

38

*nou*biaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Juny 2016





sumari

Consell de Redacció:
Manel Sol / Josep Lluís Solé (coords.)
Marianna Bosch
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Josep Pla
Romà Pujol
Manuel Udina

Juanjo Cárdenas
(responsable pàgina web)

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.jec.cat
noubiaix@gmail.com
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
Gerard Gómez

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
Fax: 934 035 531
comercial.edicions@ub.edu
www.publicacions.ub.edu

- 3 Editorial
- 5 Congrés Català d'Educació Matemàtica

articles

- 8 La desigualtat isoperimètrica
Julià Cufí
- 24 Matemàtiques a l'estany
Ramon Miquel Bergadà Marimon
- 43 Què és més rodó?
Miquel Albertí Palmer
- 67 Resolució de problemes d'optimització amb GeoGebra
Bernat Ancochea
- 85 Robòtica a l'escola.
Canviar el paradigma educatiu i el mètode d'aprenentatge
Josep Callís i Franco i Montserrat Sala i Pesarrodonà

seccions

- 96 Crònica: La jornada d'associacions de parla catalana
- 97 Per pensar d'un minut a una hora
Jordi Deulofeu
- 101 Construint matemàtiques
Anton Aubanell
- 109 El racó del MMACA
Josep Rey Nadal i Manuel Udina Abelló
- 115 El racó del *Cesire-Creamat*

La desigualtat isoperimètrica¹

Julià Cufí

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Resum

En aquest article repassem d'una manera breu la història del problema isoperimètric, posant de manifest alguns aspectes geomètrics que hi han tingut una importància cabdal. Així mateix, presentem una demostració analítica elemental de la desigualtat isoperimètrica que es pot explicar en un primer curs de Càlcul.

Abstract

In this article we review briefly the history of the isoperimetric problem, showing some geometric aspects which have been of key importance. Also we present an elementary analytical proof of the isoperimetric inequality that can be explained in a first course in Calculus.

Introducció

La desigualtat isoperimètrica, que serà discutida en aquest article, és una relació entre longituds i àrees. Pot ser útil, doncs, començar fent una discussió breu d'aquests conceptes en el context en el qual els farem servir.

Longitud

Una corba a $\mathbb{R}^2$ serà una aplicació contínua $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ on I és un interval tancat i acotat de la recta. Així, per a cada $t \in I$, $\gamma(t)$ té dues components i posarem $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ on $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ són funcions contínues.

Sigui $I = [a, b]$; llavors es diu que la corba γ és *tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Es diu que γ és *simple* o *de Jordan* si γ és injectiva a $[a, b]$ i, en el cas que γ sigui tancada, si γ és injectiva a $[a, b)$.

1. Aquest article es basa en la darrera lliçó que donà, el 3 de juny de 2015, en Julià Cufí abans de la seva jubilació, corresponent a l'assignatura *Funcions de variable real* de primer curs de matemàtiques. Afortunadament, en Julià continua, ara com a professor emèrit, impartint classes i tots gaudint amb les seves lliçons.

Un element geomètric molt important associat a una corba és el vector tangent en cada un dels seus punts. Per tal que aquest vector existeixi cal que la corba tingui una determinada regularitat: cal que sigui diferenciable.

Direm que γ és *diferenciable* en el punt $t_0 \in I$ si existeix el límit següent:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \equiv \gamma'(t_0).$$

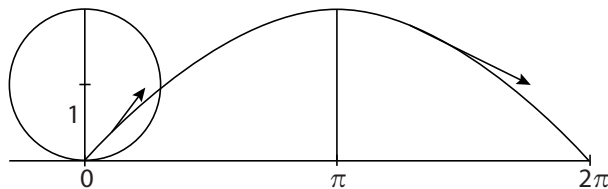
Aquest límit existeix si i només si les funcions $x(t), y(t)$ són totes dues derivables en el punt t_0 i, en aquest cas, hom té:

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Aquest vector $\gamma'(t_0)$ s'anomena el *vector tangent* a γ en el punt $\gamma(t_0)$. Si pensem que $\gamma(t)$ és la trajectòria d'un punt que es mou en funció del temps, llavors $\gamma'(t)$ és la *velocitat* del moviment. La norma del vector tangent, $\|\gamma'(t)\|$, en aquest cas, s'anomena la *celeritat* del moviment.

