

MATEMÀTIQUES PER A QUÍMICA

EXERCICIS RESOLTS

Olga Lavila Vidal
Santiago Zarzuela Armengou

Departament d'Àlgebra i Geometria

MATEMÀTIQUES PER A QUÍMICA

EXERCICIS RESOLTS

Olga Lavila Vidal
Santiago Zarzuela Armengou

Departament d'Àlgebra i Geometria

Índex

PRÒLEG	7
1. LLISTA DE PROBLEMES	9
1.1. Diagonalització	9
1.2. Equacions diferencials	13
1.3. Diferenciació	19
1.4. Integració	30
2. DIAGONALITZACIÓ	39
2.1. Espais vectorials. Matrius	39
2.2. Diagonalització	48
2.3. Matrius simètriques	65
3. EQUACIONS DIFERENCIALS	69
3.1. Equacions diferencials de primer ordre	69
3.2. Equacions diferencials lineals	95
3.3. Sistemes d'equacions diferencials lineals	111
3.4. Aplicacions	133
4. DIFERENCIACIÓ	139
4.1. Derivades direccionals. Gradient	139
4.2. Optimització. Extrems de funcions en diverses variables	156
4.3. Matriu jacobiana. Regla de la cadena	179
4.4. Teorema de la funció implícita	192
5. INTEGRACIÓ	217
5.1. Integrals de línia	217
5.2. Integrals dobles	236
5.3. Integrals triples	252
5.4. Integrals de superfície	261
BIBLIOGRAFIA	287

Pròleg

Presentem en aquest text docent una col·lecció d'exercicis resolts que formen part del programa actual de l'assignatura Matemàtiques I, del grau de Química de la Facultat de Química de la Universitat de Barcelona. La major part dels exercicis estan resolts detalladament, amb comentaris que fan referència al contingut explicat prèviament a les classes teòriques de l'assignatura. El programa actual de l'assignatura consisteix en tres hores de teoria i dues de pràctiques de problemes per setmana, al llarg d'un semestre. Així, els exercicis proposats es corresponen pràcticament amb els mateixos que els estudiants treballen a les seves classes pràctiques de problemes. També hi hem inclòs alguns exercicis que formaven part del programa de l'assignatura equivalent a l'antiga llicenciatura de Química de la Universitat de Barcelona, tot pensant que encara poden ser de certa utilitat per a altres assignatures del grau actual. Igualment, s'ha millorat la col·lecció d'exercicis de l'assignatura afegint aplicacions a la química i la física.

Les assignatures de matemàtiques de caràcter general que s'imparteixen normalment al primer curs dels estudis de ciències presenten la dificultat de tractar una àmplia varietat de temes en un temps molt limitat, temes que sovint requereixen un cert nivell avançat en matemàtiques per ser compresos en profunditat. L'objectiu és que l'estudiant adquireixi les eines bàsiques per reconèixer i resoldre alguns dels problemes matemàtics més comuns en altres matèries pròpies dels seus estudis. És per això que el gruix de la docència d'aquestes assignatures de caire general es concentra en la resolució d'exercicis. Així, el professor dóna a classe de teoria una sèrie d'explicacions conceptuals i metodològiques que l'estudiant haurà de posar en pràctica posteriorment mitjançant la resolució d'exercicis, tant a l'aula com, sobretot, en forma de treball personal. L'objectiu d'aquest text docent és, doncs, proporcionar a l'estudiant una eina de consulta i treball que li permeti completar de forma autònoma el que ha après a la classe presencial. En el nostre cas, a més, no existia un text de problemes que s'ajustés al programa actual de l'assignatura. Això obligava els nostres estudiants a emprar com a mínim dos o tres llibres de text amb nomenclatures diferents i formes diverses d'explicar els mateixos conceptes. A banda, malgrat que el contingut del text s'adapta a l'assignatura Matemàtiques I, del grau de Química, pensem que també pot ser de força utilitat per a qualsevol altre estudiant de ciències o enginyeries amb uns continguts similars en les assignatures introductòries de matemàtiques dels seus estudis.

El text consta de quatre capítols dedicats als temes generals següents: diagonalització de matrius, equacions diferencials, diferenciació en diverses variables i integració múltiple, amb un total de dos-cents onze exercicis. Cada capítol conté seccions on s'agrupen els exercicis per temes més concrets. Dues d'aquestes seccions contenen exercicis sobre el teorema de la funció implícita i sobre els teoremes de Stokes i de la divergència, respectivament, que, encara que no formen part del programa actual de l'assignatura Matemàtiques I, pensem que completen el contingut del text. Els exercicis amb aplicacions estan enunciats en el llenguatge propi de la matèria corresponent: sovint hi ha una certa dificultat en aquesta mena d'exercicis per interpretar el llenguatge i la simbologia pròpies de cada matèria en relació amb el comú emprat en matemàtiques.

Des de fa molts anys, el Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona ha estat l'encarregat d'impartir bona part de la docència de matemàtiques a la Facultat de Química. Molts dels membres del Departament han col·laborat al llarg del temps en aquesta docència i han participat tant en el desenvolupament dels programes en el context dels diferents plans d'estudis com en la preparació de les llistes d'exercicis. A tots ells, els volem transmetre el nostre agraïment.

Finalment, volem agrair al professor Manuel Ladra, de la Universitat de Santiago de Compostella, el seu ajut en tot allò relacionat amb l'ús del $\text{\LaTeX}$ i del programa `Mathematica` per a la preparació del text.

Olga Lavila i Santiago Zarzuela
Santa Coloma de Queralt i Barcelona

1. LLISTA DE PROBLEMES

1.1. Diagonalització

1.1.1. ESPAIS VECTORIALS. MÀTRIXS

1. Calculeu els determinants següents:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Resoleu les equacions següents:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & x & 0 \\ 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 4$$

$$b) \begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \\ x & x & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

3. Calculeu el rang de les matrius següents:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Resoleu els sistemes següents:

$$a) \begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x + y - 5z = -4 \\ 2x - 13y + 13z = 28 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + 2z - 3t = 0 \\ 2y - z - 2t = 0 \\ 2x - 3y - 4z + t = 0 \\ 4x + y - 3z + t = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + 3y + 8z = 11 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \end{cases}$$

5. Considereu les següents famílies de vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ corresponent:

$$A = \{(1, 3, 2), (1, 0, -1), (2, -3, 5)\}$$

$$B = \{(0, 2, -1), (4, 3, -2), (4, 1, -1)\}$$

$$C = \{(1, 2, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (1, 3, 2, 1)\}$$

$$D = \{(1, 2, -1, 1), (3, -1, 2, 1), (2, -3, -3, 0), (4, 1, -5, 2)\}$$

a) Determineu si són o no linealment independents.

b) Determineu si formen base.

6. Trobeu la matriu inversa de les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

7. Trobeu la matriu quadrada A que verifica l'equació:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.2. DIAGONALITZACIÓ

8. Considereu la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Proveu que els vectors $v_1 = (4, -4, 1)$ i $v_2 = (0, 4, -1)$ són vectors propis de A i trobeu els valors propis associats.
- b) Trobeu un altre vector propi de A , v_3 , el valor propi del qual sabeu que és -4 .
- c) Diagonalitzeu la matriu A .

9. Diguen quines de les matrius següents són diagonalitzables i, en cas que ho siguin, doneu una base de vectors propis:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Considereu la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Demostreu que A diagonalitza.
- b) Trobeu una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de A i una matriu diagonal D associada a A .
- c) Trobeu una matriu invertible C tal que $A = CDC^{-1}$.
- d) Calculeu A^n per a qualsevol nombre natural n .
- e) Proveu que $A^3 = 5A^2 - 3A - 9I$.

11. Estudieu la diagonalització de les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 e) & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 i) & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad j) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

12. Segui la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2-2a & 1+a & 0 \\ -5+a & 1-2a & 1-a \end{pmatrix}.$$

- Demostreu que M té un valor propi que no depèn de a . Calculeu els valors propis de M .
- Estudieu els valors de a per als quals hi ha valors propis múltiples i els casos en què M és diagonalitzable.

13. Considereu la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Proveu que si $a \neq 1, -1$, és diagonalitzable, i doneu una base en la qual diagonalitzi.
- Què passa si $a = 1$? I si $a = -1$?

14. Discussiu la diagonalització de les següents matrius per als diferents valors de a :

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 2-a & 1-a & 1-a \\ a-1 & a & a-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Considereu la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4+2a^2 & -5 & 6 \\ 5+a^2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ on } a \in \mathbb{R}.$$

- Per a quins valors del paràmetre a és la matriu A diagonalitzable?
- En el cas $a = 1$, doneu una matriu diagonal D associada a A i una matriu invertible C tals que $A = CDC^{-1}$. Comproveu-ne la igualtat.

16. Digueu per a quins valors del paràmetre a diagonalitza la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ a & -5 & a^2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

17. Digueu per a quins valors del paràmetre a diagonalitza la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ a & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ on } a \in \mathbb{R}.$$

18. Digueu per a quins valors del paràmetre a diagonalitza la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & a & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

19. Resoleu el problema d'orbitals moleculars de Hückel:

$$\begin{cases} (\alpha - E)c_1 + \beta c_2 = 0 \\ \beta c_1 + (\alpha - E)c_2 + \beta c_3 = 0 \\ \beta c_2 + (\alpha - E)c_3 = 0 \end{cases}$$

en funció dels paràmetres de Hückel α i β .

20. En la teoria d'orbitals moleculars de sistemes d'electrons π , els estats dels electrons π són descrits per una equació de valors propis

$$HC = DC,$$

on H representa el hamiltonià efectiu per a un electró π del sistema, els valors propis D de H són les energies orbitals dels electrons π i els vectors propis C representen els corresponents orbitals moleculars. En la teoria de Hückel del ciclobutadiè C_4H_4 , la matriu H és la matriu simètrica real

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

on α i β són escalars reals negatius amb dimensions d'energia. Trobeu C i D .

1.1.3. MATRIUS SIMÈTRIQUES

21. Determineu quines de les següents matrius simètriques són definides o semidefinides:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad c) C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad e) E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad f) F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad h) H = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad i) J = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

22. Discutiu segons els valors de a si la següent matriu simètrica és definida o semidefinida:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Equacions diferencials

1.2.1. EQUACIONS DIFERENCIALS DE PRIMER ORDRE

1. Per a cada equació diferencial, digueu si les funcions proposades són solució:

a) $y' - \frac{3}{x}y = 0$; $y_1 = x^4$, $y_2 = 2x^3$

b) $xy' + y = x \sin x$; $y_1 = x$, $y_2 = \frac{\sin x}{x} - \cos x$

c) $y' = 3y + 4e^{3x} \cos x$; $y_1 = 4e^{3x} \sin x$

d) $xy'' + 2y' = 0$; $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = x^2$

2. Digueu si les funcions proposades resolen els problemes de Cauchy següents:

a) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; $y_1 = \sin(2x)$, $y_2 = x$, $y_3 = \frac{1}{2} \sin(2x)$

b) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; $y_1 = e^{2x}$

3. Resoleu les següents equacions diferencials de variables separables i comproveu-ne les solucions:

a) $x^2 y' = y^2 \ln x$

b) $\tan x \cos y = -y' \tan y$

c) $(x+1)y' + y^2 = 0$

d) $yy' = e^{x+2y} \sin x$

e) $y' = (y-1)(y-2)$

f) $\sqrt{1-x^2} y y' = x$

4. Resoleu les següents equacions diferencials homogènies:

a) $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$

b) $y' = \frac{y(x^2 + xy + y^2)}{x(x^2 + 3xy + y^2)}$

c) $(4x - 3y) + (2y - 3x)y' = 0$

d) $(2y^2 - x^2)y' + 3xy = 0$

e) $2xy y' = x^2 - y^2$

f) $(x^2 + y^2)dx = 2xy dy$

5. Resoleu, fent un canvi de variable adequat, les següents equacions diferencials:

a) $x + (4y + x - 1)y' = y + 1$

b) $y' = \frac{y}{x} + x \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

c) $\tan^2(x+y) = y'$

6. Resoleu les següents equacions diferencials lineals de primer ordre:

a) $y' + 2y = x^2 + 2x$

b) $y' - 3y = e^{2x}$

c) $y'/x = 2y - x^2 + 1$

d) $y' + xy = x^3$, amb condició inicial $y = 0$ quan $x = 0$

e) $y' + y \tan x = \sin 2x$, amb condició inicial $y = 2$ quan $x = 0$

f) $xy' - 2y = x^5$, amb condició inicial $y = 1$ quan $x = 1$

g) $y' - y \tan x = \sec x$, amb condició inicial $y = 0$ quan $x = 0$

7. Resoleu les següents equacions diferencials:

a) $y' = -\frac{x}{y}$

b) $xy' + y - e^x = 0$

c) $y' + 2xy = 4x$

d) $x^2(y+1) + y^2(x-1)y' = 0$

e) $2xyy' + x^2y' = 3y^2 + 2xy - 2x^2$

f) $y'x - y = x^2 \sin x$. Trobeu la solució particular que verifica que $y(\pi) = \pi$.

8. Resoleu les equacions diferencials següents:

a) $xyy' = -x^2 + 5xy + 2y^2 - 5x^2y'$

b) $(x-y)y' = x+y$

c) $x^2y' + yxy' - x^2 - y^2 = 0$

d) $xy' = 2x - y$

e) $x^2y' + 2yxy' - y^2 = 0$

f) $3xy^2y' + 2y^3 + 5x^3 = 0$

g) $xy + x^2 = (y^2 - \frac{1}{2}x^2)y'$

1.2.2. EQUACIONS DIFERENCIALS LINEALS

9. Resoleu les següents equacions diferencials lineals homogènies:

a) $y'' - 7y' + 12y = 0$

b) $y'' - y' = 0$

c) $y'' + 4y = 4y'$

d) $y'' - 2y' + y = 0$

e) $y'' + y' - 6y = 0$

f) $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$, amb condicions inicials $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

g) $y''' - 8y'' + 11y' + 20y = 0$, amb condicions inicials $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 11$

h) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, amb condicions inicials $y(0) = 7$, $y'(0) = 6$, $y''(0) = 2$

i) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$, amb condicions inicials $y(0) = y''(0) = 0$, $y'(0) = 1$

j) $y''' + 2y'' + y' = 0$

k) $y^{iv} + 2y''' - 4y'' - 10y' - 5y = 0$

l) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$

m) $y^v - 2y^{iv} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$

n) $y'' + 2y' + 10y = 0$

o) $y'' + y' + y = 0$

10. Resoleu les següents equacions diferencials lineals no homogènies:

a) $y'' + 7y' + 10y - 5 = 0$

b) $y'' - y = 5x - 2$

c) $y'' - 3y' = 2 - 6x$

d) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$

e) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$

f) $y'' + 4y' = \sin 2x$

g) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$

h) $y''' - 2y'' - y' + 2y = x^2 + 1$

i) $y'' - 8y' + 7y = 14$, amb condicions inicials $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$

j) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$

k) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x$

11. Resoleu les equacions diferencials següents:

a) $y^{(3)} + 7y^{(2)} + 15y' + 9y = 9x$

b) $y^{(3)} + 3y^{(2)} - 4y = 3e^{-x}$

c) $y^{(3)} - y^{(2)} - 16y' - 20y = xe^x$

d) $y^{(3)} - 5y^{(2)} + 7y' - 3y = -3x^2 - 10$

e) $y^{(3)} + 4y^{(2)} + 5y' + 2y = 2x^2 + 10x + 12$

f) $y^{(4)} - 5y^{(3)} + 7y^{(2)} - 3y' = -9x^2 + 12x + 10$

g) $y^{(3)} - 6y^{(2)} + 9y' = 36x - 33$

h) $y^{(3)} - y^{(2)} - 5y' - 3y = e^{3x}$

i) $y^{(4)} - y^{(2)} = x + 2$

j) $y'' + y = x \cos x$

k) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin(2x)$

1.2.3. SISTEMES D'EQUACIONS DIFERENCIALS LINEALS

12. Resoleu els següents sistemes d'equacions diferencials lineals homogenis:

$$a) \begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 8y \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4x - y \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x' = 2y \\ y' = 8x \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x' = -4x + 2y \\ y' = -\frac{5}{2}x + 2y \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2y \\ z' = y - z \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = -2x + 3y + 2z \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x' = 2x - 7y \\ y' = 5x + 10y + 4z \\ z' = 5y + 2z \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = -x + 5y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = 3y - z \end{cases}$$

13. Resoleu els següents sistemes lineals no homogenis:

$$a) \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = 16x - 5y + 4z \\ z' = 16x - 6y + 5z + 1 \end{cases}$$

14. Resoleu el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = 2x - 6y + 3t \\ y' = -x + 3y + t + 5 \end{cases}$$

15. Resoleu els sistemes lineals següents:

$$a) \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 2y + z \\ z' = -3x + z \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x' = x \\ y' = x + 2y \\ z' = x + y - z \\ (x(0), y(0), z(0)) = (2, 0, 2) \end{cases}$$

c) Trobeu una solució particular del següent sistema lineal no homogeni:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 3e^{2t} \\ y' = 4x + 2y + te^{2t} \end{cases}$$

16. Trobeu la solució del següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + t + 1/2 \\ y' = 4x + 3y - t + 1 \end{cases}$$

17. Resoleu el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + t \\ y' = 9x - 8y + t + 56 \end{cases}$$

18. Resoleu el sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = 2x - 6y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

amb la condició inicial $x(0) = y(0) = 1$.

19. Trobeu la solució del següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 6t + 25 \\ y' = -2x - 6y - 2t \end{cases}$$

20. Resoleu el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + 3 + 2t^2 \\ y' = 2x - 4y + t^2 - 1 \end{cases}$$

21. Resoleu el sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = 2x - 4z \\ y' = 8y \\ z' = -3x + 6z \end{cases}$$

i trobeu la solució que verifica les condicions inicials $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ i $z(0) = 4$.

22. Resoleu el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + 2z \\ y' = -2x + 4y - 4z \\ z' = -2x + 2y - 2z \end{cases}$$

23. Resoleu el següent sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2t + 3e^{7t} \\ y' = 3x + 6y + t + 2e^{7t} \end{cases}$$

1.2.4. APLICACIONS

24. Considereu una massa m que cau lliurement per l'acció de la gravetat. Trobeu l'equació de la seva trajectòria sabent que la velocitat inicial és 0.

25. Supposeu que teniu un cultiu de x bacteris. Si en aquest cultiu els bacteris es multipliquen sense problemes, la velocitat de creixement és proporcional a la població. És a dir:

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Trobeu l'equació que ens dona la població en funció del temps.