

PROBLEMAS DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

Vol. 1. Probabilidades

Carles M. Cuadras

Departamento de Estadística

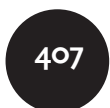


PROBLEMAS DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

Vol. 1. Probabilidades

Carles M. Cuadras

Departamento de Estadística



TEXTOS DOCENTS



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Edicions

Índice

PRÓLOGO	11
1. ÁLGEBRA DE SUCESOS Y PROBABILIDAD	13
1.1. Experiencias, sucesos y álgebras	13
1.2. Definición de probabilidad	13
1.3. Propiedades de la probabilidad	14
1.4. Observaciones	14
1.5. Álgebras finitas	14
1.6. Sigma-álgebras	14
Problemas resueltos	15
Enunciados	21
2. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA	25
2.1. Fórmula de la probabilidad condicionada	25
2.2. Propiedades	25
2.3. Producto cartesiano de espacios de probabilidad	26
Problemas resueltos	26
Enunciados	36
3. TEOREMA DE LAS PROBABILIDAD TOTALES Y TEOREMA DE BAYES	39
3.1. Introducción	39
3.2. Teorema de las probabilidades totales	39
3.3. Teorema de Bayes	39
3.4. Infinitas causas	40
Problemas resueltos	40
Enunciados	49
4. VARIABLES ALEATORIAS Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN	51
4.1. Definición de variable aleatoria	51
4.2. Propiedades	51
4.3. Función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria	52
4.4. Variables aleatorias discretas	52
4.5. Variables aleatorias absolutamente continuas	53
4.6. Probabilidad en un punto y en un intervalo	53
4.7. Variables aleatorias en álgebras infinitas	54
4.8. Forma general de una función de distribución	54
4.9. Cambio de variable	54
Problemas resueltos	55
Enunciados	62

5. DISTRIBUCIONES BIVARIANTES Y MULTIVARIANTES	65
5.1. Distribuciones bivariantes	65
5.2. Propiedades de la función de distribución bivalente	65
5.3. Distribuciones bivariantes discretas	66
5.4. Distribuciones bivariantes absolutamente continuas	66
5.5. Distribuciones marginales	67
5.6. Independencia estocástica	67
5.7. Distribuciones condicionadas	68
5.8. Clases de Fréchet	68
5.9. Distribuciones multivariantes	69
5.10. Cambio de variables	70
Problemas resueltos	71
Enunciados	85
6. ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA	89
6.1. Definición de esperanza	89
6.2. Significado de la esperanza	90
6.3. Propiedades de la esperanza	90
6.4. Definición de varianza	91
6.5. Propiedades de la varianza	91
6.6. Teorema de Chebychev	91
6.7. Definición general de esperanza	92
6.8. Otras medidas de posición y dispersión	92
Problemas resueltos	93
Enunciados	100
7. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y OTRAS DISTRIBUCIONES CLÁSICAS	103
7.1. Distribución de Bernoulli	103
7.2. Distribución binomial	103
7.3. Distribución multinomial	104
7.4. Distribución hipergeométrica	104
7.5. Distribución geométrica o de Pascal	105
7.6. Distribución binomial negativa	106
7.7. Distribución uniforme	107
7.8. Distribución de Cauchy	107
7.9. Distribución exponencial negativa	108
7.10. Distribución gamma	108
7.11. Distribución beta	109
7.12. Distribución de Laplace	110
7.13. Distribución de Pareto	111
7.14. Distribuciones utilizadas en fiabilidad	111
Problemas resueltos	113
Enunciados	123
8. DISTRIBUCIÓN DE POISSON	127
8.1. Definición	127
8.2. Propiedades	127

