

nou**biaix**

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Juny 2019





sumari

Consell de redacció:
Lluís Mora / Marianna Bosch (coords.)
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Josep Pla
Romà Pujol
Manuel Udina

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM),
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat
noubiaix@gmail.com
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
*Interseccions sense perspectiva
i amb incertesa*
Lluís Mora

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
Fax: 934 035 531
comercial.edicions@ub.edu
www.publicacions.ub.edu



1 Editorial

articles

4 Joies matemàtiques
Armengol Gasull

33 Teie, quina estora vols? Trobar la millor proposta
Montserrat Canet

44 L'avaluació de la resolució de problemes
Joana Villalonga, Jordi Deulofeu

54 Experiència amb un recorregut d'estudi i investigació
sobre la inferència estadística a l'educació primària.
Què s'amaga dins l'ampolla?
Carles Granell, Berta Barquero

70 MATRIX III, Congrés Internacional a Cornellà
Sergio Belmonte

seccions

78 Associació Catalana de Geogebra
Estimacions i tractament de l'error
en el càlcul de Pi. Introduint el GeoGebra
al laboratori de matemàtiques
Guillem Bonet Carbó, Manel Martínez Pascual

88 Grup Cúbic
Una mirada matemàtica a l'obra de
Josep Estalella i Graells en commemoració
del centenari de la publicació del
seu llibre *Ciència recreativa*

95 El racó del CESIRE-CREAMAT
A l'educació matemàtica entre zero i vuit anys,
li ha arribat l'hora?

100 El racó del MMACA
El tangram egipci: diari de disseny
Carlos Luna-Mota

Aprendan, ante todo los profesores a observar atentamente a sus alumnos, a captar sus intereses y sus reacciones, y cuando sepan leer bien en ellos, comprobarán que en ningún libro ni tratado existe tanta substancia pedagógica como en el libro abierto de una clase, libro eternamente nuevo y sorprendente.

Pere Puig Adam (1956)

El passat mes de març es va atorgar el premi Abel de Matemàtiques a Karen Uhlenbeck, matemàtica estatunidenca de 76 anys. A banda de la seva tasca també ha sigut notícia atès que és la primera vegada que aquest premi es lliura a una dona en els seus 16 anys d'existència.

Aquesta és una notícia important atès que, segons diferents estudis, les dones tendeixen a infravalorar les seves capacitats en matemàtiques i tecnologia, cosa que no passa amb els nois. Cal remarcar que segons aquests estudis això passa encara que tinguin millors qualificacions. Segons molts experts una manera de reduir, fins arribar a eliminar, aquesta esclatxa de gènere consisteix en donar visibilitat a la tasca que desenvolupen les dones en la ciència i també en el procés d'ensenyament-aprenentatge dels estudiants a qualsevol edat. Una manera de fer-ho serà, sens dubte, incloure referències que relacionin les aportacions realitzades per aquestes científiques amb les activitats matemàtiques que portem a la pràctica a l'aula. En aquest sentit serà molt interessant l'aspecte de divulgació de la recerca en matemàtiques i ciència adaptada als diferents nivells educatius. És important la creació i manteniment d'una xarxa de divulgació d'aquest coneixement que arribi a totes les persones involucrades en el món educatiu. No cal dir que també és important la divulgació del procés històric de creixement de les Matemàtiques i la seva connexió amb altres fets històrics que s'estudien en les escoles, els estudiants han de tenir clares les referències científiques que fonamenten el creixement d'aquesta ciència.

I no hem d'oblidar que la base d'aquest coneixement matemàtic s'ha de fer a Educació Infantil, l'etapa que va des del naixement fins als 6 anys. La formació del sentit lògic, l'enriquiment de l'àmbit numèric, l'estructuració de l'espai i el descobriment de la geometria, el sistema de mesures són elements fonamentals de les matemàtiques, i de la ciència en general, que l'educació infantil està en condicions de fer progressar als infants d'aquestes edats. Entendre i fer-se seva la idea que les matemàtiques no són un esport d'observadors i que si volem

resoldre problemes cal actuar són idees que s'han de fonamentar en les edats inicials dels nostre infants. I és on es veu més clar i es fonamenta que tots, nens i nenes, tenen la mateixa capacitat matemàtica, i que el que cal fer és desenvolupar-la adequadament. No oblidem que a l'inici de qualsevol carrera científica sempre hi ha un bon docent.

Aquests reptes proposats també intentem proposar-nos-els en els continguts de la revista, tot i que hem de reconèixer que encara hi ha molt camí per endavant. En el present número podreu llegir els següents articles.

