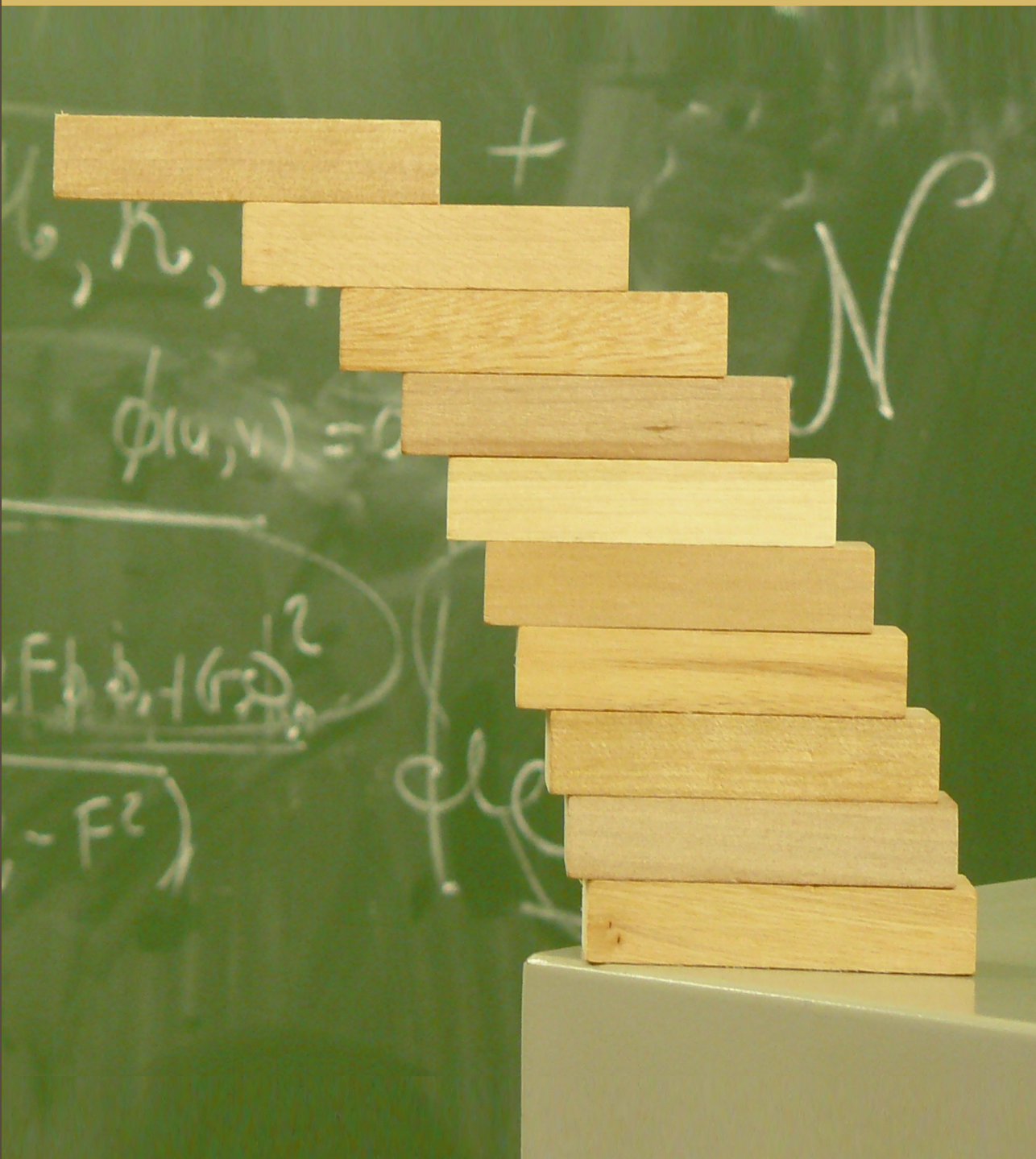
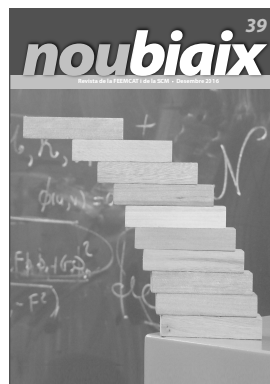


# nou**biaix**

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Desembre 2016





## sumari

Consell de Redacció:  
Manel Sol / Josep Lluís Solé (coords.)  
Marianna Bosch  
Joan Carles Ferrer  
Joan Miralles  
Josep Pla  
Romà Pujol  
Manuel Udina

Juanjo Cárdenas  
(responsable pàgina web)