8.3.	Aproximación de la distribución binomial por la distribución de Poisson	127
8.4.	Proceso de Poisson	128
8.5.	Distribuciones de Poisson compuestas	128
8.6.	Índice de agregación	129
8.7.	Relaciones entre las distribuciones Poisson, gamma y ji-cuadrado	130
	Problemas resueltos	130
	Enunciados	137
9.	DISTRIBUCIÓN NORMAL	141
9.1.	Definición	141
9.2.	Propiedades	141
9.3.	La normal reducida	141
9.4.	Teorema central del límite	142
9.5.	Aproximaciones de algunas distribuciones a la distribución normal	144
9.6.	Distribución log-normal	145
	Problemas resueltos	146
	Enunciados	157
10.	MOMENTOS Y FUNCIÓN CARACTERÍSTICA	161
10.1.	Momentos de una variable aleatoria	161
10.2.	Observaciones	161
10.3.	Función generatriz de momentos	162
10.4.	Propiedades de la función generatriz de momentos	162
10.5.	Función característica	163
10.6.	Propiedades de la función característica	164
10.7.	Funciones características de las principales distribuciones	164
10.8.	Distribución de una variable aleatoria a partir de su función característica	165
10.9.	Momentos y funciones características bivariantes	165
10.10.	Desigualdad de Cauchy-Schwarz	166
	Problemas resueltos	166
	Enunciados	176
11.	REGRESIÓN Y CORRELACIÓN EN DOS VARIABLES	179
11.1.	Covarianza	179
11.2.	Regresión lineal entre dos variables	180
11.3.	Propiedades de las rectas de regresión	181
11.4.	Coefficiente de correlación	181
11.5.	Propiedades de la correlación	181
11.6.	Varianza residual	182
11.7.	Regresión entre variables aleatorias	182
11.8.	Correlación mínima y máxima	184
11.9.	Curva de regresión de la media	184
11.10.	Estimación de la razón de correlación	185
11.11.	Regresión no lineal	186
	Problemas resueltos	187
	Enunciados	201

12. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN MÚLTIPLE	205
12.1. Regresión lineal múltiple	205
12.2. Correlación múltiple	206
12.3. Correlación parcial	207
12.4. Matriz de covarianzas entre M variables	207
12.5. Matriz de correlaciones entre M variables	208
Problemas resueltos	209
Enunciados	217
13. DISTRIBUCIONES RELACIONADAS CON LA NORMAL	221
13.1. Distribución normal bivalente	221
13.2. Distribución ji-cuadrado	222
13.3. Distribución t de Student	223
13.4. Distribución F de Fisher-Snedecor	225
13.5. Distribución normal multivariante	226
Problemas resueltos	228
Enunciados	238
14. CONVERGENCIA DE SUCESIONES DE VARIABLES ALEATORIAS	241
14.1. Sucesiones de variables aleatorias	241
14.2. Convergencia en probabilidad	241
14.3. Teorema de Bernoulli	242
14.4. Teorema de Poisson	243
14.5. Ley de los grandes números	243
14.6. Convergencia en ley	244
14.7. Convergencia casi segura	245
14.8. Ley fuerte de los grandes números	246
14.9. Convergencia en media de orden r	247
14.10. Relaciones entre los tipos de convergencia	247
Problemas resueltos	247
Enunciados	255
15. CADENAS DE MARKOV	259
15.1. Introducción	259
15.2. Cadenas de Markov finitas	259
15.3. Cadenas homogéneas	260
15.4. Matrices estocásticas	261
15.5. Propiedades ergódicas	262
15.6. Estados absorbentes	263
15.7. Clasificación de los estados	264
15.8. Cadenas con infinitos estados	265
Problemas resueltos	266
Enunciados	281

SOLUCIONES	283
PROBLEMAS DE RECAPITULACIÓN	295
BIBLIOGRAFÍA	309
CUADRO RESUMEN CON LAS PRINCIPALES DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD	311
TABLAS ESTADÍSTICAS	313
I. Tabla de valores de e^{-x}	315
II. Función de distribución normal reducida	316
III. Tabla de la distribución normal (dos colas)	317
IV. Distribución ji-cuadrado	318
V. Distribución t de Student	319
VI. Valores críticos de la distribución F $P(F_n^m > \text{valor tabulado}) = 0.05$	320
VII. Valores críticos de la distribución F $P(F_n^m > \text{valor tabulado}) = 0.01$	321
Relaciones entre las principales distribuciones de probabilidad	322
ÍNDICE ANALÍTICO	323