Armengol Gasull ens presenta un recull de demostracions senzilles i boniques, i a més, siguin tals que llegir-les i comprendre-les ens provoqui una certa felicitat. Tot i tenir en compte que senzill és un terme subjectiu.

La Joana Vilallonga i el Jordi Deulofeu ens relacionen dos punts molt rellevants de l'ensenyament de les matemàtiques, la competència matemàtica i la seva avaluació. I ens presenten dos instruments per a la realització de l'avaluació a la ESO.

Una experiència de col·laboració entre els nens i nenes de 4t de primària amb els d'Educació Infantil és el que ens mostra la Montserrat Canet. Treball interdisciplinari i col·laboratiu per resoldre un problema dels nens d'Ed. Infantil.

En Carles Granell i la Berta Barquero ens presenten un *Recorregut d'Estudi i Investigació* (REI) sobre l'atzar i la inferència estadística per a Ed. Primària. Treball que ens parla de com ensenyar el bloc d'atzar i estadística integrant experimentació i indagació.

En Sergio Belmonte ens explica que el passat mes d'octubre va arribar a Cornellà MATRIX, Trobada internacional de Museus de Matemàtiques, amb més de 120 assistents de 20 països diferents. Llegireu com es va estructurar, que es va fer i les idees que el fonamenten

I en el nostre espai de les seccions habituals cal ressenyar que comencem una nova col·laboració amb el grup cubic, grup de didàctica de les Matemàtiques de la UB. En aquesta primera col·laboració ens expliquen el desenvolupament de la seva jornada anual dedicada a Josep Estalella.

L'associació catalana de Geogebra ens presenten activitats que podem utilitzar al voltant de l'estudi de l'error en temptatives d'investigació al voltant del número Pi.

En la secció del CREAMAT se'ns parla de l'educació matemàtica en la franja de 0 a 8 anys, que en el darrer congrés C²EM va rebre un impuls molt important, on ens plantegen les noves línies d'actuació.

I en la secció del MMACA exploren una família de trencaclosques, els tangrams, per tal d'entendre quines qualitats els fan més interessants des dels punts de vista lúdic i educatiu.

Gaudiu de la lectura!

articles
articles



articles

Joies matemàtiques

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Resum

Un recull de demostracions senzilles i boniques que podem qualificar de petites, o grans, joies matemàtiques. Tot plegat dins la subjectivitat que presenten els termes «senzill» i «bonic». En aquest article, adreçat fonamentalment als entusiastes de les matemàtiques, s'exposen 20 demostracions que abracen des dels nombres primers, els números π i e , la geometria, els polinomis i les sèries. Podreu gaudir dels enunciats, les interpretacions i la mena d'arguments que han portat a les demostracions finals. Pot ser una magnífica porta a recopilacions molt més ambicioses.

Paraules clau

Resolució de problemes, numeració i càlcul, espai i forma, demostracions.

Abstract

A collection of simple and beautiful proofs that could be described as small – or great – mathematical gems; not forgetting the subjectivity implicit in the terms «simple» and «beautiful». Aimed primarily at mathematics enthusiasts, this article presents 20 proofs encompassing prime numbers, the numbers π and e , geometry, polynomials and series. Follow and enjoy the various hypotheses, interpretations, and arguments that lead to the final solutions. The article may serve as a gateway to more challenging collections.

Keywords

Problem-solving, numbers and calculations, space and form, proofs.

El doble sentit de la paraula joia ens ha permès triar per a aquest treball un títol que conté la, també doble, motivació del treball.

Més concretament, el que es pretén és recollir demostracions que en opinió de l'autor siguin senzilles i boniques i, a més, siguin tals que llegir-les i comprendre-les ens provoqui una certa felicitat. Senzill és un terme subjectiu, però per situar-lo en un context acadèmic podríem assimilar-lo al nivell de comprensió matemàtica que tenen els bons alumnes de primers anys d'universitat. Si senzill ja és subjectiu, què podem dir de bonic! Per descomptat, ni volem, ni sabem precisar-ho. En tot cas, un resultat per ser bonic ha d'interessar i no deixar indiferent a la majoria dels lectors matemàtics. A més, pot ser bonic per diferents raons: pel seu enunciat, per la seva interpretació o pel tipus d'argumentacions que han permès demostrar-lo. Uns

treballs que reflexionen sobre aquesta qüestió són [21, 30, 46, 48]. Segons Hardy ([23]), en els grans teoremes hi ha un grau molt alt de sorpresa, combinat amb inevitabilitat i economia.¹

Una recopilació molt més ambiciosa és el famós llibre [1]. També s'ocupen de la mateixa qüestió els tres llibres clàssics [25, 26, 27], els llibres [2, 22, 39] i els treballs [37, 51].