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament  
de les Matemàtiques (FEEMCAT)  
Campus de Montilivi, edifici P-IV  
17071 Girona  
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)  
filial de l'Institut d'Estudis Catalans  
Carme, 47  
08001 Barcelona  
scm.iec.cat  
noubiaix@gmail.com  
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral  
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:  
*Equilibris harmònics*  
Gregori Guasp  
Universitat Autònoma  
de Barcelona

ISSN: 2014-2021  
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Edicions  
de la Universitat de Barcelona  
Adolf Florensa, s/n  
08028 Barcelona  
Tel.: 934 035 430  
Fax: 934 035 531  
comercial.edicions@ub.edu  
www.publicacions.ub.edu

3 Editorial

### articles

6 La sèrie harmònica  
Armengol Gasull

32 Conclusions del Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM)

35 Nombres perfectes, amics i sociables. Una proposta per a l'aula  
Carles Dorce

52 Jugar a crear solucions  
Albert Mallart Solaz

58 Examen de competència logicomatemàtica en la nova  
prova d'accés als graus de mestre  
Núria Gorgorió, Lluís Albarracín i Aitor Villarreal

65 Reflexions i propostes didàctiques per a un bon ensenyament  
i aprenentatge de la proporcionalitat geomètrica  
Núria Cardet, Assumpta Estrada, Maria José Gros i Maria Ricart

77 Parlar de matemàtiques per aprendre'n  
Teresa Serra Santasusana

98 3E Eines per a l'Ensenyament de l'Estadística a Secundària

### seccions

100 Per pensar d'un minut a una hora  
Jordi Deulofeu

104 Construint matemàtiques  
Anton Aubanell

111 El racó del Mmaca  
Anton Aubanell

116 El racó del *Cesire-Creamat*  
Saber matemàtiques. Ensenyar matemàtiques (araMat)

El mes de juliol es va celebrar el Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM). Van ser tres dies d'una activitat intensa en què més de 600 mestres i professors de tots els nivells educatius van poder intercanviar experiències, parlar i discutir amb altres docents sobre el que fem a les aules. Al final es van elaborar les catorze conclusions que trobareu en aquest *Nou Biaix*. Segons les valoracions dels assistents i dels organitzadors, es pot dir sense exagerar que el congrés va ser tot un èxit. Vam tornar a casa enriquits per les moltes idees i il·lusions, i amb un coneixement més ampli de com s'estan ensenyant les matemàtiques a Catalunya. Esperem que l'impuls amb què vam sortir del C2EM no decaigui a mesura que passi el temps i que portem a la pràctica aquelles idees que ens agradaren i les compartim amb els companys que no hi van poder assistir.

Les catorze conclusions finals haurien d'estimular i d'orientar les actuacions de millora de la nostra feina a partir d'ara. Des de la FEEMCAT es pretén mantenir viu aquest esperit renovador que el C2EM ens ha llegat. Per això s'ha creat una comissió de seguiment, coordinada pels professors Cecília Calvo i Toni Vila, amb la participació de representants de les diferents associacions de professors de Catalunya. Les seves atribucions i el seu funcionament s'estan encara definint, però hi ha la voluntat que serveixi per a difondre les conclusions i que faciliti i promogui avançar en la direcció que ens assenyalen, tot esperant una nova edició del congrés d'aquí a quatre anys.

Ens cal sortir de les nostres aules per avançar i millorar en la nostra feina, participar en les activitats que s'organitzen des de les diferents associacions, des dels CRP o des dels ICE, i en els grups de treball que ja existeixen o crear-ne de nous per a compartir idees i materials. Les xarxes socials poden ajudar a fer més senzilla aquesta feina tal com recullen les conclusions finals. El *Nou Biaix* també vol col·laborar en aquesta tasca i per això, una vegada més, demanem que ens envieu les vostres experiències innovadores per a donar-les a conèixer a altres professors.

A continuació us presentem els articles que hem seleccionat per a aquest número, que esperem que siguin del vostre interès.

Armengol Gasull, col·laborador ja habitual d'aquesta revista, ha escrit un article molt bonic sobre la sèrie harmònica en el qual ens mostra distintes proves de la seva divergència, així com propietats curioses i no intuïtives. Algunes demostracions s'han de llegir amb cura, però les hem inclòs per a la completeness del treball. No us perdeu la secció final, en què es presenten

diferents situacions en les quals apareix la sèrie harmònica: el problema del col·leccionista, la barreja de cartes, els rècords, les cues d'autos en un túnel, la resistència d'una biga, la tria d'una secretària, la travessia del desert i, finalment, com es pot construir un arc que voli la distància que vulguem i no caigui!

El professor Albert Mallart ens explica una experiència amb alumnes de 4t d'ESO en la qual s'ha fet servir el joc com una eina per a una millor comprensió de les matemàtiques.

Una altra experiència de jocs a l'aula ens la presenta Carles Dorce, treballant el raonament matemàtic amb els alumnes en unes classes participatives i amenes.

