407 TEXTOS DOCENTS

PROBLEMAS DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA
Vol. 1. Probabilidades

Carles M. Cuadras

Departamento de Estadística

UNIVERSITAT DE BARCELONA

PROBLEMAS DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

Vol. 1. Probabilidades

Carles M. Cuadras

Departamento de Estadística

407 TEXTOS DOCENTS

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Edicions

Índice

Prólogo

La primera versión de esta obra fue publicada por la Universidad de Barcelona en 1974, formando parte de la colección Publicaciones del Laboratorio de Cálculo. Pronto se convirtió en libro y después de un periplo de cinco lustros por las editoriales EUNIBAR, PPU y EUB S.L., y tras una docena de ediciones, la última (revisada y ampliada), apareció en 1999-2000. Agotadas estas ediciones, y ante la insistencia de varios colegas, la obra regresa a la Universidad de Barcelona, que se ha ofrecido a editarla y publicarla con nuevo formato, dentro de la colección de Textos Docentes.

Es este un libro de ejercicios y por lo tanto destinado a proponer y resolver problemas de probabilidades y estadística. Los problemas de naturaleza teórica se alternan con los aplicados. Se ha procurado presentarlos en orden de dificultad creciente. La extensión de la obra ha obligado a dividirla en dos volúmenes: el primero dedicado a Problemas de probabilidades y el segundo a Problemas de inferencia estadística. La actual edición EUB de la Universidad de Barcelona mejora la edición de 1999-2000 en la presentación y revisión de algunos apartados.

A fin de facilitar la consulta del libro, se incluye en cada capítulo un extenso resumen de la teoría. Para ampliar la teoría, el lector deberá consultar los libros pertinentes, pudiendo orientarse en la bibliografía que aparece al final de cada volumen. Los apartados de mayor dificultad teórica y los problemas de resolución más difícil se indican con un asterisco.

La Estadística se ha ido imponiendo como materia fundamental en la mayoría de los estudios universitarios. Esta obra, con un planteamiento teórico-práctico, sintetiza los principales temas de la Probabilidad y la Estadística. A pesar de los grandes avances tecnológicos, la base no ha cambiado, por lo que el contenido de este libro sigue teniendo plena actualidad.

Esta obra resulta adecuada para estudiantes y profesores de primer ciclo de carreras y grados universitarios (Estadística, Biología, Matemáticas, Física, Química, Geología, Ingeniería, Arquitectura, Informática, Economía, Veterinaria, Psicología, Pedagogía y Medicina).

Mi más sincero agradecimiento a todos aquellos que me han hecho comentarios, sugerido cambios y correcciones, haciendo posible la versión actual. En especial debo mencionar a J. Fortiana, P. Sánchez Algarra, G. Alonso, J. M. Oller, F. Carmona, J. Ocaña, C. Ruiz-Rivas, M. Ríos, R. Vélez, J. M. Font y D. Cuadras.

Respecto a la presente edición, deseo agradecer a M. Aicart, J. M. Oller y M. C. Pallejá su valiosa colaboración en la preparación del original.

Carles M. Cuadras

Barcelona, septiembre de 2016

1. ÁLGEBRA DE SUCESOS Y PROBABILIDAD

1.1. Experiencias, sucesos y álgebras

Sea Ω un conjunto no vacío. Una *experiencia* E consiste en obtener, por algún procedimiento que la caracteriza, un elemento ω de Ω. Diremos que ω es un *suceso elemental* (o caso posible), resultado de la experiencia E.

Sea A un subconjunto de Ω. Diremos que A es un *suceso* ligado a la experiencia E si obtenido ω podemos afirmar que $\omega \in A$ (A se ha presentado) o bien $\omega \notin A$ (A no se ha presentado). Un suceso es un subconjunto observable o distinguible bajo la experiencia E.

Una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω diremos que es un *álgebra* si verifica:

1. Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$.
2. Si $A, B \in \mathscr{A}$, entonces $A \cup B \in \mathscr{A}$.
3. $\emptyset \in \mathscr{A}$.

La colección de sucesos observables bajo una experiencia E, incluyendo el conjunto $\emptyset$, tiene estructura de álgebra. A los elementos de $\mathscr{A}$ les llamaremos también sucesos. A^c es el *suceso contrario* de A, $A \cup B$ es el *suceso reunión* y $\emptyset$ es el *suceso imposible*.

