera que interferirà greument amb els satèl·lits, els senyals de GPS i les ones de ràdio. El 1859 es va produir una tempesta solar extremament forta en un moment en el qual la humanitat ja estava suficientment desenvolupada per notar les seves conseqüències, encara que no van ser gaire greus: afectacions al telègraf i els aparells elèctrics, i aurores boreals en punts del planeta on no es produïen mai. Aquest fenomen va rebre el nom d'**esdeveniment**

1. Aquest organisme és una iniciativa conjunta per combatre el frau corporatiu que va ser establerta als Estats Units per les cinc organitzacions del sector privat següents: American Accounting Association, American Institute of Certified Public Accountants, Financial Executives International, The Association of Accountants and Financial Professionals in Business i The Institute of Internal Auditors. Es dedica a guiar les administracions executives i les entitats de govern en aspectes rellevants de governança organitzativa, ètica empresarial, control intern, gestió de riscos empresarials, frauds i informes financers.

Carrington en honor del científic anglès que el va descriure. Segons els científics, més tard o més d'hora es tornarà a produir. I ara les seves conseqüències seran molt més greus per a tots nosaltres.

També de l'espai arriben els meteorits. El cràter Manicouagan (figura 2) és possiblement degut a l'impacte d'un meteorit de 5 Km de diàmetre que es va produir fa aproximadament uns 215,5 milions d'anys.



Figura 2. Cràter Manicouagan (Canadà). Fotografia de la NASA.

Hi ha un altre cràter més recent, d'uns 180 Km de diàmetre, a la península mexicana del Yucatán, anomenat Chicxulub, datat fa uns 65 milions d'anys. Molts científics creuen que la caiguda del meteorit que el va crear és la causa de l'extinció dels dinosaures. Es tractaria d'un dels meteorits que s'anomenen «destructors totals».

Podem valorar el risc de patir una catàstrofe? I podem estimar com aquest risc quedaria afectat si es prenen determinades mesures per intentar evitar-la, o per pal·liar les seves conseqüències?

2.2. Aproximació tradicional

La manera tradicional d'estimar el risc és multiplicar la probabilitat de l'esdeveniment amb conseqüències negatives per una mesura del seu impacte (negatiu), segons aquesta fórmula:

$$\text{risc} = \text{probabilitat} \times \text{impacte}$$

Vegem ara amb un exemple senzill que aquesta aproximació és excessivament simplista i ha de ser substituïda per una de més elaborada.

Un exemple: *Armageddon*

Armageddon és el títol d'una pel·lícula del 1998 dirigida per Michael Bay i protagonitzada per Bruce Willis, Ben Affleck i Liv Tyler. També és un terme bíblic que fa referència a la fi ca-

tastròfica del món. El seu argument és el següent: els investigadors de la NASA descobreixen un meteorit destructor total que va directe cap a la Terra i decideixen enviar-hi un grup de perforadors petrolers, dirigit pel personatge interpretat per Bruce Willis (figura 3), per tal de col·locar unes bombes i fer-lo explotar, a fi d'evitar la col·lisió.



Figura 3. L'equip de perforadors de la pel·lícula *Armageddon* quan comencen la seva missió.

El món s'enfronta, doncs, a un esdeveniment amb conseqüències molt negatives: la col·lisió del meteorit, una veritable catàstrofe! L'*Armageddon* es produiria com a conseqüència de la col·lisió i es podria definir com una pèrdua total al planeta del 80% o més de vides humanes.

Si intetem calcular el risc de col·lisió fent servir l'aproximació tradicional, ens trobem amb algunes dificultats. Per començar, no podem mesurar directament la probabilitat que es produeixi sense aprofundir una mica més... Per exemple, si segons els científics de la NASA la trajectòria del meteorit passa per la Terra, la probabilitat que es produeixi la col·lisió seria 1..., però si és 1, quin sentit té enviar un equip a intentar evitar-la?

De fet, la probabilitat que el meteorit col·lideixi contra la Terra està condicionada per altres esdeveniments (com la intervenció per intentar destruir-lo) i no té sentit assignar-li un valor directament sense tenir-los en compte.

Tampoc no podem obtenir de manera clara una mesura de l'impacte que tindria la col·lisió del meteorit. A banda de la pregunta òbvia: «impacte sobre què?», és clar que no podem mesurar-ho sense considerar les possibles accions mitigants (com ara allotjar la quantitat més gran possible de gent en refugis subterranis tan lluny com sigui possible de la zona d'impacte).

Què podem fer per estimar el risc en aquesta situació? Construïrem un model matemàtic probabilístic que permeti incloure tots els esdeveniments que poden condicionar tant la

probabilitat que es produeixi la col·lisió del meteorit contra la Terra, com l'impacte que aquest fet tindria.