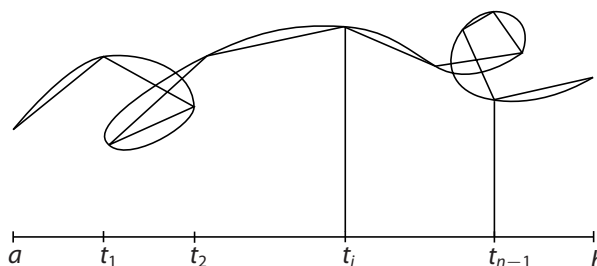
Una condició de regularitat més forta que l'existència de vector tangent a cada punt de la corba és que $\gamma(t)$ sigui diferenciable per a tot $t \in I$ i que l'aplicació $\gamma': I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que envia $t \in I$ a $\gamma'(t)$ sigui contínua. De vegades convé també suposar, a més a més, que $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in I$. Llavors es diu que γ és *regular*.

Per exemple, la funció $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, és una parametrització de la cicloide que és la corba descrita per un punt d'un cercle de radi 1, quan aquest cercle roda i fa una volta completa.



Aquí el vector tangent és $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$.

Segui $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, una corba qualsevol a $\mathbb{R}^2$. Per a cada partició de l'interval $[a, b]$, $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$, podem considerar la línia poligonal formada pels segments que uneixen el punt $\gamma(t_k)$ amb el punt $\gamma(t_{k+1})$ per a $k = 0, 1, \dots, n-1$.



La longitud d'aquesta poligonal és

$$\Lambda(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}.$$

Es diu que la corba γ és *rectificable* si

$$\sup_P \Lambda(P) < +\infty$$

on P recorre el conjunt de totes les particions de l'interval $[a, b]$. En aquest cas es posa, per definició,

$$\Lambda(\gamma) = \sup_P \Lambda(P)$$

i $\Lambda(\gamma)$ s'anomena la *longitud* de γ .

Si γ és prou regular, el resultat següent diu com es pot calcular la longitud de γ .

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ és una corba diferenciable amb $\gamma'(t)$ contínua a $[a, b]$, llavors γ és rectificable i

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, \quad (1)$$

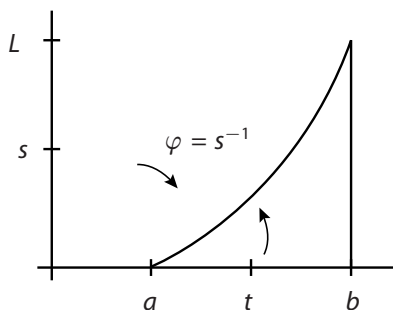
on $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$.

Quan γ és la cicloide trobem de seguida:

$$\Lambda(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8.$$

Per a les corbes regulars hi ha una parametrització canònica, fent servir el *paràmetre arc*, que és la següent:

Sigui $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular, és a dir, $\gamma'(t)$ existeix i és una funció contínua a $[a, b]$ i $\gamma'(t) \neq 0$, per a $t \in [a, b]$.



Per a cada $t \in [a, b]$ posem:

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau,$$

o sigui que $s(t)$ és la longitud de l'arc de corba γ des de $\gamma(a)$ fins a $\gamma(t)$.