Prólogo

La primera versión de esta obra fue publicada por la Universidad de Barcelona en 1974, formando parte de la colección Publicaciones del Laboratorio de Cálculo. Pronto se convirtió en libro y después de un periplo de cinco lustros por las editoriales EUNIBAR, PPU y EUB S.L., y tras una docena de ediciones, la última (revisada y ampliada), apareció en 1999-2000. Agotadas estas ediciones, y ante la insistencia de varios colegas, la obra regresa a la Universidad de Barcelona, que se ha ofrecido a editarla y publicarla con nuevo formato, dentro de la colección de Textos Docentes.

Es este un libro de ejercicios y por lo tanto destinado a proponer y resolver problemas de probabilidades y estadística. Los problemas de naturaleza teórica se alternan con los aplicados. Se ha procurado presentarlos en orden de dificultad creciente. La extensión de la obra ha obligado a dividirla en dos volúmenes: el primero dedicado a Problemas de probabilidades y el segundo a Problemas de inferencia estadística. La actual edición EUB de la Universidad de Barcelona mejora la edición de 1999-2000 en la presentación y revisión de algunos apartados.

A fin de facilitar la consulta del libro, se incluye en cada capítulo un extenso resumen de la teoría. Para ampliar la teoría, el lector deberá consultar los libros pertinentes, pudiendo orientarse en la bibliografía que aparece al final de cada volumen. Los apartados de mayor dificultad teórica y los problemas de resolución más difícil se indican con un asterisco.

La Estadística se ha ido imponiendo como materia fundamental en la mayoría de los estudios universitarios. Esta obra, con un planteamiento teórico-práctico, sintetiza los principales temas de la Probabilidad y la Estadística. A pesar de los grandes avances tecnológicos, la base no ha cambiado, por lo que el contenido de este libro sigue teniendo plena actualidad.

Esta obra resulta adecuada para estudiantes y profesores de primer ciclo de carreras y grados universitarios (Estadística, Biología, Matemáticas, Física, Química, Geología, Ingeniería, Arquitectura, Informática, Economía, Veterinaria, Psicología, Pedagogía y Medicina).

Mi más sincero agradecimiento a todos aquellos que me han hecho comentarios, sugerido cambios y correcciones, haciendo posible la versión actual. En especial debo mencionar a J. Fortiana, P. Sánchez Algarra, G. Alonso, J. M. Oller, F. Carmona, J. Ocaña, C. Ruiz-Rivas, M. Ríos, R. Vélez, J. M. Font y D. Cuadras.

Respecto a la presente edición, deseo agradecer a M. Aicart, J. M. Oller y M. C. Pallejá su valiosa colaboración en la preparación del original.

Carles M. Cuadras

Barcelona, septiembre de 2016

1. ÁLGEBRA DE SUCESOS Y PROBABILIDAD

1.1. Experiencias, sucesos y álgebras

Sea Ω un conjunto no vacío. Una *experiencia* E consiste en obtener, por algún procedimiento que la caracteriza, un elemento ω de Ω . Diremos que ω es un *suceso elemental* (o caso posible), resultado de la experiencia E .

Sea A un subconjunto de Ω . Diremos que A es un *suceso* ligado a la experiencia E si obtenido ω podemos afirmar que $\omega \in A$ (A se ha presentado) o bien $\omega \notin A$ (A no se ha presentado). Un suceso es un subconjunto observable o distinguible bajo la experiencia E .

Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω diremos que es un *álgebra* si verifica:

1. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
3. $\emptyset \in \mathcal{A}$.

La colección de sucesos observables bajo una experiencia E , incluyendo el conjunto $\emptyset$, tiene estructura de álgebra. A los elementos de $\mathcal{A}$ les llamaremos también sucesos. A^c es el *suceso contrario* de A , $A \cup B$ es el *suceso reunión* y $\emptyset$ es el *suceso imposible*.