2.3. Aproximació mitjançant xarxes bayesianes

Si continuem amb l'exemple de l'*Armageddon*, ens podem preguntar com serà el model matemàtic probabilístic que farem servir per a avaluar el risc associat a la col·lisió del meteorit contra la Terra. Serà una representació gràfica de les relacions que hi ha entre les diferents variables que són rellevants en aquesta situació, és a dir, variables que afectin el risc associat a la col·lisió del meteorit contra la Terra. Fent-lo servir, podrem realment avaluar aquest risc i prendre mesures.

Primer fem una versió simplificada. Considerem només dues variables per començar: X: Trajectòria de col·lisió (Sí/No), i Y: Col·lisió amb la Terra (Sí/No). La segona variable indica si realment es produeix la col·lisió del meteorit amb el nostre planeta, que és l'esdeveniment de resultat negatiu que ens interessa, i està condicionada per la primera, que es refereix a si la trajectòria actual del meteorit és realment de col·lisió, cas en el qual la col·lisió es produirà, i que actua com a *activador*. En cas contrari, la col·lisió no es produirà. Per tant, tindriem la representació gràfica de la figura 4, amb les probabilitats corresponents.

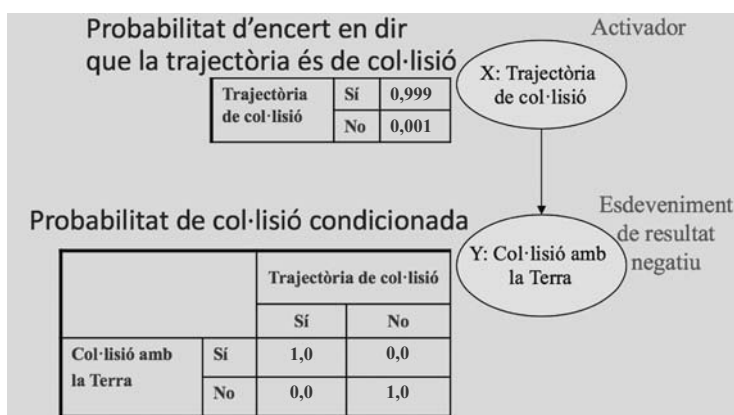


Figura 4. El primer pas en la construcció de la xarxa bayesiana per a l'exemple *Armageddon*.

En aquesta representació gràfica hi ha dos nodes que corresponen a les dues variables, amb una fletxa que indica la relació entre elles. Quant a les probabilitats, la taula de probabilitat de la variable Y: Col·lisió amb la Terra condicionada a X: Trajectòria de col·lisió, és prou intuïtiva. La taula de probabilitats de la variable X: Trajectòria de col·lisió, ens indica que creiem que els científics de la NASA han calculat bé la trajectòria del meteorit amb una probabilitat de 999 sobre 1.000, però que amb una probabilitat d'1 sobre 1.000 creiem que s'equivoquen i, en realitat, la trajectòria del meteorit no és de col·lisió contra la Terra.

En un segon pas tindrem en compte també el possible efecte de l'expedició dels perforadors enviats per destruir el meteorit. Introduïm, doncs, una tercera variable: Z: Explosió meteorit (Sí/No), que és una mesura de control i ens indica si l'expedició aconsegueix amb èxit produir l'explosió del meteorit. Aquesta variable afecta la col·lisió del meteorit, però no si la seva

trajectòria actual és de col·lisió. Per tant, quan l'afegim al nostre model inicial tindrem el nou model que ens mostra la figura 5, on la probabilitat de la variable Y: Col·lisió amb la Terra ara està condicionada no només per X: Trajectòria de col·lisió, sinó també per Z: Explosió meteorit, que són els seus «parets²». En efecte, si la trajectòria no és de col·lisió, passi el que passi amb l'explosió del meteorit, amb probabilitat 1 no es produirà la col·lisió amb la Terra (no considerem la possibilitat d'extrema mala sort consistent que el meteorit inicialment no té una trajectòria de col·lisió amb la Terra però gràcies a l'èxit de l'expedició per fer-lo explotar, es desvia de la seva trajectòria original i la nova trajectòria sí que és de col·lisió contra el nostre planeta). D'altra banda, si la trajectòria és de col·lisió i l'expedició no aconsegueix fer explotar el meteorit, és a dir, fracassa, es produeix la col·lisió amb seguretat (probabilitat 1), mentre que si l'expedició se'n surt, amb una probabilitat del 80% no es produeix la col·lisió amb la Terra, però encara hi ha un 20% de probabilitat que l'efecte no sigui el desitjat i, tot i produir-se l'explosió, el meteorit acabi col·lidint contra nosaltres. A més, creiem que en Bruce Willis i el seu equip tenen només una probabilitat d'èxit del 10% (taula de probabilitat de la variable Z en la figura 5). Sembla poc, però les condicions de la tasca són molt extremes, com es pot comprovar si es veu la pel·lícula!