Espero que el lector gaudeixi amb aquest recull tant com ho ha fet l'autor preparant-lo i hi trobi demostracions que no coneixia. El treball està estructurat en seccions independents que s'han intentat ordenar en funció de la seva dificultat. Quan ha estat possible, s'han contextualitzat les qüestions i proves presentades. Com no podia ser de cap altra manera, hi ha resultats que involucren els nombres primers, π , e , triangles, àrees, volums, polinomis, sèries, fraccions contínues, daus, etc.; vaja, els àtoms de les matemàtiques. Una altra cosa, també inevitable, és la quantitat de noms il·lustres que surten citats en el treball. Una versió ampliada d'aquest article és [20].

1. Una pregunta amb resposta sorprenent

Hi ha dos nombres irracionals a i b tals que a^b sigui racional?

La prova, no constructiva, que la resposta és sí, és a la vegada senzilla i bonica. Agafem $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si c és racional, ja hem acabat prenent $a = b = \sqrt{2}$. Si no, observem que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2,$$

per tant, podem prendre $a = c$ i $b = \sqrt{2}$.

Observem que la demostració anterior no ens aclareix si c és racional o no. De fet, l'any 1900 Hilbert va proposar com a problema VII de la seva famosa llista, decidir per exemple si $2^{\sqrt{2}}$ i e^{π} eren nombres transcendents (és a dir, no eren arrels de cap polinomi no nul amb coeficients enters). Aquestes qüestions van ser resoltes simultàniament per Gelfond i Schneider al 1934. El seu resultat, conegut com a teorema de Gelfond-Schneider, ens diu que si a i b són nombres algebraics (no transcendents), $a \notin \{0, 1\}$ i b és irracional, aleshores a^b és transcendent.

Anem a veure que la transcendència (i per tant la irracionalitat) dels nombres $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ i e^{π} se segueix del teorema. Observeu en primer lloc que si α és un número no algebraic, aleshores $\beta = \sqrt{\alpha}$ també ho és, ja que si β fos arrel d'un polinomi $P(x)$, no nul amb coeficients enters, aleshores α seria arrel de $Q(x) := P(x^2)$. Per tant, com que $2^{\sqrt{2}}$ és transcendent, el mateix passa amb la seva arrel quadrada, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Finalment, com que e^{π} és un dels valors que pren $(e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$, també sabem que és transcendent.

És curiós observar que encara no se sap si

$$\pi^e \quad \text{o} \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}$$

són irracionals o transcendents.

1. «In [great theorems] there is a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy.»

2. Hi ha infinits nombres primers

Per a molts matemàtics, la prova d'Euclides que hi ha infinits nombres primers és immillorable. En la secció següent en veurem una variació. Recordem-la breument. Si n'hi hagués un nombre finit, $p_1, p_2, \dots, p_k$ arribaríem a una contradicció considerant $p_1, p_2, \dots, p_k + 1$, ja que o bé aquest nombre és un nou nombre primer, o bé té un nombre primer diferent dels n donats com a divisor.

Recentment, el 2006, li ha sortit una competidora ([47]) que reproduïm a continuació. Considerem la següent successió de nombres naturals:

$$x_{k+1} = x_k(x_k + 1), \quad 1 < x_1 \in \mathbb{N}.$$

Demostrarem per inducció que la descomposició en factors primers de x_k conté com a mínim k nombres primers diferents. El resultat és clarament veritat per a $k = 1$. Suposem-lo cert per a $k = n$ i anem a provar-lo per a $k = n + 1$. Tenim que x_k és divisible per k primers diferents. A més, per a tot $1 < m \in \mathbb{N}$, els nombres m i $m + 1$ són primers entre si, ja que si p divideix m i $m + 1$, divideix també la resta que és 1. Així, $x_n + 1$ conté algun primer en la seva descomposició en factors primers que no és a la descomposició de x_n . Per tant, x_{n+1} és divisible, com a mínim, per $n + 1$ nombres primers, tal com volíem demostrar.

Entre els dos llibres [34, 44] hi ha una dotzena de proves diferents de l'existència d'infinits nombres primers.

3. Hi ha infinits nombres primers de la forma $4n - 1$

Del fet que hi ha infinits nombres primers ja sabem que o bé n'hi ha un nombre infinit de la forma $4n - 1$, o bé n'hi ha un nombre infinit de la forma $4n + 1$, o bé les dues opcions es donen.

Anem a veure que la primera opció és certa. La prova és una senzilla i elegant adaptació de la prova d'Euclides de la infinitud dels nombres primers.

Suposem que no, per tal d'arribar a la contradicció. Siguin $p_1, p_2, \dots, p_k$ tots els primers de la forma $4n - 1$. Considerem

$$N = 4p_1 p_2 \dots p_k - 1.$$

Aleshores N no pot ser primer, ja que seria de la forma $4n - 1$ i no és a la llista de tots els primers d'aquesta forma. Clarament, cap p_j divideix N . A més, en la descomposició de N en factors primers n'hi ha com a mínim un de la forma $4n - 1$, ja que si tots fossin de la forma $4n + 1$, N també ho seria, ja que $(4n + 1)(4m + 1) = 4(4nm + n + m) + 1$. Aquest primer seria de la forma $4n - 1$ i no és cap dels $p_j, j \leq k$, amb la qual cosa obtendríem la contradicció desitjada.

De fet, Dirichlet al 1837 va demostrar que, variant $n \in \mathbb{N}$, qualsevol expressió $an + b$ amb a i b enters coprimers dona lloc a infinits nombres primers.

4. Un gran forat sense nombres primers

Acabem de veure que hi ha infinits nombres primers. De fet, se sap molt més. Per exemple, l'any 1896 Hadamard i de la Vallée-Poussin van provar, usant idees de Riemann, que si $\pi(n)$ denota el número de nombres primers menors o iguals que n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \ln(n)}{n} = 1.$$

Per això, a primera vista pot resultar sorprenent el següent resultat: per a tot $m \in \mathbb{N}$ hi ha m nombres consecutius, de manera que cap d'ells és primer. Abans de seguir llegint potser ve de gust pensar-ho per a un mateix.

Hi ha una prova senzillíssima d'aquest fet: per a $m \geq 2$, podem prendre $(m+1)! + k$, per a $k \in \{2, \dots, m+1\}$. Clarament, cada $(m+1)! + k$ és divisible per k .

5. Quadrats i més quadrats

No és senzill dividir un quadrat en un nombre finit de quadrats més petits, tots disjunts i diferents; vegeu [14, cap. 2]. Aquestes construccions es poden relacionar amb el disseny de certes xarxes elèctriques; vegeu [6]. A l'esquerra de la figura 1 donem un quadrat de mida 112×112 mm subdividit en 21 quadrats més petits i diferents, tots amb costats enters. Va ser trobat l'any 1978 per Duijvestijn i s'ha demostrat que és el més senzill possible amb aquestes característiques. El mateix problema però començant amb un rectangle té solucions més simples; vegeu de nou la mateixa figura, on es mostra un rectangle de 33×32 mm, trobat l'any 1925 per Morón, dividit en 9 peces quadrades diferents, amb costats enters. També se sap que aquesta solució és minimal.

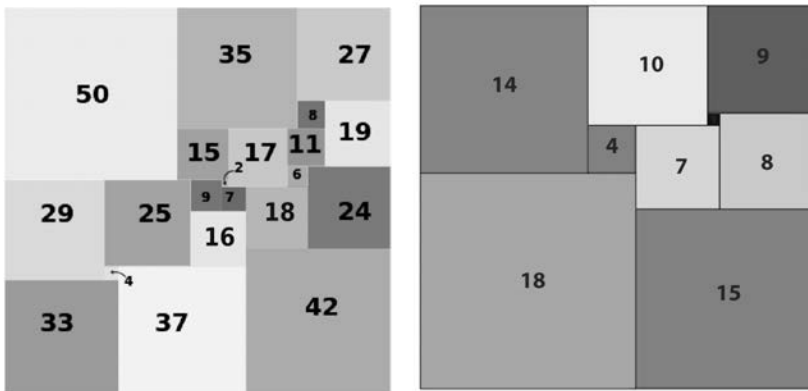


Figura 1. Quadrat i rectangle dividits en quadrats diferents.