Les professores de la Universitat de Lleida Assumpta Estrada, María José Gros, i Maria Ricart, junt amb la mestra Núria Cardet, comparen els raonaments sobre proporcionalitat d'un grup d'alumnes de primària i un altre d'alumnes del grau de mestre.

Des de fa temps hi ha una preocupació per la formació inicial en matemàtiques dels mestres. Per intentar millorar-la s'ha pres la iniciativa, que s'aplicarà el proper curs per primera vegada, de fer una prova d'aptitud personal (PAP). Tres professors de la UAB ens expliquen com s'ha gestionat, en què consistirà, com s'ha dissenyat i quan es farà. No només és interessant per als futurs estudiants del grau d'infantil i primària, sinó també per als professors de secundària que ara els tenen a les seves aules i que hauran d'assegurar la seva preparació.

En l'enfocament actual de l'ensenyament de les matemàtiques, tant mestres com professors hem de conèixer el pensament de l'alumne. Tana Serra ens mostra com l'anàlisi de la conversa a l'aula ens ajuda a comprendre el procés d'aprenentatge.

Carles Barceló, amb la col·laboració de Pepus Daunís i Glòria Mateu, ens presenta molt breument les característiques del curs telemàtic sobre estadística que han dissenyat per a la formació del professorat.

Als racons tradicionals, Anton Aubanell ens explica com introduir un nou recurs innovador com el *role-play*, o escenificacions, a les classes de matemàtiques. Jordi Deulofeu ens proposa cinc problemes de caire geomètric per a fer-nos pensar. Des del Cesire ens comenten les diferents iniciatives que s'estan portant a terme en la formació permanent dels mestres i, finalment, el «Racó del Museu» ens mostra quatre mòduls relacionats amb diferents reptes sobre la proporcionalitat entre longituds de circumferències, àrees de cercles i volums de cilindres i esferes.



*articles*  
*articles*



*articles*

# La sèrie harmònica

**Armengol Gasull**

Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
gasull@mat.uab.cat

## Resum

En aquest treball estudiarem les propietats i aplicacions de la sèrie harmònica i de les seves sumes parcials. Començarem veient diferents proves de la seva divergència.

Estudiarem diversos resultats clàssics sobre la convergència o divergència de les seves subsumes, com per exemple la dels inversos dels números primers o la dels inversos dels números que no tenen cap nou entre les seves xifres. També recollirem situacions en les quals aquesta sèrie o les seves sumes parcials apareixen.

Així, entre d'altres, considerarem el problema del col·leccionista, el de la secretària, el dels rècords en sèries de dades, un problema de control de qualitat, el passeig aleatori i algunes qüestions de matemàtica recreativa.

## Abstract

*In this work we study the properties and applications of the harmonic series and its partial sums. We will start showing different proofs of its divergence. We also will study several classical results on the convergence or divergence of some subsums, for instance those formed by the reciprocals of prime numbers, or the one given by the reciprocals of numbers that have not nines in their decimal expressions. We also present several situations where this series or its partial sums appear. In particular, we consider the so-called coupon collector's problem, the secretary problem, the records in data series, the random walk and some questions on recreational mathematics.*

## 1. Introducció

La sèrie harmònica és l'exemple més antic i famós de successió de números positius, cada cop més petits i tendint a zero, però amb suma infinita. Aquest fet sembla que és conegut des del segle XIV. Si ho escrivim d'una manera informal,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty,$$

i més rigorosament, introduint les sumes parcials,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n},$$

tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

De vegades, en lloc de dir que la suma és infinita, també es diu que la sèrie és divergent o, per abús de llenguatge, que convergeix cap a infinit. La primera secció la dediquem a explicar per què la sèrie que estudiem s'anomena harmònica.

Hi ha moltíssimes demostracions de la divergència de la sèrie harmònica. Per exemple, a [24, 25] se'n recopilen més de quaranta. A la segona secció d'aquest treball recollim una selecció d'algunes de les més elementals.

Un resultat encara més interessant i delicat, que ja va demostrar el matemàtic suís Leonhard P. Euler (1707-1783) el 1737, és que

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots$$

és divergent (vegeu, per exemple, [33]). A la secció 3.2 en donarem una demostració molt curta que féu, el 1938, el prolífic matemàtic hongarès Paul Erdős (1913-1996) (vegeu [1, 3, 10, 41]). Observeu que aquest resultat ens mostra l'abundància de nombres primers.

D'altra banda, per exemple, si només agafem els termes de la forma  $\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$ , la sèrie obtinguda està formada pels termes d'una progressió geomètrica i convergeix cap a 1. En aquest cas, això es deu al fet que hem agafat molt pocs termes dels que formen tota la sèrie harmònica completa.