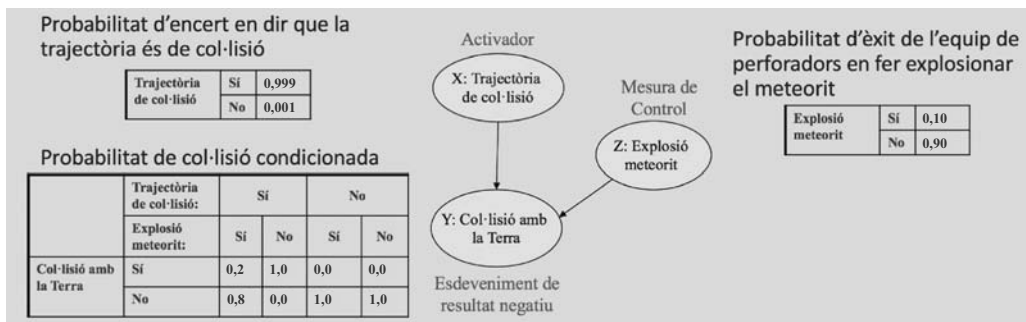


Figura 5. Segon pas en la construcció de la xarxa bayesiana per a l'exemple *Armageddon*.

Finalment, acabem de contruir el model considerant l'efecte mitigant de les conseqüències negatives de la col·lisió del meteorit que s'obtindria refugiant la població sota terra, amb la variable T: Refugi subterrani (Sí/No), que indica si la mesura mitigant de refugi de la població s'ha pogut implementar amb èxit. El resultat negatiu de l'esdeveniment de la col·lisió del meteorit amb el planeta seria la pèrdua de vides humanes, que si és massiva (almenys un 80% de la població mundial) anomenem *Armageddon*. Aquest resultat es representa per la variable W: Armageddon (Sí/No). A la figura 6 veiem el model final, amb totes les variables incorporades.

Només hem afegit les dues noves variables T i W, tenint en compte que T: Refugi subterrani només afecta W: Armageddon (i no la resta de variables), de la qual és pare juntament amb Y: Col·lisió amb la Terra. Per tant, la taula de probabilitat condicionada de la variable W: Armag-

2. En la terminologia habitual de les xarxes bayesianes, en diem *pares* d'una variable o node als nodes que li envien una fletxa en la representació gràfica, dels quals depèn directament i n'és un *fill*. Quan un node no té pares, en diem que és un node *arrel*; quan no té fills, és a dir, nodes dels quals sigui pare, en diem que és un node *fulla*; i de la resta de nodes en diem que són *intermedis*. Del conjunt de nodes als quals es pot anar seguint en la direcció de les fletxes des d'un node fixat, se'n diu *descendents* del node, mentre que els seus *ancestres* són els nodes als quals es pot anar seguint en el sentit invers de les fletxes, és a dir, els nodes dels quals és *descendent*.

geddon depèn de Y: Col·lisió amb la Terra i de T: Refugi subterrani, i de la resta de variables del model només a través de la primera. Si no es produeix la col·lisió, independentment de l'èxit de la mesura mitigant, no es produirà l'*Armageddon* amb probabilitat 1. En canvi, si es produeix la col·lisió, la probabilitat d'*Armageddon* dependrà de l'èxit de la mesura mitigant: si fracassa, l'*Armageddon* és segur (probabilitat 1), mentre que si té èxit, només es produeix amb probabilitat del 60%. D'altra banda, creiem que la probabilitat que la mesura del refugi subterrani es pugui acabar implementant és del 30% (taula de probabilitat de la variable T en la figura 6).

El model que acabem de construir (figura 6), és una **xarxa bayesiana**.

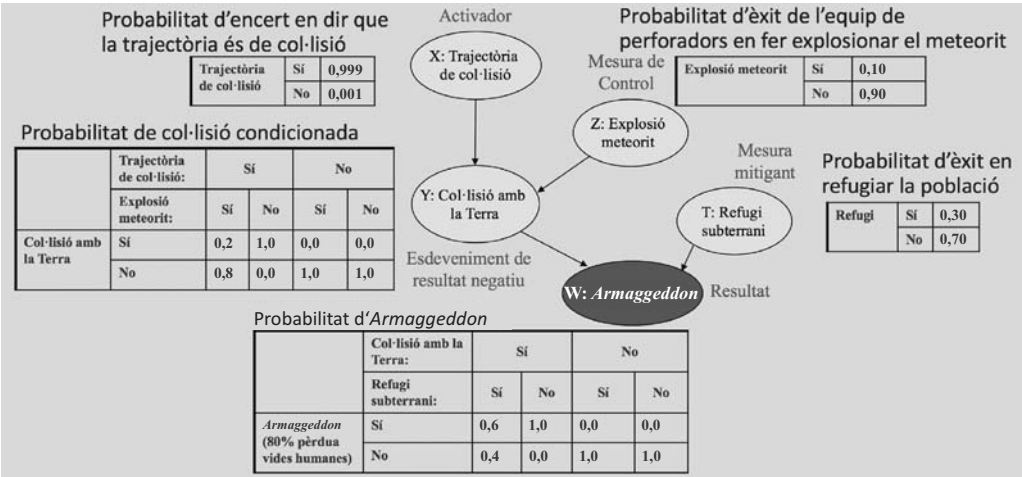


Figura 6. Pas final en la construcció de la xarxa bayesiana per a l'exemple *Armageddon*.

2.4. Les xarxes bayesianes i la condició de Markov

Com hem vist en l'exemple de l'*Armageddon*, una xarxa bayesiana és un model matemàtic probabilístic que representa les relacions (sotmeses a l'atzar) entre unes variables, diguem $X_1, \dots, X_n$, rellevants per a cert esdeveniment (de conseqüències negatives, en el cas de l'evaluació de riscos) i que són variables **discretes finites** (numèriques que prenen un conjunt finit de possibles valors) o **categòriques** (els valors de les quals són un conjunt finit de categories). El model consta d'una representació gràfica que és un graf acíclic dirigit (DAG, les sigles en anglès de *Directed Acyclic Graph*), que denotem per Γ , ja que les relacions entre les variables s'estableixen amb arcs que tenen una direcció (fletxes que van d'un node a un altre) i no està permès que, sortint d'un node i seguint el sentit de les fletxes, anem passant de node a node i tornem al de partida (si això passés, es tindria un cicle tancat). A més de la representació gràfica, tenim els paràmetres del model, que són les probabilitats condicionades de cada node als seus pares (incloent-hi les probabilitats sense condicionar dels nodes arrels). A partir d'aquestes probabilitats, podem definir una distribució de probabilitat conjunta de les variables del model de la manera següent (se'n diu **regla de la cadena**): per a tot $x_1, \dots, x_n$ possibles valors de $X_1, \dots, X_n$, respectivament, tenim:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i / PA(X_i)), \quad (1)$$

on $P(X_i = x_i / PA(X_i))$ denota la probabilitat que la variable X_i prengui el valor x_i condicionada que els seus pares prenguin els valors que correspongui dels $x_1, \dots, x_n$. Dit d'una altra manera: la probabilitat conjunta de les variables del model es calcula multiplicant les probabilitats condicionades de cada node als seus pares, començant pels nodes *fulla* i anant enrere en el DAG fins a acabar als nodes *arrel*.

Vegem-ho en l'exemple de l'*Armageddon*: suposem que volem calcular la probabilitat conjunta de totes les variables del model que correspon al fet que totes prenguin el valor Sí (anàlogament es faria amb qualsevol combinació de Sí i No per a les diferents variables). Aplicant la **regla de la cadena**, aquesta probabilitat es calcula així:

$$\begin{aligned} P(X = \text{Sí}, Y = \text{Sí}, Z = \text{Sí}, T = \text{Sí}, W = \text{Sí}) \\ &= P(W = \text{Sí} / Y = \text{Sí}, T = \text{Sí}) P(T = \text{Sí}) P(Y = \text{Sí} / X = \text{Sí}, Z = \text{Sí}) P(X = \text{Sí}) P(Z = \text{Sí}) \\ &= 0,6 \times 0,3 \times 0,2 \times 0,999 \times 0,1 = 0,0035964 \end{aligned}$$

Donat el DAG, la distribució de probabilitat conjunta definida d'aquesta manera verifica una propietat que s'anomena **condició de Markov**. Habitualment, aquest terme es refereix a la propietat de certs processos estocàstics (o aleatoris)³ que evolucionen en el temps i que «no tenen memòria». És a dir, processos pels quals conegut el present, el futur és independent del passat. Aquests processos reben el nom de **cadena de Markov** en certs casos particulars i, en general, el de **processos de Markov** ([7]), en honor del gran matemàtic rus Andréi Andréyevich Márkov (figura 7).



A. A. Markov (1886).

Figura 7. A.A. Márkov (Ryazan, 1856 — Sant Petersburg, 1922), matemàtic rus conegut pels seus treballs en la teoria de la probabilitat.

3. La paraula estocàstic prové del grec *stockhastikos*, que és una paraula derivada de *stockhos*, que fa referència a l'atzar. La paraula aleatori prové del llatí *aleatorius*, paraula derivada de *alea*, que es refereix al joc dels daus i, en general, a l'atzar. Ambdues paraules es poden fer servir, indistintament, per referir-se a l'atzar. El costum ha fet que en determinats contextos s'utilitzi l'una o l'altra.