El que és força curiós és que cap prisma rectangular amb costats sencers es pot dividir en un nombre finit de cubs més petits, tots diferents. Anem a provar-ho per reducció a l'absurd seguint [15, cap. 17]. Suposem que sí que es pogués. Aleshores, per exemple, la base de sota del prisma quedaria dividida en quadrats, tots amb costats diferents. Sigui Q_1 el quadrat més petit. Sobre aquest quadrat, el cub corresponent, C_1 , és tal que tots els que l'envolten són

més alts que ell mateix; vegeu la figura 2. Aleshores, la base de sobre d'aquest cub és un quadrat (de la mateixa mida que Q_1), de manera que les bases de tots els cubs que estan recolzats en ell el divideixen en quadrats més petits i tots diferents. De nou, n'hi ha un que és el més petit, diguem-li Q_2 . Podem raonar igual començant ara amb la cara superior del cub C_2 , que té com a base Q_2 , i continuar aquest procés fins a arribar que hi hauria cubs de costat més petit que 1, en contradicció amb el que suposàvem.

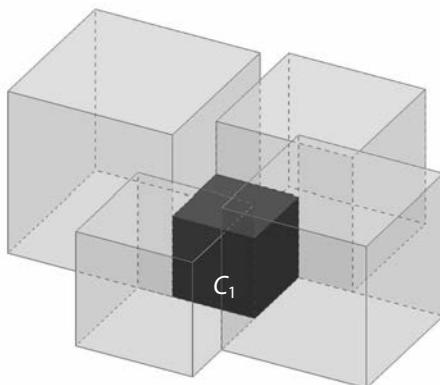


Figura 2. Impossibilitat de dividir un prisma rectangular en cubs diferents.

De fet, seguint un raonament semblant també podem demostrar que cap prisma rectangular (independentment de les mides dels seus costats) es pot subdividir en un nombre finit de cubs, tots diferents i tampoc amb costats necessàriament enters.

6. El teorema de Viviani

Aquest teorema va ser provat per Viviani al segle XVII. Afirmar que si P és un punt interior d'un triangle equilàter, aleshores la suma de les distàncies de P als tres costats del triangle AB , BC i CA no depèn de P i val l'alçada h del triangle. Recordem que si a és el costat del triangle, aleshores pel teorema de Pitàgores $h = \sqrt{3}a/2$.

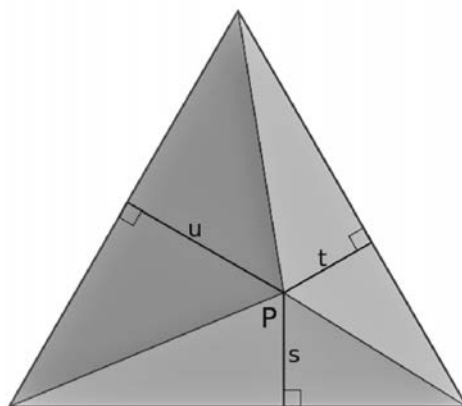


Figura 3. Teorema de Viviani: $s + t + u$ és constant.

La prova només usa que l'àrea d'un triangle és el producte de la base per l'alçada entre dos. Així, l'àrea total del triangle, $ah/2$, és igual a la suma de les àrees dels tres triangles en què es pot dividir, APB , BPC i CPA ; vegeu la figura 3. Aquestes àrees són $as/2$, $at/2$ i $au/2$. Per tant, $s + t + u = h$, tal com volíem veure.

7. Dues conjectures d'Euler

Expliquem a continuació dos problemes que va tractar Euler, pels quals el seu fabulós enginy no va ser suficient per a proposar respostes correctes.

Fixat $n \in \mathbb{N}$, Euler va conjecturar l'any 1769 que si sumem $k > 1$ potències n -èsimes de nombres naturals i obtenim una potència n -èsima, aleshores $k \geq n$. Aquest resultat va mostrar-se fals i el primer contraexemple va ser per a $n = 5$ i és de l'any 1966 ([29]):

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Més endavant, l'any 1988, Frye va donar un contraexemple per a $n = 4$,

$$958.00^4 + 217.519^4 + 414.560^4 = 422.481^4.$$

El segon problema és el següent: donats dos conjunts amb n elements A i B , un quadrat grecollatí d'ordre n és una quadrícula de mida $n \times n$ de manera que a cada casella hi ha un element de cada conjunt, tots els elements de $A \times B$ hi són i, a més, cada element de A i de B apareix a totes les files i totes les columnes. Aquests quadrats són coneguts des d'abans d'Euler, però ell els va popularitzar. El seu nom ve del fet que ell denotava els elements d'un dels conjunts amb lletres gregues i els de l'altre, amb lletres llatines. Avui en dia se sap que hi ha quadrats grecollatins per a tot $n \geq 3$, excepte per a $n = 6$, en contra del que va conjecturar Euler en el seu temps. En la figura 4 se'n mostren dos, un per a $n = 4$, cosit per la meua mare en punt de creu amb fils de 8 colors, i un altre per a $n = 10$. En els dos, es representen els elements dels conjunts com els colors de dins i de fora dels quadradets per a cadascun dels n^2 quadrats que els formen.

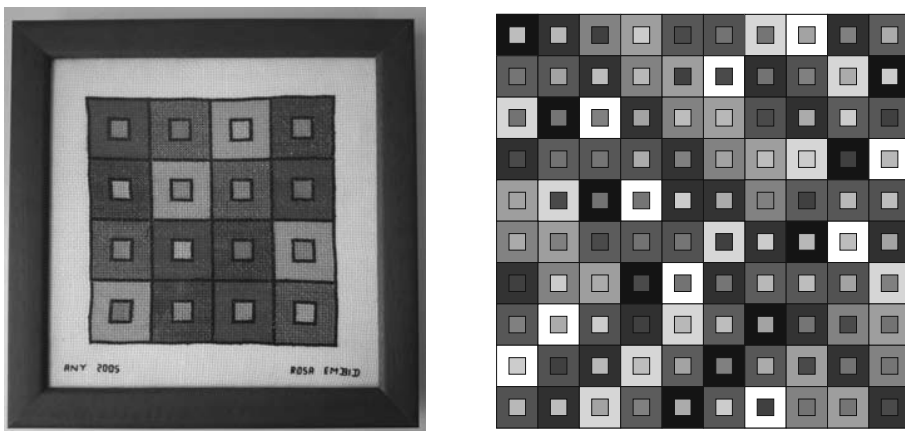


Figura 4. Quadrats grecollatins 4×4 i 10×10 .

8. Estrelles

Donada una estrella qualsevol de cinc puntes, anem a demostrar, seguint les idees de [16, cap. 5], que la suma dels cinc angles que formen aquestes puntes és π . És a dir, que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$; vegeu la figura 5.

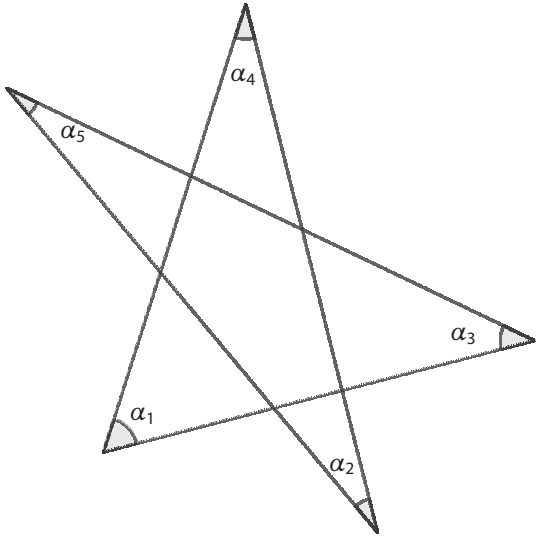


Figura 5. Estrella de cinc puntes: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$.

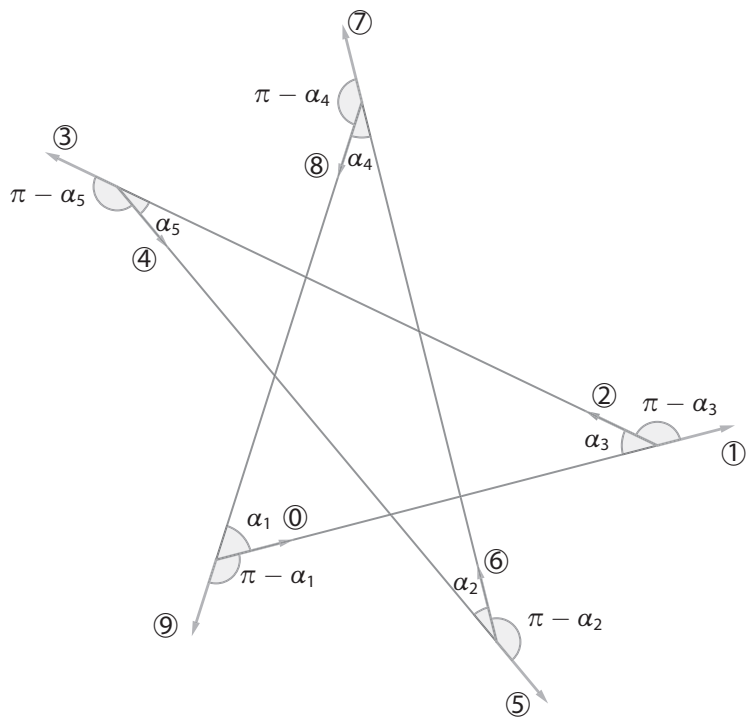


Figura 6. Estrella de cinc puntes.