Consecuencias de la definición de álgebra son:

4. $\Omega \in \mathcal{A}$.
5. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Es decir, Ω es también un suceso al que llamaremos *suceso seguro*, y $A \cap B$ es otro suceso, llamado *suceso intersección*. Indicaremos también el suceso contrario por $\bar{A}$ y el suceso intersección por $A \cdot B$.

1.2. Definición de probabilidad

Una *probabilidad* P sobre un álgebra $\mathcal{A}$ es una aplicación:

$$P: \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

verificando:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Si A y B son conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$ (sucesos mutuamente excluyentes), entonces, indicando $A \cup B = A + B$, se cumple:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se le llama *espacio de probabilidades*.

1.3. Propiedades de la probabilidad

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

siendo A y B sucesos no necesariamente excluyentes.

1.4. Observaciones

1. Un suceso elemental puede no ser un suceso probabilizable.
2. Solamente los sucesos pertenecientes a un álgebra $\mathcal{A}$ tienen definida una probabilidad.
3. Partiendo de un mismo conjunto o población Ω se pueden definir diferentes experiencias E . Cada experiencia E tiene asociada un álgebra $\mathcal{A}$ (el álgebra de los sucesos observables). Sobre una misma álgebra $\mathcal{A}$ pueden definirse distintas probabilidades, P, P', P'' , etc.
4. Siempre que deseemos encontrar la probabilidad de un suceso es necesario especificar Ω y $\mathcal{A}$. El buen manejo de las propiedades anteriores nos facilitará el cálculo de las probabilidades de los sucesos de $\mathcal{A}$.

1.5. Álgebras finitas

Un suceso A de un álgebra, distinto de $\emptyset$ y de Ω , es un *átomo* si verifica:

$$B \in \mathcal{A} \quad B \subset A \quad \text{pero} \quad B \neq A \Rightarrow B = \emptyset.$$

Los átomos de un álgebra, si los hay, son siempre sucesos mutuamente excluyentes. Un álgebra, distinta del álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$, con un número finito de sucesos contiene al menos un átomo, verificándose:

Teorema 1. Sean $A_1, \dots, A_m$ los átomos de un álgebra finita $\mathcal{A}$. Entonces:

1. Todo suceso $A \in \mathcal{A}$ es reunión de uno o varios átomos,

$$A = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}.$$

2. La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los átomos que contiene,

$$P(A) = P(A_{i_1}) + \dots + P(A_{i_k}).$$

*1.6. Sigma-álgebras

Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra si verifica:

1. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

2. Si $A_1, \dots, A_n, \dots$ es una colección numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

3. $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Consecuencias de la definición de σ -álgebra son:

4. $\Omega \in \mathcal{A}$.

5. Si $A_1, \dots, A_n, \dots$ es una colección numerable de conjuntos, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Una *probabilidad* P sobre una σ -álgebra $\mathcal{A}$ se define como una aplicación $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Si $A_1, \dots, A_n, \dots$ es una colección numerable de sucesos mutuamente excluyentes dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Problemas resueltos

1.1. Sea Ω el conjunto de casos posibles que resultan de la tirada de un dado. Decir cuáles de las siguientes clases de conjuntos son álgebras:

- a) $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.
- b) $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\} = \{\emptyset, I, P, \Omega\}$.
- c) $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$, conjunto de las partes de Ω .
- d) $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$.

Solución

- a) $\mathcal{A}_1$ es álgebra porque el $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{A}$, así como su complementario Ω y la reunión $\emptyset \cup \Omega = \Omega$.
- b) También, porque $\emptyset \in \mathcal{A}_2$, $\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{A}_2$, $\emptyset \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{A}_2$, $I \cup P = \Omega \in \mathcal{A}_2$, etc.
- c) También, ya que cualquier operación entre conjuntos de $\mathcal{P}(\Omega)$ será cerrada.
- d) No es álgebra, puesto que $\{1\}^c = \{2, 3, 4, 5, 6\} \notin \mathcal{A}_4$.