Consecuencias de la definición de álgebra son:

4. $\Omega \in \mathscr{A}$.
5. Si $A, B \in \mathscr{A}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{A}$.

Es decir, Ω es también un suceso al que llamaremos *suceso seguro*, y $A \cap B$ es otro suceso, llamado *suceso intersección*. Indicaremos también el suceso contrario por $\overline{A}$ y el suceso intersección por $A \cdot B$.

1.2. Definición de probabilidad

Una *probabilidad* P sobre un álgebra $\mathscr{A}$ es una aplicación:

$$P: \quad \mathscr{A} \longrightarrow [0,\ 1]$$

verificando:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Si A y B son conjuntos disjuntos de $\mathscr{A}$ (sucesos mutuamente excluyentes), entonces, indicando $A \cup B = A + B$, se cumple:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

A la terna $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ se le llama *espacio de probabilidades*.

1.3. Propiedades de la probabilidad

1. $P(\emptyset)=0$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leqslant P(B)$.
3. $P(A^c)=1-P(A)$.
4. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$,

siendo A y B sucesos no necesariamente excluyentes.

1.4. Observaciones

1. Un suceso elemental puede no ser un suceso probabilizable.
2. Solamente los sucesos pertenecientes a un álgebra $\mathscr{A}$ tienen definida una probabilidad.
3. Partiendo de un mismo conjunto o población Ω se pueden definir diferentes experiencias E. Cada experiencia E tiene asociada un álgebra $\mathscr{A}$ (el álgebra de los sucesos observables). Sobre una misma álgebra $\mathscr{A}$ pueden definirse distintas probabilidades, P, P', P'', etc.
4. Siempre que deseemos encontrar la probabilidad de un suceso es necesario especificar Ω y $\mathscr{A}$. El buen manejo de las propiedades anteriores nos facilitará el cálculo de las probabilidades de los sucesos de $\mathscr{A}$.

1.5. Álgebras finitas

Un suceso A de un álgebra, distinto de $\emptyset$ y de Ω, es un *átomo* si verifica:

$$B \in \mathscr{A} \quad B \subset A \quad \text{pero} \quad B \neq A \Rightarrow B=\emptyset.$$

Los átomos de un álgebra, si los hay, son siempre sucesos mutuamente excluyentes. Un álgebra, distinta del álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$, con un número finito de sucesos contiene al menos un átomo, verificándose:

Teorema 1. Sean $A_1, \dots, A_m$ los átomos de un álgebra finita $\mathscr{A}$. Entonces:

1. Todo suceso $A \in \mathscr{A}$ es reunión de uno o varios átomos,

$$A=A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}.$$

2. La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los átomos que contiene,

$$P(A)=P(A_{i_1})+\cdots+P(A_{i_k}).$$

*1.6. Sigma-álgebras

Una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω es una σ—álgebra si verifica:

1. Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$.

2. Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una colección numerable de conjuntos de $\mathscr{A}$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

3. $\emptyset \in \mathscr{A}$.

Consecuencias de la definición de σ—álgebra son:

4. $\Omega \in \mathscr{A}$.
5. Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una colección numerable de conjuntos, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

Una *probabilidad* P sobre una σ—álgebra $\mathscr{A}$ se define como una aplicación $P : \mathscr{A} \longrightarrow [0, 1]$ tal que:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es una colección numerable de sucesos mutuamente excluyentes dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Problemas resueltos

1.1. Sea Ω el conjunto de casos posibles que resultan de la tirada de un dado. Decir cuáles de las siguientes clases de conjuntos son álgebras:

a) $\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.

b) $\mathscr{A}_2 = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\} = \{\emptyset, I, P, \Omega\}$.

c) $\mathscr{A}_3 = \mathscr{P}(\Omega)$, *conjunto de las partes de* Ω.

d) $\mathscr{A}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$.