Evidentment, es compleix

$$s(a) = 0, \quad s(b) = L \equiv \Lambda(\gamma).$$

Pel teorema fonamental del càlcul sabem que

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0, \quad t \in [a, b]$$

i, per tant, $s(t)$ és una funció estrictament creixent. Això vol dir que $s[a, b] = [0, L]$ i que s té una inversa

$$\varphi = s^{-1} : [0, L] \longrightarrow [a, b].$$

Així, podem definir la corba

$$\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \equiv (x(\varphi(s)), y(\varphi(s))), \quad s \in [0, L]$$

que té a $\mathbb{R}^2$ la mateixa imatge que γ , i que dóna la corba parametritzada pel paràmetre arc s .

I ara tenim, per la regla de la cadena,

$$\tilde{x}'(s) = x'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s); \quad \tilde{y}'(s) = y'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s).$$

Però $\varphi'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$ de manera que

$$\tilde{x}'(s) = \frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad \tilde{y}'(s) = \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

que donen

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \sqrt{\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2} = \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{\|\gamma'(t)\|} = 1.$$

És a dir, amb el paràmetre arc s , el vector tangent té longitud constant igual a 1 o, si es vol, la celeritat del moviment és constantment 1.

Per exemple si considerem la circumferència de centre l'origen i radi r recorreguda una vegada, la funció $s(t)$ és $s(t) = t \cdot r$ i el canvi $t = s/r$ ens dóna:

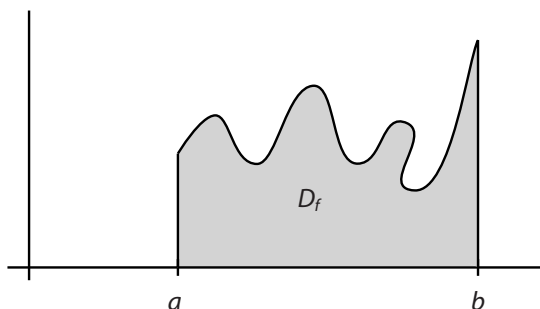
$$\tilde{x}(s) = r \cos \frac{s}{r}, \quad \tilde{y}(s) = r \sin \frac{s}{r}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi r$$

i, és clar, que $\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2 = 1$.

Àrea

La mateixa definició d'integral de Riemann ens dóna el concepte d'àrea d'un domini del pla del tipus subgraf. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció no negativa i considerem la regió:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$



llavors, suposant que f és integrable en el sentit de Riemann a $[a, b]$, es pren com a àrea de D_f :

$$\text{àrea}(D_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

És una definició molt natural tenint en compte que la definició de la integral és, de fet, una aproximació de l'àrea de D_f per la suma d'àrees de rectangles.

Ara es tracta de calcular l'àrea d'una regió del pla més general que la regió subgraf anterior, la qual està limitada per tres segments de recta i el perfil marcat per la funció $f(x)$.

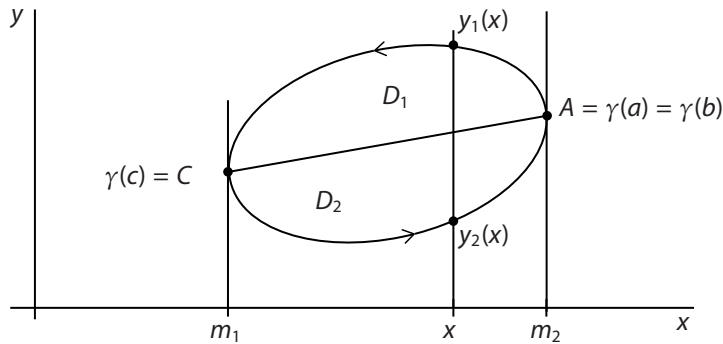
Considerem una corba plana $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, amb $\gamma(t)$ que tingui derivada contínua, que sigui tancada i de Jordan. Aquest tipus de corbes limiten una regió acotada del pla, anomenada l'interior de γ , que designarem per D . Suposarem, a més a més, que qualsevol recta vertical o bé horitzontal (és a dir, paral·lela als eixos de coordenades) talla γ en dos punts com a màxim. Per exemple, aquesta condició es compleix si la regió D és estrictament convexa.