Un resultat molt curiós en aquesta direcció va ser provat el 1914 ([23]) pel matemàtic anglès/nord-americà Aubrey J. Kempner (1880-1973). Anomenem  $\mathbb{N}'$  el conjunt de tots els números naturals que no tenen cap 9 en la seva expressió en base 10. Aleshores, la suma  $\sum_{k \in \mathbb{N}'} \frac{1}{k}$  és convergent. Demostrarem aquest resultat, i més concretament que  $S < 90$ , a la secció 3.1. De fet, se sap que  $S \approx 22.92$  ([20, 36]). Eliminant una altra xifra o blocs més llargs de xifres, la convergència també es manté ([36]).

Tot i que, en principi, el resultat de Kempner pot sorprendre, després de reflexionar-hi una mica, intuïtivament és clar que la convergència de la sèrie és conseqüència del fet que «la majoria» dels nombres amb moltes xifres tenen algun 9 entre elles.

A la quarta secció introduïrem la constant d'Euler  $\gamma \approx 0.577218$  i estudiarem la seva relació amb les sumes harmòniques  $h_n$ . Farem els passos principals per a provar que

$$h_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + R(n), \quad \text{amb} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nR(n) = 0,$$

seguint les idees de [19, 39] (vegeu [14] per a tots els detalls). Aquesta relació ens serà molt útil per a aplicar-la a certs càlculs explícits que apareixeran a la secció següent. També introduïrem les constants de Mertens i de Brun, associades respectivament a la suma dels inversos dels nombres primers i a les sumes dels inversos dels primers bessons.



**Figura 1. Torre de sis peces construïda basant-se en la sèrie harmònica.**

La cinquena secció la dedicarem a estudiar diversos problemes famosos en els quals la sèrie harmònica o les seves sumes parcials juguen un paper fonamental. Així, considerarem el problema del col·leccionista, el de la secretària, el de barrejar cartes, el de la formació de blocs de cotxes en les carreteres amb un sol carril, el dels rècords en sèries de dades, un problema de control de qualitat, el passeig aleatori i un parell de qüestions ben famoses de matemàtica recreativa: com poder travessar un desert infinit i la construcció de torres amb molt vol a partir de peces amb forma de dòmino (vegeu la figura 1).

El treball [14] és una extensió d'aquest en el qual es consideren també diverses modificacions de la sèrie harmònica, incloent-hi signes i reordenacions dels seus termes, així com sèries aleatòries relacionades.

## 2. I per què harmònica?

Les tres successions més conegudes són les anomenades aritmètica, geomètrica i harmònica. Aquestes són, respectivament,

$$\{bk + c\}_{k \geq 0}, \quad \{br^k\}_{k \geq 0}, \quad \left\{\frac{b}{k}\right\}_{k \geq 1}, \quad (1)$$

on  $b$ ,  $c$ ,  $r$  són constants reals. El seus noms provenen del fet següent: donats dos nombres positius  $x$  i  $y$ , hi ha tres mitjanes ben conegudes que es poden calcular amb ells:

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \quad G(x,y) = \sqrt{xy}, \quad H(x,y) = \frac{2xy}{x+y} = \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}\right)^{-1}.$$

S'anomenen mitjana aritmètica, geomètrica i harmònica, respectivament. Resulta que si denotem com a  $x_k$  el terme  $k$ -èsim de cascuna de les tres successions, amb  $b$  i  $r$  positius, es compleix el següent:

$$\text{Cas aritmètic: } A(x_{k-1}, x_{k+1}) = \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2} = \frac{b(k-1) + b(k+1) + 2c}{2} = bk + c = x_k,$$

$$\text{Cas geomètric: } G(x_{k-1}, x_{k+1}) = \sqrt{x_{k-1}x_{k+1}} = \sqrt{br^{k-1}br^{k+1}} = br^k = x_k,$$

$$\text{Cas harmònic: } H(x_{k-1}, x_{k+1}) = \frac{2x_{k-1}x_{k+1}}{x_{k-1} + x_{k+1}} = \frac{\frac{2b^2}{(k-1)(k+1)}}{\frac{b}{k-1} + \frac{b}{k+1}} = \frac{b}{k} = x_k.$$

La mitjana aritmètica no necessita presentació, però les altres dues potser sí. Així, per exemple, si un capital  $C$  ens produeix el primer any un rèdit anual d'un  $x$  per 1 i el segon any un rèdit anual d'un  $y$  per 1, quan han passat dos anys tenim com a capital total  $(1+x)(1+y)C$ . Aleshores, el rèdit mitjà  $r_M$  complirà  $(1+x)(1+y)C = (1+r_M)^2C$  i, per tant,  $r_M = \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 = G(1+x, 1+y) - 1$ .

De manera similar, si anem a un lloc que està a distància  $d$  amb velocitat  $x$  i tornem amb velocitat  $y$ , aleshores recorrem una distància  $2d$  en un temps total  $\frac{d}{x} + \frac{d}{y}$ . Per tant, la velocitat mitjana a la qual hem anat és  $\frac{2d}{d/x + d/y} = \frac{2xy}{x+y} = H(x, y)$ .

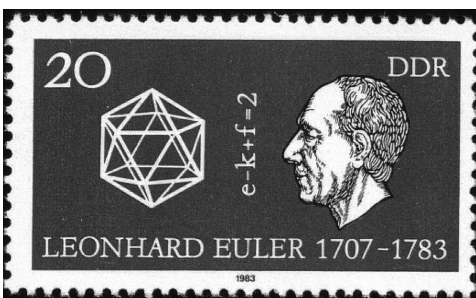
En aquest punt, és natural preguntar-se per què la mitjana  $H(x, y)$  es diu *harmònica*. Sembla ser que devem aquest nom als dos fets següents, estudiats per l'escola pitagòrica ([18, cap. 13], [40]).

Si agafem una corda de longitud  $\ell$  de manera que quan vibra dóna lloc a un cert so, la corda amb longitud  $\frac{\ell}{2}$  sona molt similar. A més, si agafem una tercera corda de longitud  $\frac{2\ell}{3}$ , obtenim un tercer so, més diferent. El fet notable observat pels pitagòrics és que, quan fem vibrar les tres cordes simultàniament, escoltem un acord molt *harmonios* (seria un acord tipus DO-SOL-DO), i resulta que

$$H\left(\ell, \frac{\ell}{2}\right) = \frac{\ell^2}{\ell + \frac{\ell}{2}} = \frac{2\ell}{3}.$$

Un segon motiu per a l'adjectiu harmònic és que, d'entre els cinc sòlids platònics, el cub era de vegades qualificat com a harmònic. Un cub té 6 cares ( $c = 6$ ), 12 arestes ( $a = 12$ ) i 8 vèrtexs ( $v = 8$ ). Doncs,  $H(c, a) = H(6, 12) = 8 = v$ . De manera similar per a un altre sòlid platònic, l'octàedre  $H(v, a) = H(6, 12) = 8 = c$ .

Si busquem més políedres que compleixin la mateixa condició que el cub o l'octàedre,  $H(c, a) = v$  o  $H(v, a) = c$ , i a aquesta condició li afegim la donada per la característica d'Euler  $c - a + v = 2$ , tenim que s'ha de complir una de les equacions diofàntiques següents:



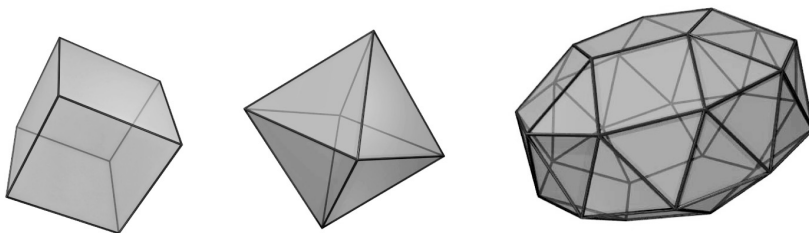


$$(v-1)^2 - 2(c-1)^2 = -1 \quad \text{o} \quad (c-1)^2 - 2(v-1)^2 = -1.$$

Les equacions de la forma  $x^2 - 2y^2 = -1$  són de tipus Pell, anomenades així en honor del matemàtic anglès John Pell (1611-1685), i se sap que tenen infinites parelles de solucions enteres positives ([9, 28]). Resolent-les, obtenim que les solucions més petites del nostre problema  $(c, a, v)$  són les ternes

$$\{(6, 12, 8), (8, 12, 6), (30, 70, 42), (42, 70, 30), (170, 408, 240), \\ (240, 408, 170), (986, 2378, 1394), (1394, 2378, 986), \dots\}.$$

Hi ha un políedre conegut, amb nom *Bicúpula pentagonal giroallargada*, que correspon al quart punt d'aquesta llista (vegeu la figura 2). Aquest políedre és un dels 92 sòlids de Johnson, que són políedres convexos que tenen totes les cares formades per polígons regulars ([22]). Agraïxo a en Jaume Coll per fer-me saber de la seva existència. El tercer punt correspon al seu políedre dual i no sabem que es conegui amb cap nom propi.



**Figura 2. Políedres harmònics.** La tercera figura té  $c = 42$ ,  $a = 70$  i  $v = 30$ .  
Les cares són 2 pentàgons, 10 quadrats i 30 triangles.

De manera natural, associades a les tres successions (1), hi ha tres sèries: l'aritmètica, la geomètrica i l'harmònica,

$$\sum_{k=0}^{\infty} bk + c, \quad \sum_{k=0}^{\infty} br^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{k},$$

respectivament. La primera és sempre divergent. La segona és convergent si i només si  $|r| < 1$  i es coneix tant la seva suma com l'expressió explícita de les seves sumes parcials. Com ja hem comentat, la tercera, amb  $b \neq 0$ , és divergent i és la que estudiem en aquest treball.

### 3. Divergència de la sèrie harmònica

En aquesta secció presentarem diverses proves de la divergència de la sèrie harmònica.

**1a prova.** Comencem amb la prova més antiga del fet esmentat, de voltants de 1350, atribuïda al filòsof francès Nicole Oresme (1323-1382).

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty.$$



Figura 3. N. Oresme.

Una escriptura més rigorosa ens diria que  $h_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ , i per tant  $\lim_{k \rightarrow \infty} h_{2^k} = \infty$ .

Una variació de la prova d'Oresme és la següent: hi ha 9 números amb un dígit,  $1, 2, \dots, 9$  i els seus inversos són més grans que  $\frac{1}{10}$ , per tant  $h_9 > \frac{9}{10}$ . Hi ha 90 números de dos dígit, des de 10 fins a 99, amb inversos més grans que  $\frac{1}{100}$ . Per tant,  $h_{99} > \frac{9}{10} + \frac{90}{100} = 2\left(\frac{9}{10}\right)$ . D'una manera similar,  $h_{999} > \frac{9}{10} + \frac{90}{100} + \frac{900}{1000} = 3\left(\frac{9}{10}\right)$ . En general,  $h_{10^k-1} > \frac{9k}{10}$ , i per tant de nou deduïm que la suma és infinita.

**2a prova.** La prova descrita a continuació és atribuïda al matemàtic italià Pietro Mengoli (1626-1686) i no ens dona una demostració directa, sinó que es basa en el mètode de reducció a l'absurd. Suposem que la sèrie harmònica té una suma finita,  $S$ . Observem, en primer lloc, que

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n}{n^2-1} > \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}, \quad n \geq 2.$$

En particular,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{6}$ ,  $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} > \frac{2}{9}$ ,  $\frac{1}{11} + \frac{1}{13} > \frac{2}{12} \dots$  Per tant,

$$\begin{aligned} S &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right) + \dots \\ &> 1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right) + \dots = 1 + S, \end{aligned}$$

és a dir,  $S > 1 + S$ , i hem arribat a una contradicció.

**3a prova.** Com l'anterior, usa la reducció a l'absurd per a demostrar la divergència de la sèrie. Si  $S$  fos finit, tenim

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &> \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = S, \end{aligned}$$

on clarament la desigualtat és estricta, tot i que prové d'un pas al límit, i de nou arribem a una contradicció.

Una variació d'aquesta prova és com segueix. Si agafem només els inversos dels termes parells, la seva suma és  $\frac{S}{2}$ , ja que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \right) = \frac{S}{2}.$$

Per tant, si la suma és finita, els inversos dels termes senars haurien de sumar també  $\frac{S}{2}$ , però, com que per a tot  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ , es compleix que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots = \frac{S}{2},$$

on de nou la desigualtat és estricta, i obtenim un cop més una contradicció.

**4a prova.** Donem a continuació una prova una mica més tècnica, ja que està basada en la desigualtat  $e^x > 1 + x$ , per  $x \neq 0$ , però que trobem interessant. Considerem

$$\begin{aligned} e^{h_n} &= e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right)} = e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdots e^{\frac{1}{n}} \\ &> \left(1 + 1\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n+1}{n} = n+1. \end{aligned}$$

Per tant,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$ , tal com volíem veure. Observem que aquesta prova també ens diu que, per a tot  $n$ ,  $h_n > \ln(n+1)$ . De fet, també es compleix que  $h_n < \ln(n) + 1$  (vegeu [14, 18, 27]).

Per tant, perquè  $h_n$  sigui gran, el valor de  $n$  ha de ser realment gran: vegeu la taula 1. A la secció 4 es donen estimacions més precises de  $h_n$ .

**Taula 1. Valors de  $h_n$  amb quatre xifres decimals significatives.**

| $n$   | 10     | 100    | 1 000  | 10 000 | 100 000 | 1 000 000 | $10^9$  | $10^{12}$ |
|-------|--------|--------|--------|--------|---------|-----------|---------|-----------|
| $h_n$ | 2.9290 | 5.1874 | 7.4855 | 9.7876 | 12.0901 | 14.3927   | 21.3005 | 28.2082   |

**5a prova.** Acabarem la nostra selecció de proves amb una demostració que usa propietats de la successió de Fibonacci,  $\{f_n\}_{n \geq 0}$ . Recordem que els seus termes vénen donats per la recurrència  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ , amb  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ . Així, els primers són 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Amb una mica de feina es pot demostrar que la seva expressió explícita és

$$f_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{2\phi - 1}, \quad \text{on} \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i compleix} \quad \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \left(\frac{1}{\phi}\right)^2 = \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi + 1} = 1 - \frac{1}{\phi}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{13}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{34}\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{13} + \frac{8}{21} + \frac{13}{34} + \dots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}, \end{aligned}$$

és divergent, ja que el terme general de l'última sèrie no tendeix a zero.

### 3.1. Un tros convergent de la sèrie harmònica. El resultat de Kempner

Dedicarem aquesta subsecció a provar el resultat de Kempner ja enunciat a la introducció i que diu que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}'} \frac{1}{k} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{18}\right) + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{28}\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{88}\right) + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{108}\right) + \frac{1}{110} + \dots, \quad (2) \end{aligned}$$

és convergent, on  $\mathbb{N}'$  denota el conjunt de tots els números naturals que no tenen cap 9 en la seva expressió en base 10. Seguirem els mateixos passos que al seu treball ([23]).

Denotem per  $s_n$  la suma de tots els números de la forma  $\frac{1}{k}$  amb  $10^{n-1} \leq k < 10^n$  i  $k \in \mathbb{N}'$ , i per  $m_n$  el nombre de termes que hi ha a la suma. Calculem fites superiors dels  $m_n$  i també dels  $s_n$ , usant que tots els  $k$ 's són més grans que  $10^{n-1}$  o iguals.

Així, en partir de (2) és clar que  $m_1 = 8 < 9$ ,  $s_1 < 9 \times 1 = 9$ , i de manera similar  $m_2 = 8 \times 9 < 9^2$  i  $s_2 < 9^2 \frac{1}{10}$ . Denotem per  $M_n$  el nombre de termes de la suma amb  $k < 10^n$ . És clar que  $M_n = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Així,  $M_1 < 9$  i  $M_2 < 9 + 9^2$ . Vegem, per inducció, que

$$M_n < 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^n, \quad m_n < 9^n \quad \text{i} \quad s_n < \frac{9^n}{10^{n-1}}.$$

Per això dividim tot  $\mathcal{I}^{n+1} = \{k \in \mathbb{N}' : 0 < k < 10^{n+1}\}$  en els deu subconjunts següents:

$$\mathcal{I}_0^{n+1} = \{k \in \mathbb{N}' : 0 < k < 10^n\}, \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_\alpha^{n+1} = \{k \in \mathbb{N}' : \alpha 10^n \leq k < (\alpha + 1)10^n\},$$

on  $\alpha = 1, 2, \dots, 9$ . L'interval  $\mathcal{I}_9^{n+1}$  és buit, ja que tots els seus números tenen un 9 en la seva expressió decimal. Cada un dels altres vuit  $\mathcal{I}_\alpha^{n+1}$  amb  $\alpha > 0$  té el mateix nombre d'elements, que coincideix amb el nombre d'elements de  $\mathbb{N}'$  que hi ha entre 0 i  $10^n$ ,  $M_n$ , que per hipòtesi d'in-

ducció és menor que  $9+9^2+9^3+\dots+9^n$ . Pertant,  $m_{n+1} < 8 \times (9+9^2+9^3+\dots+9^n) = 8 \frac{9^{n+1}-9}{9-1} < 9^{n+1}$ , i també  $M_{n+1} < 9+9^2+9^3+\dots+9^n+m_{n+1} < 9+9^2+9^3+\dots+9^n+9^{n+1}$ . Finalment,  $s_{n+1} < \frac{m_{n+1}}{10^n} = \frac{9^{n+1}}{10^n}$ , tal com volíem demostrar.

Per acabar,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}'} \frac{1}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^{n+1}}{10^n} = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 9 \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 90.$$

La prova no varia si en lloc del 9 eliminem qualsevol altre dígit excepte el 0. El cas del 0 és lleugerament diferent.

### 3.2. Un tros divergent de la sèrie harmònica. La suma dels inversos dels nombres primers

Reproduïm a continuació una prova per reducció a l'absurd del fet que  $\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$  és divergent deguda a Erdős ([1, 3, 10, 41]). Denotem per  $p_i$  el primer  $i$ -èsim. Així,  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_{100} = 541, \dots, p_{1000} = 7919, \dots$ . Suposem, per tal d'arribar a contradicció, que la sèrie és convergent. Aleshores, existirà un  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Donat  $m \in \mathbb{N}$ , definim  $A_m$  com el subconjunt de  $\{1, 2, \dots, m\}$  format per tots els números que no tenen cap  $p_i$  amb  $i > k$  en la seva descomposició en factors primers. En altres paraules, la seva descomposició en factors primers és de la forma  $p_1^{j_1} \cdots p_k^{j_k}$  amb tots els  $j_u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Fitant per sobre i per sota el nombre d'elements de  $A_m$ ,  $\text{Car}(A_m)$ , i prenent un  $m$  prou gran arribarem a una contradicció.

Comencem fitant  $\text{Car}(A_m)$  per sobre. Tots els elements d' $A_m$  es poden escriure com a  $r \cdot s^2$ , amb  $r \in \mathbb{N}$ , sense cap factor primer en la seva descomposició amb exponent més gran que 1 i  $s \in \mathbb{N}$ . Per tant,  $r = p_1^{\ell_1} \cdots p_k^{\ell_k}$  amb tots els  $\ell_u \in \{0, 1\}$  i com a conseqüència només pot prendre  $2^k$  valors. A més,  $s$  ha de ser un element del conjunt  $\{1, [\sqrt{2}], \dots, [\sqrt{m}]\}$ , on  $[\cdot]$  denota la part sencera. Aleshores,  $s$  només té  $[\sqrt{m}]$  possibilitats. Per tant,

$$\text{Car}(A_m) \leq 2^k [\sqrt{m}] \leq 2^k \sqrt{m}. \quad (4)$$

D'altra banda,  $\{1, 2, \dots, m\} \setminus A_m$ , és un conjunt amb cardinal  $m - \text{Car}(A_m)$  i està format pels números menors o iguals que  $m$  que són divisibles per algun primer  $p_i$  amb  $i > k$ . Per cada  $i$  fixat,  $i > k$ , hi ha com a molt  $\left[\frac{m}{p_i}\right]$  números dins d'aquest conjunt que són divisibles per aquest  $p_i$ . En conseqüència,

$$m - \text{Car}(A_m) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[\frac{m}{p_i}\right] \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{m}{p_i} = m \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{m}{2}, \quad (5)$$

on hem usat (3).

Per tant, a partir de (4) i (5) arribem a

$$\frac{m}{2} < \text{Car}(A_m) \leq 2^k \sqrt{m}. \quad (6)$$

Si prenem qualsevol  $m \geq 2^{2k+2}$ , tenim que  $\frac{\sqrt{m}}{2} \geq 2^k$  i, per tant, que  $\frac{m}{2} \geq 2^k \sqrt{m}$ , que està en contradicció amb (6). Per tant,  $\sum_p \frac{1}{p}$  és divergent, tal com volíem provar. Com hem comentat a la introducció, això ens dóna la intuïció que hi ha una quantitat suficient de primers per a fer divergir la sèrie dels seus recíprocs.

### 3.3. Una curiositat sobre els $h_n$

Una propietat curiosa i coneguda dels números  $h_n, n > 1$  és que en el seu camí cap a infinit mai passen per cap número natural, és a dir,  $h_n \notin \mathbb{N}$ , per  $n > 1$ .

Per a provar-ho, prenem la potència de 2 més gran que sigui menor o igual que  $n$ . És a dir, sigui  $k \in \mathbb{N}$ , tal que  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ . A continuació, anomenem  $m$  el mínim comú múltiple de  $1, 2, \dots, n$ , traient aquest  $2^k$ ,  $m = \text{mcm}(\{1, 2, 3, \dots, n\} \setminus \{2^k\})$ . Aleshores,  $m = 2^{k-1}s$ , amb  $s \in \mathbb{N}$ , senar, ja que el 2 apareix a les descomposicions dels números dels quals fem el mcm elevat com a màxim a  $k - 1$ . Tenim, doncs,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^k} = \frac{j}{2^{k-1}s}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Per tant,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{j}{2^{k-1}s} + \frac{1}{2^k}.$$

Multiplicant per  $2^{k-1}s$  arribem a  $2^{k-1}s h_n = j + \frac{s}{2}$ . Com que  $s$  és senar,  $2^{k-1}s \in \mathbb{N}$  i  $j \in \mathbb{N}$ , tenim que  $h_n \notin \mathbb{N}$ , com volíem demostrar.

## 4. Les constants d'Euler, Mertens i Brun

Euler, el 1731, va provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n - \ln(n)) = \gamma \in [0, 1), \quad (7)$$

on  $\gamma$  és precisament el número que avui en dia anomenem constant d'Euler i que és una de les constants més famoses en matemàtiques: vegeu [18, 27]. El seu valor és  $\gamma \approx 0.577218$ . També s'anomena constant d'Euler-Mascheroni, ja que Mascheroni la va calcular l'any 1790 amb dinou xifres decimals correctes. L'any 1812, Gauss la va obtenir amb quaranta xifres significatives. Avui encara no se sap si  $\gamma$  és racional o irracional.

Per a demostrar que el límit (7) existeix, el que es prova és que la successió  $h_n - \ln(n)$  és decreixent i que està fitada inferiorment. Un refinament d'aquest fet és que

$$h_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + R(n), \quad \text{amb} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nR(n) = 0, \quad (8)$$