Comencem agafant un vector unitari, situat en un dels vèrtexs de l'estrella, paral·lel a un costat (vegeu el vector en la posició ① en la figura 6). Aleshores el fem lliscar fins a la posició ①. A continuació el girem un angle $\pi - \alpha_3$ fins a estar en la posició ②. Fem el mateix passant per les posicions ③, ④, ..., fins a arribar a ⑨ i finalment tornem a la posició ①. Per una banda, és clar que el vector ha fet dues voltes i, per tant, el seu gir total ha estat de 4π radians. Per altra banda, els angles que ha anat girant en cadascuna de les cinc puntes han estat $\pi - \alpha_3$, $\pi - \alpha_5$, $\pi - \alpha_2$, $\pi - \alpha_4$ i $\pi - \alpha_1$. Per tant,

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) + (\pi - \alpha_5) = 4\pi,$$

d'on es dedueix que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$, tal com volíem veure.

Clarament, usant la mateixa idea es poden obtenir resultats similars en el cas de polígons o d'estrelles amb més puntes. Per exemple, en el cas d'un triangle tenim que $(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 2\pi$ i en el d'un quadrilàter convex, $(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) = 2\pi$. Per tant, per als triangles $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ i per als quadrilàters convexos, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$. De fet, el resultat és cert per a tots els quadrilàters, com es pot veure, per exemple, dividint-los en dos triangles, però per als no convexos aquest argument no demostra el resultat desitjat.

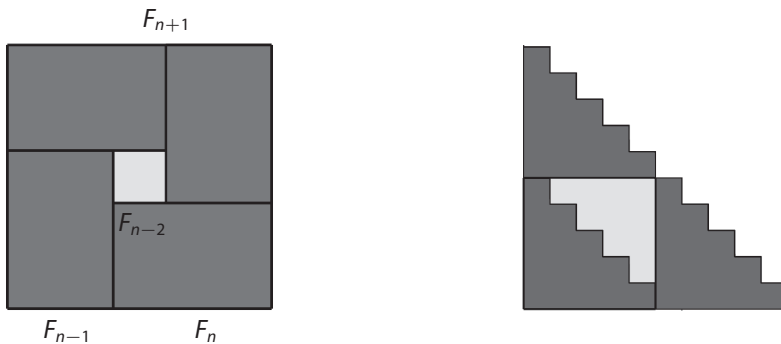


Figura 7. Nombres de Fibonacci i nombres triangulars.

9. Algunes proves sense paraules

Les quatre proves presentades i moltes més es poden trobar a [35, 36]. Els famosos nombres de Fibonacci, F_n , que recordem que venen definits com $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, amb $F_0 = 0, F_1 = 1$, o els nombres triangulars, $T_n = 1 + 2 + \dots + n$, satisfan certes relacions. Per exemple:

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2 \quad T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}.$$

Tot i que no és gens difícil demostrar-les analíticament, les figures següents ens donen proves sense paraules de les mateixes figures.

Una prova sense paraules de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+1/2)}{3}, \quad (1)$$

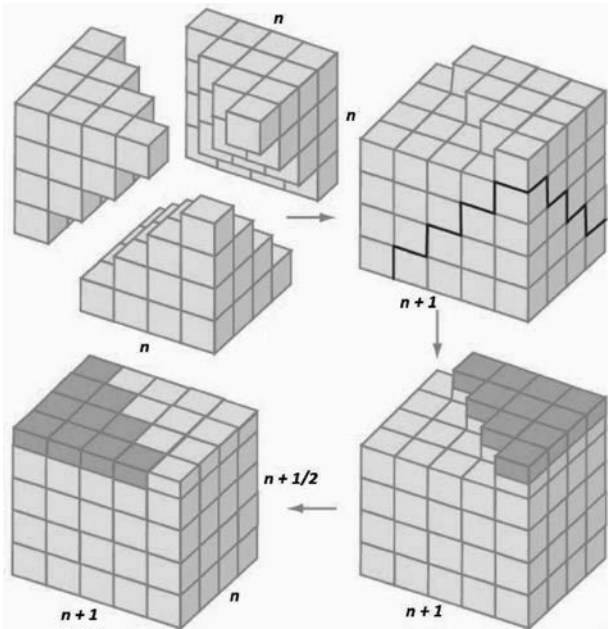


Figura 8. Suma dels quadrats.

es mostra en la figura 8. No és difícil demostrar (1) usant inducció. Aquí la bellesa no està pas en el resultat, sinó en la prova visual. Les figures de la figura 9 demostren el teorema de Pitàgores, ja que la suma de les àrees dels quadrats vermells coincideix amb la del quadrat blau, és a dir, $a^2 + b^2 = c^2$, on a i b són els costats d'un triangle rectangle que formen angle recte i c és la seva hipotenusa.

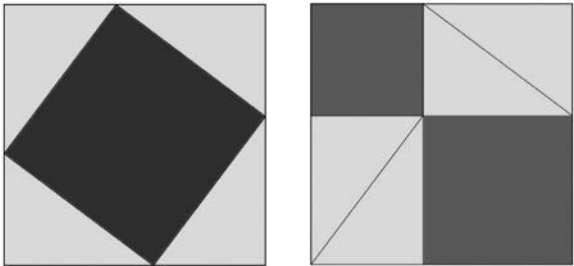


Figura 9. Teorema de Pitàgores.

10. Ternes pitagòriques i números de Fibonacci

Una terna pitagòrica és un triplet d'enters positius a,b,c que compleixen $a^2 + b^2 = c^2$, és a dir, que són els costats d'un triangle rectangle. Euclides ja va demostrar que totes les ternes pitagòriques primitives (és a dir, tals que a,b i c no tenen cap divisor comú més gran que 1) venen donades per

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2, \tag{2}$$

amb u i v enters positius, $u > v$, coprimers i els dos no senars a la vegada. La més coneguda és $3^2 + 4^2 = 5^2$ i correspon a $u = 2$ i $v = 1$. Anem a demostrar-ho seguint [41].

Una primera observació és que els nombres a i b han de tenir diferent paritat i, a més, c ha de ser senar. Observem, per exemple que si c fos parell, aleshores $c^2 = a^2 + b^2$ hauria de ser divisible per 4, però si a i b fossin els dos senars, és a dir, $a = 2k + 1$ i $b = 2\ell + 1$, aleshores $a^2 + b^2 = 4(k^2 + k + \ell^2 + \ell) + 2$, que no és divisible per 4. Així, suposarem sense pèrdua de generalitat que b és parell, i a i c , senars.

Escrivim $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$. Com que c i a són primers entre si, i els dos senars, l'únic divisor comú entre $c + a$ i $c - a$ és 2. En altres paraules, $(c + a)/2$ i $(c - a)/2$ són naturals positius i primers entre si. Per tant, tenim la igualtat

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{c-a}{2}\right).$$

Finalment, com que $b/2 \in \mathbb{N}$ i $(c+a)/2$ i $(c-a)/2$ no tenen factors en comú, la igualtat donada força que ambdós nombres siguin també quadrats. Així, $(c+a)/2 = u^2$ i $(c-a)/2 = v^2$, amb $u, v \in \mathbb{N}$. Operant, $c = u^2 + v^2$, $a = u^2 - v^2$ i $b^2 = 4u^2v^2$, com volíem demostrar.

A partir de (2) és trivial trobar ternes pitagòriques amb nombres de Fibonacci, o amb els nombres que es vulgui. Seguint [5, 39] donarem un parell de casos elegants.

Si prenem $u = F_{n+1}$, $v = F_n$ i usem que $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, obtenim

$$(F_{n+1}^2 - F_n^2)^2 + (2F_nF_{n+1})^2 = F_{2n+1}^2.$$

La prova següent que $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ és també força enginyosa. És senzill demostrar per inducció que

$$M^n := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Per tant, com que $M^{2n} = M^n M^n$, tenim que

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Fent el producte de matrius i igualant l'element de la primera fila i la primera columna, tenim que $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$, tal com volíem provar.

Si eliminem la condició $F_0 = 0, F_1 = 1$ dels nombres de Fibonacci obtenim uns nombres diferents, que denotarem per f_n i anomenarem nombres de Fibonacci generalitzats. Per exemple, prenent $F_0 = 2, F_1 = 1$ obtenim els nombres de Lucas: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18...

La segona terna pitagòrica que presentem involucra 4 nombres de Fibonacci generalitzats consecutius, f_n, f_{n+1}, f_{n+2} i f_{n+3} , i és