Per tal de calcular l'àrea de la regió D suposem que $y(t) > 0$, per a $t \in [a, b]$ (si no fos així, només cal desplaçar γ verticalment, un moviment que no afecta l'àrea) i també que γ està recorreguda de manera que D queda a l'esquerra de γ .

Siguin

$$m_1 = \inf\{x(t), a \leq t \leq b\}, \quad m_2 = \sup\{x(t), a \leq t \leq b\}.$$

És fàcil veure que les verticals pels punts m_1 i m_2 tallen γ una vegada. Siguin els punts de tall C i A .



Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que $A = \gamma(a) = \gamma(b)$ (si no fem una translació del paràmetre) i sigui $c \in (a, b)$ tal que $\gamma(c) = C$. Ara per a cada punt x amb $m_1 < x < m_2$ hi ha dos punts de γ sobre la vertical per x , siguin $y_1(x), y_2(x)$, de manera que $y_1(x) > y_2(x)$.

L'àrea de la regió D és la diferència entre les àrees de les regions tipus subgraf

$$D_1 = \{(x, y) : m_1 \leq x \leq m_2 : y \leq y_1(x)\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : m_1 \leq x \leq m_2 : y \leq y_2(x)\}.$$

En conseqüència

$$A \equiv \text{àrea}(D) = \text{àrea}(D_1) - \text{àrea}(D_2) = \int_{m_1}^{m_2} y_1(x) dx - \int_{m_1}^{m_2} y_2(x) dx.$$

Ara fem, en cada una d'aquestes integrals, el canvi de variable $x = x(t)$; a la primera integral t variarà entre c i a i a la segona integral t anirà de c a b . Així, resulta

$$A = \int_c^a y_1(x(t)) \cdot x'(t) dt - \int_c^b y_2(x(t)) \cdot x'(t) dt = - \int_a^c y(t) \cdot x'(t) dt - \int_c^b y(t) \cdot x'(t) dt.$$

És a dir,

$$A = - \int_a^b y(t) \cdot x'(t) dt. \quad (2)$$

Si haguéssim fet el raonament anterior en la direcció horitzontal hauríem trobat

$$A = \int_a^b x(t) \cdot y'(t) dt. \quad (3)$$

Finalment, si a més, sumem (2) i (3), obtenim la proposició següent:

Si sigui $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, una corba contínuament diferenciable, tancada i de Jordan. Si sigui D la regió acotada limitada per γ i suposem que D és convexa. Llavors la regió D té una àrea A donada per

$$A = - \int_a^b x'(t)y(t) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt \quad (4)$$

o bé

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt. \quad (5)$$

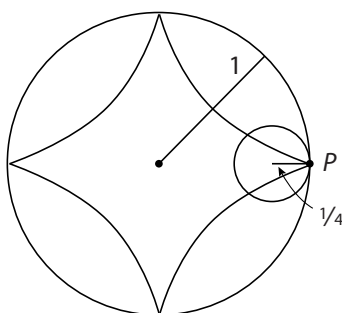
Observació. Les fórmules anteriors són vàlides sota hipòtesis menys restrictives que les que hem imposat a la regió D .

Per exemple, considerem una circumferència de radi 1 i en el seu interior una altra circumferència de radi $1/4$ que es desplaça fent una volta sencera en contacte amb la circumferència grossa. El punt de contacte inicial P descriu una corba tancada anomenada *astroide*. És senzill comprovar que la parametrització d'aquesta corba és

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

amb

$$x(t) = \cos^3(t), \quad y(t) = \sin^3(t).$$



Així, d'acord amb (5), s'obté com a àrea de l'astroide:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos^3 t \sin^2 t \cos t + 3 \sin^3 t \cos^2 t \sin t) dt = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$