Solución

a) $\mathscr{A}_1$ es álgebra porque el $\emptyset$ pertenece a $\mathscr{A}$, así como su complementario Ω y la reunión $\emptyset \cup \Omega = \Omega$.

b) También, porque $\emptyset \in \mathscr{A}_2$, $\emptyset^c = \Omega \in \mathscr{A}_2$, $\emptyset \cup \Omega = \Omega \in \mathscr{A}_2$, $I \cup P = \Omega \in \mathscr{A}_2$, etc.

c) También, ya que cualquier operación entre conjuntos de $\mathscr{P}(\Omega)$ será cerrada.

d) No es álgebra, puesto que $\{1\}^c = \{2, 3, 4, 5, 6\} \notin \mathscr{A}_4$.

1.2. Consideremos la experiencia «lanzar un dado ordinario». Indiquemos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el conjunto de casos posibles (caras del dado). Construir el álgebra asociada a la experiencia en los casos:

a) de que las caras pares estén pintadas de blanco y las caras impares de negro, ocultando el número de la cara,

b) sin ninguna manipulación sobre las caras del dado.

Solución. En el primer caso, dado que solo se puede distinguir entre blanco ($\Rightarrow$ par) o negro ($\Rightarrow$ impar), el álgebra asociada es

$$\mathscr{A} = \{\emptyset, P, I, \Omega\}.$$

Un suceso elemental no es un suceso. Por ejemplo, si se presenta el resultado $\{1\}$ solo podemos afirmar que se ha presentado el suceso I (impar), porque el resultado que observaremos es que la cara obtenida es negra. Esto significa que el suceso elemental $\{1\}$ no es un suceso y por tanto carece de probabilidad. Los únicos sucesos probabilizables son los sucesos de $\mathscr{A}$, cuyas probabilidades son:

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(P) = 1/2, \quad P(I) = 1/2, \quad P(\Omega) = 1.$$

En el segundo caso es posible distinguir entre cada una de las caras del dado. Luego los sucesos elementales $\{1\}, \ldots, \{6\}$ son también sucesos, cada uno de ellos de probabilidad $1/6$, y el álgebra asociada es

$$\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega) \quad \text{(partes de } \Omega\text{)}.$$

Todo subconjunto de Ω es suceso y tiene definida una probabilidad.

1.3. Se extrae una carta de una baraja española de 48 cartas. Se pide:

a) Probabilidad de que sea figura o copa.

b) Probabilidad de que sea figura, pero no espada.

Solución. El conjunto de sucesos elementales es:

$$\Omega = \{48 \text{ cartas de la baraja}\}.$$

Al extraer una carta indicamos los sucesos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{que salga figura}\} \\ B &= \{\text{que salga copa}\} \\ C &= \{\text{que salga espada}\}. \end{aligned}$$

a) Corresponde al suceso $A \cup B$:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{12}{48} + \frac{12}{48} - \frac{3}{48} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

porque hay 12 figuras, 12 copas y 3 figuras que son copas.

b) Es el suceso $A \cap \overline{C}$ (indicando por $\overline{C}$ el complementario de C). Entonces:

$$P(A \cap \overline{C}) = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}.$$

1.4. En una ciudad se publican tres periódicos A, B y C. El 30 % de la población lee A, el 20 % lee B y el 15 % lee C, el 12 % lee A y B, el 9 % A y C y el 6 % B y C; finalmente el 3 % lee A, B y C. Se pide:

a) Porcentaje de personas que leen al menos uno de los tres periódicos.

b) Porcentaje que lee sólo A.

c) Porcentaje que leen B o C, pero no A.

d) Porcentaje de personas que leen A o bien, no leen ni B ni C.

Solución. En este caso cada ciudadano representa un suceso elemental, siendo:

$$\Omega = \{\text{población de la ciudad}\}.$$

Indiquemos también por A, B o C, los sucesos un ciudadano lee A, B o C respectivamente.

El álgebra $\mathscr{A}$ de sucesos está formada por $\emptyset$, Ω y todas las posibles reuniones, intersecciones y complementaciones formadas a partir de A, B y C. Se dice que $\mathscr{A}$ es el álgebra generada por tales conjuntos.