1.2. Consideremos la experiencia «lanzar un dado ordinario». Indiquemos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el conjunto de casos posibles (caras del dado). Construir el álgebra asociada a la experiencia en los casos:

- a) de que las caras pares estén pintadas de blanco y las caras impares de negro, ocultando el número de la cara,
- b) sin ninguna manipulación sobre las caras del dado.

Solución. En el primer caso, dado que solo se puede distinguir entre blanco ($\Rightarrow$ par) o negro ($\Rightarrow$ impar), el álgebra asociada es

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, P, I, \Omega\}.$$

Un suceso elemental no es un suceso. Por ejemplo, si se presenta el resultado $\{1\}$ solo podemos afirmar que se ha presentado el suceso I (impar), porque el resultado que observaremos es que la cara obtenida es negra. Esto significa que el suceso elemental $\{1\}$ no es un suceso y por tanto carece de probabilidad. Los únicos sucesos probabilizables son los sucesos de $\mathcal{A}$, cuyas probabilidades son:

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(P) = 1/2, \quad P(I) = 1/2, \quad P(\Omega) = 1.$$

En el segundo caso es posible distinguir entre cada una de las caras del dado. Luego los sucesos elementales $\{1\}, \dots, \{6\}$ son también sucesos, cada uno de ellos de probabilidad $1/6$, y el álgebra asociada es

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad (\text{partes de } \Omega).$$

Todo subconjunto de Ω es suceso y tiene definida una probabilidad.

1.3. Se extrae una carta de una baraja española de 48 cartas. Se pide:

- a) Probabilidad de que sea figura o copa.
- b) Probabilidad de que sea figura, pero no espada.

Solución. El conjunto de sucesos elementales es:

$$\Omega = \{48 \text{ cartas de la baraja}\}.$$

Al extraer una carta indicamos los sucesos:

$$A = \{\text{que salga figura}\}$$

$$B = \{\text{que salga copa}\}$$

$$C = \{\text{que salga espada}\}.$$

- a) Corresponde al suceso $A \cup B$:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{12}{48} + \frac{12}{48} - \frac{3}{48} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

porque hay 12 figuras, 12 copas y 3 figuras que son copas.

b) Es el suceso $A \cap \overline{C}$ (indicando por $\overline{C}$ el complementario de C). Entonces:

$$P(A \cap \overline{C}) = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}.$$

1.4. En una ciudad se publican tres periódicos A , B y C . El 30% de la población lee A , el 20% lee B y el 15% lee C , el 12% lee A y B , el 9% A y C y el 6% B y C ; finalmente el 3% lee A , B y C . Se pide:

- Porcentaje de personas que leen al menos uno de los tres periódicos.
- Porcentaje que lee sólo A .
- Porcentaje que leen B o C , pero no A .
- Porcentaje de personas que leen A o bien, no leen ni B ni C .

Solución. En este caso cada ciudadano representa un suceso elemental, siendo:

$$\Omega = \{\text{población de la ciudad}\}.$$

Indiquemos también por A , B o C , los sucesos un ciudadano lee A , B o C respectivamente.

El álgebra $\mathcal{A}$ de sucesos está formada por $\emptyset$, Ω y todas las posibles reuniones, intersecciones y complementaciones formadas a partir de A , B y C . Se dice que $\mathcal{A}$ es el álgebra generada por tales conjuntos.

Dividiendo los porcentajes por cien, tendremos las probabilidades de los diferentes sucesos.

- Corresponde al suceso $A \cup B \cup C$. Por generalización inmediata de la probabilidad de la reunión de dos sucesos:

$$\begin{aligned} (*) \quad P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0,3 + 0,2 + 0,15 - 0,12 - 0,09 - 0,06 + 0,03 \\ &= 0,41. \end{aligned}$$

Respuesta: el 41 %.

- Corresponde al suceso $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Se verifica

$$A \cup B \cup C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup B \cup C,$$

de donde según (*)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(B) + P(C) - P(\emptyset) - P(\emptyset) - P(B \cap C) + P(\emptyset),$$

pues téngase en cuenta que:

$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap B = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap B \cap C = \emptyset$$

luego

$$\begin{aligned}P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= P(A \cup B \cup C) - P(B) - P(C) + P(B \cap C) \\&= 0,41 - 0,2 - 0,15 + 0,06 = 0,12.\end{aligned}$$

Respuesta: el 12 %.

c) Corresponde al suceso $\overline{A} \cap (B \cup C) = \overline{A} \cdot (B \cup C)$.

Se verifica $A \cup B \cup C = A \cup (\overline{A} \cdot (B \cup C))$, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(\overline{A} \cdot (B \cup C))$ pues A y $\overline{A} \cdot (B \cup C)$ son mutuamente excluyentes.

$$P(\overline{A} \cdot (B \cup C)) = 0,41 - 0,3 = 0,11.$$

Respuesta: el 11 %.

d) Corresponde al suceso $A \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$, contrario del anterior

$$P(A \cup (\overline{B} \cap \overline{C})) = 1 - 0,11$$

Respuesta: el 89 %.

Nota: En este problema, un suceso elemental no es un suceso (no tiene sentido determinar con los datos que tenemos el porcentaje o probabilidad correspondiente a un ciudadano determinado). Tampoco es un suceso cualquier subconjunto de Ω , tal como «el conjunto de ciudadanos que poseen automóvil», porque no puede expresarse en función de los sucesos anteriores.

- 1.5. Sea un dado tal que la probabilidad de las distintas caras es proporcional al número de puntos inscritos en ellas. Hallar la probabilidad de obtener con este dado un número par.

Solución

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ y el álgebra es } \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega).$$

Cada suceso elemental es un suceso cuya probabilidad es:

$$P(i) = \lambda \cdot i \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

donde λ es una constante de proporcionalidad.

Pero:

$$\sum_{i=1}^6 \lambda \cdot i = 1 \Rightarrow \lambda \cdot 21 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{21}.$$

Luego:

$$P(\{\text{que salga par}\}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

1.6. Dar una explicación en términos de espacio de probabilidad, de la fórmula clásica:

$$\text{probabilidad} = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos posibles}}.$$

Solución. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Cada ω_j representa un caso posible que es, además, un suceso. Si todos los ω_j son igualmente probables:

$$\sum_{j=1}^n P(\omega_j) = 1 \implies n \cdot P(\omega_j) = 1 \implies P(\omega_j) = \frac{1}{n}, \quad \forall j.$$

Si A es un suceso que consta de k sucesos elementales,

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\},$$

$$\text{entonces: } P(A) = \sum_{j=1}^k P(\omega_{i_j}) = \frac{k}{n}.$$

1.7. Un examen de reválida de Licenciatura consta de 14 temas. Se debe escoger un tema de dos elegidos al azar. Calcular la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas, le toque al menos uno que sabe. ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a 1/2 de superar el examen?

Solución. Hay $\binom{14}{2}$ maneras de elegir dos temas (casos posibles). Por otra parte, hay 5×9 maneras de elegir uno que sabe y uno que no sabe, y $\binom{5}{2}$ maneras de elegir dos temas que sabe (casos favorables). La probabilidad es:

$$\frac{5 \times 9}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{55}{91} = 0,6044.$$

Si prepara n temas, por un razonamiento análogo, el número de casos favorables es:

$$C(n) = n(14 - n) + \binom{n}{2} = n(14 - n) + n(n - 1)/2.$$

Como $\binom{14}{2} = 91$, n debe ser tal que $C(n) > \frac{91}{2}$. La solución es $n = 4$.

1.8. Se elige un número al azar del 1 al 6.000, todos igualmente probables. Hallar la probabilidad de que sea múltiplo de 2 o de 3, o de 4, o de 5.

Solución. Ω está formado por los números del 1 al 6.000. Al extraer un número, indicamos los sucesos: