



Selecta Pilar Bayer
VOLUM II

Montserrat Alsina, Anna Rio,
Artur Travesa (eds.)



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

COL·LECCIÓ
HOMENATGES



53

Selecta Pilar Bayer
VOLUM II

Selecta Pilar Bayer

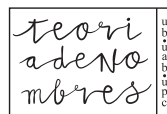
VOLUM II

Edició a cura de
Montserrat Alsina, Anna Rio,
Artur Travesa



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Edicions



Universitat de Barcelona. Dades catalogàfiques

Selecta Pilar Bayer. – (Homenatges (Universitat de Barcelona) ; 52-53)

ISBN: 978-84-475-3961-1 (o.c.)

ISBN: 978-84-475-3957-4 (v. 1)

ISBN: 978-84-475-3956-7 (v. 2)

- Bayer i Isant, Pilar, 1946- II. Alsina i Aubach, Montserrat, 1966- II. Rio, Anna III. Travesa i Grau, Artur IV. Col·lecció: Homenatges (Universitat de Barcelona) ; 52-53
 - Bayer i Isant, Pilar, 1946- 2. Matemàtica 3. Homenatges
-

© Edicions de la Universitat de Barcelona

Adolf Florensa, s/n

08028 Barcelona

Tel.: 934 035 430

Fax: 934 035 531

www.publicacions.ub.edu

comercial.edicions@ub.edu

© Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC)

FOTOGRAFIA DE LA COBERTA Marcellí Bayer

ISBN (v. 2) 978-84-475-3957-4

ISBN (o. c.) 978-84-475-3961-1

DIPÒSIT LEGAL B-29.571-2015

IMPRESSIÓ I REL·LIGAT Gráficas Rey

L'edició d'aquest volum d'homenatge a Pilar Bayer ha rebut el suport de la Universitat de Barcelona i dels projectes MTM2012-33830 i MTM2012-34611.



L'obra incomparable de Pilar Bayer està escrita en les persones, en totes les persones a les quals, en un moment o altre, ens ha fet gaudir del plaer d'escoltar matemàtiques, d'aprendre matemàtiques, de fer matemàtiques. Aquesta obra diversa, eclèctica, rica en mil matisos, roman en el terreny de les experiències personals que fan la nostra vida més interessant, i no la podem plasmar en un volum, ni en dos. És un llegat fantàstic que portem incorporat.

Amb els treballs recopilats en aquests volums volem mostrar en un format palpable l'amplitud de la seva òptica matemàtica, la profunditat i la bellesa de les seves matemàtiques. No és un recull exhaustiu, sinó una invitació que cadascú faci un tastet d'allò que li agradi més. Després, n'estem segurs, ja no podreu parar. La persona i l'obra us captivaran per seguir endavant.

Dediquem aquest volum a Pilar Bayer Isant, en ocasió del seu setantè aniversari.

Sumari

<i>Introducció</i> , per Montserrat Alsina, Anna Rio i Artur Travesa	11
1. PILAR BAYER, Formas cuadráticas sobre cuerpos totalmente p -ádicos. <i>Publicacions Matemàtiques</i> , 3 (1976), p. 1-15	15
2. PILAR BAYER, JÜRGEN NEUKIRCH, On values of zeta functions and l -adic Euler characteristics. <i>Inventiones Mathematicae</i> , 50 (1978), p. 35-64	31
3. PILAR BAYER, En record de Jürgen Neukirch. <i>SCM/Notícies</i> , 6 (1997), p. 10.	61
4. PILAR BAYER, Sobre una llibreta d'apunts (Ramanujan). <i>Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques</i> , 1 (1987), p. 7-13	63
5. PILAR BAYER, ÀNGELA ARENAS, Arithmetic behaviour of the sums of three squares. <i>Journal of Number Theory</i> , 27 (1987), p. 273-284	71
6. PILAR BAYER, ENRIC NART, Zeta functions and genus of quadratic forms. <i>L'Enseignement Mathématique</i> , 35 (1989), p. 263-287	83
7. PILAR BAYER, Monstres, cordes, fantasmes i clars de lluna. <i>Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques</i> , 14 (1999), p. 9-30.	109
8. ÀNGELA ARENAS, PILAR BAYER, Heegner points on modular curves. <i>Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales</i> , 94 núm. 3 (2000), p. 323-332.	131
9. ÀNGELA ARENAS, PILAR BAYER, Complex multiplication points on modular curves. <i>Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales</i> , 94 núm. 3 (2000), p. 333-338	141
10. PILAR BAYER, ARTUR TRAVESA, Órdenes matriciales generados por grupos de congruencia. <i>Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales</i> , 94 núm. 3 (2000), p. 339-346	147

11. PILAR BAYER, ARTUR TRAVESA, Formas cuadráticas ternarias e inmersiones matriciales de órdenes cuadráticos. <i>Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales</i> , 94 núm. 3 (2000), p. 347-355	155
12. PILAR BAYER, ARTUR TRAVESA, Inmersiones de órdenes cuadráticos en el orden generado por $\Gamma_0(N)$. <i>Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales</i> , 94 núm. 3 (2000), p. 357-376.	165
13. PILAR BAYER, JORDI GUÀRDIA, A la recerca de pi. <i>Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques</i> , 17 (2002), p. 7-19	185
14. PILAR BAYER, JORDI GUÀRDIA, On equations defining fake elliptic curves. <i>Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux</i> , 17 núm. 1 (2005), p. 57-67.	199
15. PILAR BAYER, JORDI GUÀRDIA, Hyperbolic uniformization of Fermat curves. <i>Ramanujan Journal</i> , 12 núm. 2 (2006), p. 207-223	211
16. PILAR BAYER, Les contribucions de Poincaré a l'aritmètica. <i>Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques</i> , 21 (2006), p. 5-38.	229
17. PILAR BAYER, ARTUR TRAVESA, Uniformization of triangle modular curves. <i>Publicacions Matemàtiques</i> , volum extra (2007), p. 43-106.	263
18. PILAR BAYER, ARTUR TRAVESA, Uniformizing functions for certain Shimura curves, in the case $D=6$. <i>Acta Arithmetica</i> , 126 (2007), p. 315-339	327
19. PILAR BAYER, ARTUR TRAVESA, On local constants associated to arithmetical automorphic functions. <i>Pure and Applied Mathematics Quarterly</i> , 4 núm. 4 (Special issue: in honor of Jean-Pierre Serre) (2008), p. 1107-1132	353
<i>Agraiments / Acknowledgements</i>	379
<i>Crèdits legals</i>	379

Introducció

L'objectiu d'aquesta obra, tal com es diu en la introducció del volum 1, és recollir una selecció dels escrits matemàtics publicats de la Dra. Pilar Bayer. En aquest volum ens hem centrat especialment en una part de la seva obra que es relaciona de manera més o menys directa amb formes quadràtiques, modularitat i corbes de Shimura, tot i que no presentem tota la seva producció en aquestes línies. La presentació dels treballs és, essencialment, cronològica.

Encetem aquest volum amb un treball sobre formes quadràtiques; és un dels seus primers articles, si deixem de banda un parell de publicacions anteriors que recollien comunicacions presentades en les Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, i fou publicat el mateix any que l'article amb què s'inicia el volum 1. En aquest article, Pilar Bayer hi estableix una aplicació dels resultats de la seva tesi doctoral amb l'enunciat i una demostració d'un teorema de classificació per a les formes quadràtiques sobre els cossos de nombres totalment P -àdics, on P denota un conjunt finit de nombres primers; aquests cossos són una generalització natural dels cossos de nombres totalment reals. El seu interès per les formes quadràtiques es veurà reflectit al llarg de tot aquest volum.

En el segon capítol reproduïm un article que ha tingut un gran ressò mundial: «On values of zeta functions and l -adic Euler characteristics», publicat en *Inventiones Mathematicæ* i escrit en col·laboració amb Jürgen Neukirch. Aquest treball conté una profunda teoria que va clarificar una conjectura anterior de Stephen Lichtenbaum sobre valors especials de la funció zeta d'un cos de nombres en proporcionar-li un significat geomètric per analogia amb funcions de varietats sobre cossos finits. Els resultats que hi ha foren utilitzats per Barry C. Mazur i Andrew J. Wiles en la prova de la conjectura principal de la teoria d'Iwasawa per a extensions abelianes del cos dels nombres racionals [cf. Mazur, B.; Wiles, A.: «Classfields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$ ». *Inventiones Mathematicæ*, 76 (1984)]. I encara es fan servir en l'actualitat; per

exemple, ho ha fet la matemàtica Rin Sugiyama en la prova d'una conjectura de John T. Tate per a productes de varietats de Fermat sobre cossos finits [cf. *Tate conjecture for products of Fermat curves over finite fields. Manuscripta Mathematica*, **144** (2014)]. I al llarg dels anys, han estat utilitzats per diverses persones de la comunitat matemàtica: per a citar-ne només quatre exemples, per Peter Schneider, el 1982 [*On the values of the zeta function of a variety over a finite field*]; per James S. Milne, el 1988 [*Motivic cohomology and values of zeta functions*]; per Jean-Yves Étesse, el 1988 [*Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline*]; o per Jean-Marc Fontaine, el 1991-1992 [*Valeurs spéciales des fonctions L des motifs*]. A continuació, en el capítol tercer, incloem el record al professor Neukirch que va publicar Pilar Bayer com a petit homenatge en ocasió de la mort del seu coautor, encara que cronològicament aquest article sigui molt posterior.

El quart treball seleccionat correspon a la inauguració del curs 1985-1986 a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. Pilar Bayer ens hi presenta la conjectura de Ramanujan sobre l'ordre de creixement de la successió formada pels coeficients del desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció discriminant, que ja el mateix Srinivasa Ramanujan relacionà amb el nombre de representacions d'un nombre enter com a suma de 24 quadrats. Hi descriu els successius apropaments a la prova i comenta la solució que en donà Pierre Deligne a partir de la demostració que féu de les conjectures d'André Weil, basades en idees i tècniques desenvolupades per Alexander Grothendieck. És una petita joia que exemplifica la manera excel·lent amb què la seva autora sap fer i sap comunicar a tots nivells.

A continuació incloem un article escrit en col·laboració amb Àngela Arenas. Les autores presenten els resultats principals de la tesi d'Arenas sobre els valors exactes d'un paràmetre per al qual certes extensions centrals del grup alternat poden realitzar-se com a grups de Galois sobre el cos dels nombres racionals, un problema que havia estat tractat en la tesi de Núria Vila. Hi destaca la minuciositat dels càlculs que permeten arribar a aquests resultats i el paper explícit que hi tenen algunes formes quadràtiques.

El capítol sisè conté un article escrit en col·laboració amb Enric Nart, i en el qual es torna a posar de manifest la idea que els mètodes algebraics no es poden deslligar de l'estudi de les funcions. En efecte, després de presentar la teoria necessària de forma gairebé autocontinguda, estableixen que, per a certes formes quadràtiques molt generals, la igualtat de les funcions zeta associades implica la pertinença al mateix gènere; així, una relació entre objectes ana-

lítics n'implica una entre objectes algebraics. D'aquesta manera tanquen una conjectura de Yoshiyuki Kitaoka que estenia un resultat anàleg de Carl L. Siegel per a formes quadràtiques definides.

El capítol setè conté un dels articles que més criden l'atenció de l'extensa producció de Pilar Bayer, i no només en veure'n el títol; es tracta de «Monstres, cordes, fantasmes i clars de lluna». S'hi posen de manifest relacions sorprenents i molt importants entre objectes que pertanyen a camps *a priori* molt diferents de coneixement: la teoria de nombres i la física de partícules. El seu contingut fou exposat per primera vegada a la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona, i es demanà a la seva autora que n'expliqués el contingut en la Primera Trobada de la Societat Catalana de Matemàtiques. També ha estat traduït per ella mateixa, a petició del CSIC, i reproduït en la seva revista *Fronteras de la Ciencia y la Tecnología*.

En els cinc capítols que vénen a continuació reproduïm un seguit d'articles publicats en col·laboració amb altres persones del Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC) en un volum monogràfic de la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, en què Pilar Bayer va ser l'editora invitada. El tema és «Contribuciones al estudio algorítmico de problemas de moduli aritméticos». A més a més dels articles dels quals és coautora, que són els cinc que reproduïm, aquest volum de la revista en conté sis d'altres persones que formen part del grup de Teoria de Nombres. La presentació que ella mateixa fa dels articles en el volum corresponent de la revista inclou l'explicació següent:

Los trabajos que a continuación se presentan tienen por objetivo facilitar el estudio de esos temas. De manera general, el punto de vista adoptado ha sido la recuperación de herramientas clásicas y la preparación de su uso para la elaboración de algoritmos que permitan un tratamiento numérico y la resolución efectiva de problemas diofánticos.

En aquest volum s'estableixen les bases per a l'estudi de les corbes de Shimura i s'hi recullen aportacions d'algunes persones del Seminari de Teoria de Nombres en aquesta línia. L'estudi es mantindrà posteriorment i donarà lloc a resultats importants. Entre aquests podem destacar que els resultats principals de la tesi de Montserrat Alsina van ser objecte de la monografia *Quaternion orders, quadratic forms and Shimura curves*, d'Alsina i Bayer, publicada per l'American Mathematical Society l'any 2004.

A continuació, reproduïm un seguit de tres articles escrits en col·laboració amb Jordi Guàrdia sobre corbes el·líptiques falses i sobre uniformització explícita de corbes algebraïques. En el capítol tretzè es presenta una uniformització de la circumferència feta a partir només de la seva representació gràfica i que oblida «per uns instants les funcions sinus, cosinus, i el nombre π , per recuperar-los tot seguit a partir de propietats de simetria de S_1 ». El segon article presenta un estudi de les anomenades *corbes el·líptiques falses*, que apareixen de manera natural en la interpretació de les corbes de Shimura com a espais grollers de moduli de certes superfícies abelianes. En l'article es presenta un mètode per al càlcul d'equacions per a algunes d'aquestes corbes el·líptiques falses. El tercer, relacionat amb un dels articles publicats en el recull de l'Acadèmia del qual hem parlat, presenta una uniformització hiperbòlica explícita de les corbes de Fermat.

En el capítol setzè incloem un article que recull la conferència que pronuncïà amb motiu de la commemoració del 150è aniversari del naixement d'Henri Poincaré. Pilar Bayer ens hi presenta, d'una manera molt profunda, les contribucions d'aquest autor a, essencialment, l'estudi de les funcions i les formes automorfes; aquest tema relaciona els articles anteriors amb els que acaben aquest volum.

En els tres articles finals d'aquest volum, que ha publicat conjuntament amb Artur Travesa, s'hi presenta la uniformització hiperbòlica explícita d'algunes corbes de Shimura. En el primer, la de totes les corbes triangulars modulars, feta de manera que en permeti el càlcul a l'entorn de qualsevol punt de multiplicació complexa, i no només de les puntes. El mètode que s'hi desenvolupa en possibilita la generalització, que es presenta en el segon article, a algunes corbes de Shimura no modulars. Finalment, en el tercer d'aquests articles i darrer del volum s'hi recull l'estudi, similar en la forma al del nombre π esmentat en un capítol anterior, dels paràmetres locals d'uniformització d'aquestes corbes, dels quals s'estableix la classe de transcendència.

Desitgem que gaudiu de la lectura dels treballs de Pilar Bayer.

ELS EDITORS