Dividiendo los porcentajes por cien, tendremos las probabilidades de los diferentes sucesos.

a) Corresponde al suceso $A \cup B \cup C$. Por generalización inmediata de la probabilidad de la reunión de dos sucesos:

$$\begin{aligned}(*) \quad P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}15 - 0{,}12 - 0{,}09 - 0{,}06 + 0{,}03 \\ &= 0{,}41.\end{aligned}$$

Respuesta: el 41 %.

b) Corresponde al suceso $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Se verifica

$$A \cup B \cup C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup B \cup C,$$

de donde según (*)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(B) + P(C) - P(\emptyset) - P(\emptyset) - P(B \cap C) + P(\emptyset),$$

pues téngase en cuenta que:

$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap B = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap B \cap C = \emptyset$$

luego

$$
\begin{aligned}
P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= P(A \cup B \cup C) - P(B) - P(C) + P(B \cap C) \\
&= 0{,}41 - 0{,}2 - 0{,}15 + 0{,}06 = 0{,}12.
\end{aligned}
$$

Respuesta: el 12 %.

c) Corresponde al suceso $\overline{A} \cap (B \cup C) = \overline{A} \cdot (B \cup C)$.

Se verifica $A \cup B \cup C = A \cup (\overline{A} \cdot (B \cup C))$, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(\overline{A} \cdot (B \cap C))$ pues A y $\overline{A} \cdot (B \cup C)$ son mutuamente excluyentes.

$$P(\overline{A} \cdot (B \cup C)) = 0{,}41 - 0{,}3 = 0{,}11.$$

Respuesta: el 11 %.

d) Corresponde al suceso $A \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$, contrario del anterior

$$P(A \cup (\overline{B} \cdot \overline{C})) = 1 - 0{,}11$$

Respuesta: el 89 %.

Nota: En este problema, un suceso elemental no es un suceso (no tiene sentido determinar con los datos que tenemos el porcentaje o probabilidad correspondiente a un ciudadano determinado). Tampoco es un suceso cualquier subconjunto de Ω, tal como «el conjunto de ciudadanos que poseen automóvil», porque no puede expresarse en función de los sucesos anteriores.

1.5. Sea un dado tal que la probabilidad de las distintas caras es proporcional al número de puntos inscritos en ellas. Hallar la probabilidad de obtener con este dado un número par.

Solución

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ y el álgebra es } \quad \mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega).$$

Cada suceso elemental es un suceso cuya probabilidad es:

$$P(i) = \lambda \cdot i \quad i = 1, 2, \ldots, 6,$$

donde λ es una constante de proporcionalidad.

Pero:

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda \cdot i = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot 21 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{21}.$$

Luego:

$$P(\{\text{que salga par}\}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

1.6. Dar una explicación en términos de espacio de probabilidad, de la fórmula clásica:

$$\text{probabilidad} = \frac{\text{n.}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{n.}^\circ \text{ de casos posibles}}.$$

Solución. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \quad \mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

Cada ω_j representa un caso posible que es, además, un suceso. Si todos los ω_j son igualmente probables:

$$\sum_{j=1}^{n} P(\omega_j) = 1 \quad \Longrightarrow \quad n \cdot P(\omega_j) = 1 \quad \Longrightarrow \quad P(\omega_j) = \frac{1}{n}, \quad \forall\, j.$$

Si A es un suceso que consta de k sucesos elementales,

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\},$$

entonces: $P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j}) = \dfrac{k}{n}$.

1.7. Un examen de reválida de Licenciatura consta de 14 temas. Se debe escoger un tema de dos elegidos al azar. Calcular la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas, le toque al menos uno que sabe. ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a 1/2 de superar el examen?

Solución. Hay $\binom{14}{2}$ maneras de elegir dos temas (casos posibles). Por otra parte, hay 5×9 maneras de elegir uno que sabe y uno que no sabe, y $\binom{5}{2}$ maneras de elegir dos temas que sabe (casos favorables). La probabilidad es:

$$\frac{5 \times 9}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{55}{91} = 0{,}6044.$$

Si prepara n temas, por un razonamiento análogo, el número de casos favorables es:

$$C(n) = n(14-n) + \binom{n}{2} = n(14-n) + n(n-1)/2.$$

Como $\binom{14}{2} = 91$, n debe ser tal que $C(n) > \dfrac{91}{2}$. La solución es $n = 4$.

1.8. Se elige un número al azar del 1 al 6.000, todos igualmente probables. Hallar la probabilidad de que sea múltiplo de 2 o de 3, o de 4, o de 5.

Solución. Ω está formado por los números del 1 al 6.000. Al extraer un número, indicamos los sucesos: