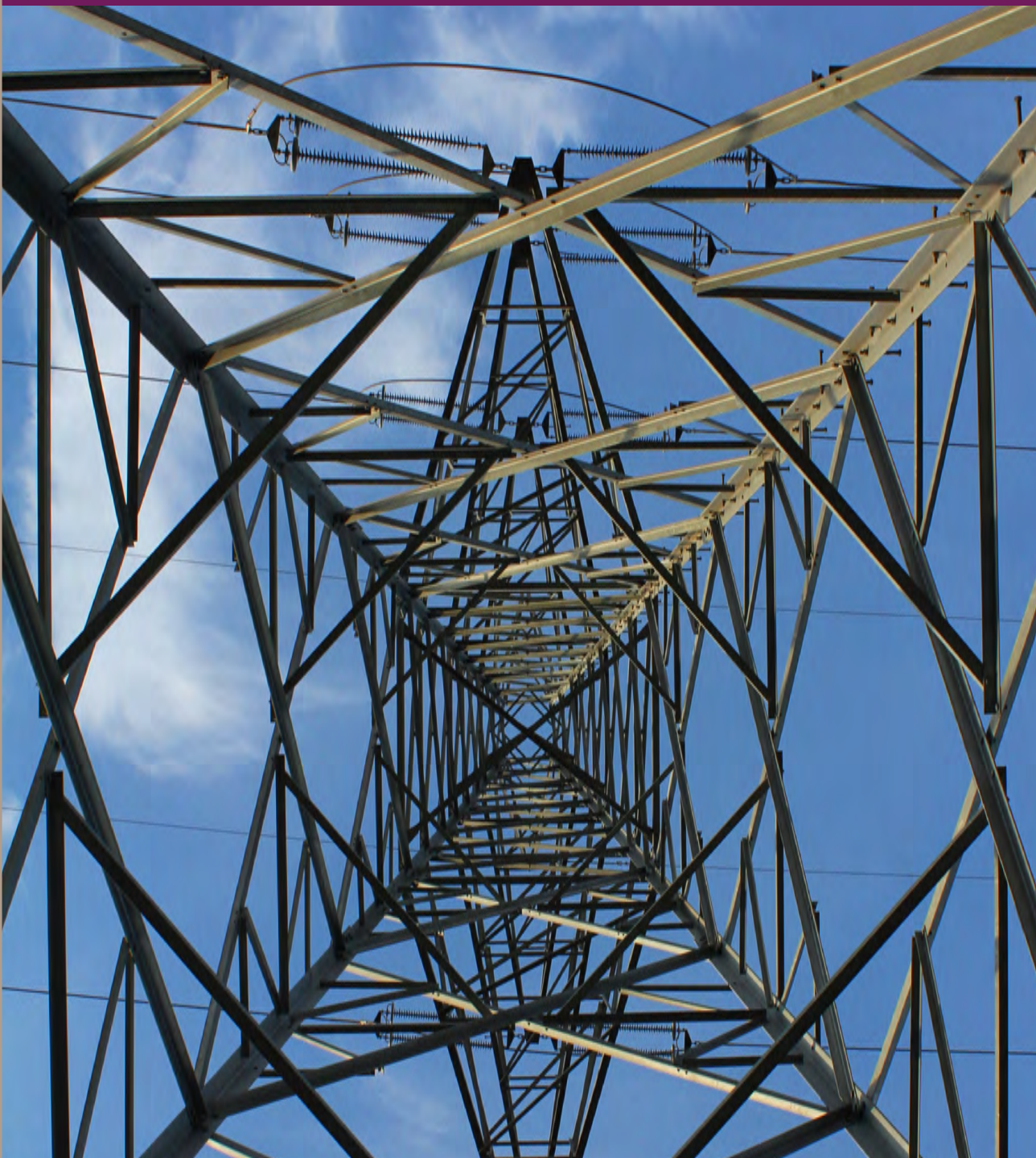
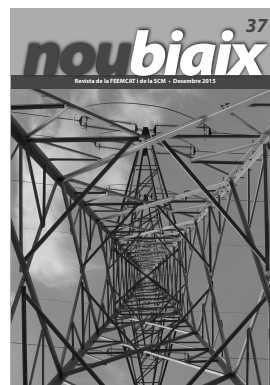


nou**biaix**

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Desembre 2015





sumari

Consell de Redacció:
Manel Sol / Josep Lluís Solé (coords.)
Marianna Bosch
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Josep Pla
Romà Pujol
Manuel Udina

Juanjo Cárdenas
(responsable pàgina web)

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat
noubiaix@gmail.com
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
Perfecta geometria ennuvolada
Erola Pons Wendenburg
IES Santa Coloma de Farners
16 anys. 1r de Batxillerat

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Publicacions i Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
Fax: 934 035 531
comercial.edicions@ub.edu
www.publicacions.ub.edu

- 3 Editorial
- 5 Congrés Català d'Educació Matemàtica

articles

- 8 El problema de Dido, abelles, billars i principis de màxims i mínims
José G. Llorente
- 29 La descoberta matemàtica en l'entorn. La reflexió i el raonament dins el treball d'investigació, base de l'aprenentatge matemàtic
Carme Alemany Miralpeix
- 41 Bones activitats per a la transició entre primària i secundària
David Barba Uriach i Cecília Calvo Pesce
- 51 La resolució de problemes complexos per parelles d'alumnes amb TDHA i sense TDHA a la secundària
Yolanda Colom i Núria Rosich
- 65 Estrelles a la Sagrada Família de Gaudí: un context nou per a estudiar poliedres
María de los Desamparados López de Briñas Ferragut

seccions

- 87 Per pensar d'un minut a una hora
Jordi Deulofeu
- 90 Construint matemàtiques
Anton Aubanell
- 97 El racó del MMACA
Enric Brasó
- 104 El racó del *Cesire-Creamat*

La FEEMCAT organitza per als propers 11, 12 i 13 de juliol de 2016 el 2n Congrés d'Educació Matemàtica de Catalunya. És una continuació del que es va celebrar el 2000 a Mataró amb motiu de l'Any Internacional de la Matemàtica. Vol ser un espai per a compartir i descobrir recursos per a la millora de la nostra feina a l'aula de matemàtiques a tots els nivells educatius. A les primeres pàgines de la revista trobareu una presentació d'aquest esdeveniment. Des del *Nou Biaix* volem animar tots els mestres i els professors a participar-hi.

En aquest número us presentem un article de José G. Llorente en el qual l'autor ens proposa un atractiu recorregut per preguntes clàssiques relacionades amb qüestions de màxims i mínims, com el problema d'Heró d'Alexandria, la llegenda de la princesa Dido i la fundació de Cartago, que ens porta als problemes isoperimètrics, al segon treball d'Hèrcules i, finalment, a la justificació de la sagacitat de les abelles. Aquest article és una versió impresa del que trobareu a la revista electrònica *Materials Matemàtics*. Els editors del *Nou Biaix* us recomanem, sense cap vacil·lació, visitar amb freqüència la seva web, que reuneix un seguit d'articles matemàtics, en general magnífics i molt interessants, de caire divulgatiu i de diversos nivells.

A l'article següent, Carme Alemany ens fa algunes propostes per experimentar i investigar amb materials manipulables, amb l'objectiu que els alumnes de primària redescobreixin i construeixin les matemàtiques.

David Barba i Cecilia Calvo expliquen una proposta original per a millorar els processos matemàtics en la transició de primària a secundària. Ens presenten tres activitats centrades en la resolució de problemes, en la cerca de patrons i en promoure el treball sistemàtic, més que en uns continguts específics. Estan dirigides a alumnes de final de primària, així com als dels primers cursos d'ESO. Els autors posen en relleu el paper actiu i flexible del mestre i el professor per al bon desenvolupament de les tasques.

L'atenció dels alumnes amb dèficit d'atenció i hiperactivitat (TDHA) a secundària no és fàcil. Yolanda Colom i Núria Rosich ens presenten part dels resultats que han obtingut en una recerca sobre la resolució de problemes complexos proposats a aquest tipus d'alumnat. En el seu treball podreu trobar-hi suggeriments i idees per a la vostra activitat.

La professora Ampar López ens presenta part de treball de recerca que ha portat a terme, durant més de dos anys de treball intens, al voltant de la Sagrada Família de Barcelona. L'interès del seu treball és doble: d'una banda, ens descobreix alguns dels aspectes més desconeguts de l'obra de Gaudí, com l'existència dels poliedres estrellats. D'una altra banda, fa una interpretació ben raonada de per què creu que ho va fer a la Sagrada Família. Així ens acosta a comprendre millor les idees que l'arquitecte ens volia transmetre a través de la seva

obra i posa en evidència, una vegada més, l'abast del geni de Gaudí. Finalment, ens suggereix algunes activitats per a l'aula de matemàtiques.

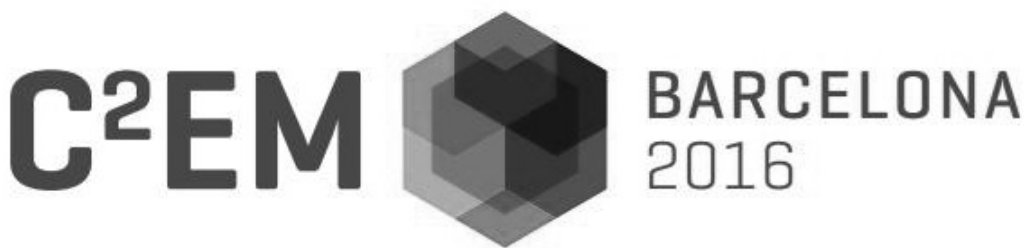
Jordi Deulofeu ens proposa, en la seva secció, uns quants problemes interessants amb algunes sorpreses. Passeu-vos-ho bé amb ells.

Els resultats de les proves de competències bàsiques a quart d'ESO, publicats l'abril de 2015, posen de manifest un assoliment molt baix en el bloc Espai, Forma i Mesura. Tal com es desprèn de les dades, no es tracta d'un fet puntual, sinó d'una tendència dels darrers anys. El Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu ha publicat el document «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria». L'Anton Aubanell ha estat un col·laborador rellevant en l'elaboració del document i ens l'explica en la seva secció fixa «Construint Matemàtiques». Hi podreu trobar reflexions i propostes interessants per portar a les aules.

El Cesire-Creamat ens narra una petita història al voltant d'un problema que es va començar en un seminari amb l'A. Arcavi l'any 2008, però que va continuar molt més enllà. A més de l'interès que té intrínsecament el problema i totes les seves variacions, l'article ens transmet la passió que genera la resolució d'un problema en els matemàtics.

Per a acabar, en l'habitual «Racó del Museu», Enric Brasó ens mostra quatre mòduls del Museu que poden ajudar a treballar i entendre conceptes no intuïtius, i a voltes paradoxals, relacionats amb la teoria de la probabilitat i l'estadística.

Esperem que gaudiu d'aquest número del *Nou Biaix* i, com sempre, els editors us animem que ens envieu articles exposant les vostres experiències, recerques i activitats, perquè puguin ser conegudes i compartides per la comunitat, a pesar de totes les dificultats, ben entusiasta, dels ensenyants de matemàtiques.



Congrés Català d'Educació Matemàtica

L'educació matemàtica juga un paper clau en qualsevol societat moderna. Des de fa molts anys, mestres i professors del nostre país treballen per millorar la qualitat del seu ensenyament. D'aquest treball en són testimoni l'esforç que es fa cada dia dins de les aules per promoure un aprenentatge més significatiu i funcional, el potent associacionisme que hi ha entre els ensenyants, l'abundant quantitat de concursos, tallers, fires... adreçats a l'alumnat i l'elevat nombre de jornades i trobades de mestres i professors per compartir i difondre experiències.

Recollint aquest esforç, sembla un bon moment per impulsar un espai de trobada de la comunitat d'ensenyants de matemàtiques. Per aquesta raó, la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) es proposa l'organització del Congrés Català d'Educació Matemàtica (c²em).

Antecedents

Els mestres i els professors de matemàtiques de Catalunya, dins el marc de les seves respectives associacions, han anat organitzant trobades d'educació matemàtica:

- Jornades anuals de les diverses associacions: APMCM, ADEMGI, APaMMs, ABEAM i Lleimat.
- Jornada conjunta de la FEEMCAT, la Societat Catalana de Matemàtiques, la Societat Balear de Matemàtiques Xeix i la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi.
- Jornades específiques organitzades per les universitats catalanes.
- Jornada de l'Associació Catalana de GeoGebra i activitats del MMACA adreçades al professorat.
- Accions impulsades des del CESIRE CREAMAT (Departament d'Ensenyament).
- Trobades de grups de treball.

A banda d'aquestes activitats de caire anual, s'han celebrat durant els darrers anys tres grans congressos:

- Congrés d'Educació Matemàtica, cem (Mataró 2000).
- Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, JAEM (Girona 2009).
- Jornades de Didàctica de les Matemàtiques a les comarques meridionals (Tarragona 2012).

Potser fruit de totes aquestes accions ens trobem en un moment de canvi en l'ensenyament de la nostra matèria en el qual caldria reflexionar sobre el què, el com i el perquè ensenyem matemàtiques. Per aquesta raó s'ha pensat a organitzar el Congrés Català d'Educació Matemàtica.

El Congrés Català d'Educació Matemàtica

Des de la FEEMCAT, amb el suport d'altres entitats i institucions, s'està organitzant el Congrés Català d'Educació Matemàtica (c²em) que, abastant tots els nivells educatius, se celebrarà el juliol de 2016 amb la voluntat que es pugui anar repetint cada quatre anys.

Els objectius d'aquest congrés, pendents encara d'acabar de perfilar, són:

- Identificar i impulsar línies de millora en l'educació matemàtica.
- Promoure la posada en comú d'experiències docents innovadores.
- Contribuir a l'enriquiment de la pràctica professional dels ensenyants de matemàtiques.
- Arribar a idees de consens que puguin contribuir a millorar la nostra educació matemàtica.
- Acostar les matemàtiques a l'entorn familiar i a la societat.
- Promoure l'atenció als valors en l'educació matemàtica.

En la línia d'aquests objectius, d'una manera provisional, hem adoptat com a lema del congrés:

Unes matemàtiques obertes i per a tothom
Compartim per construir

Fins aquest moment, s'han desenvolupat treballs d'organització general indispensables per tenir un punt de partida sòlid que ens permeti començar a caminar. Així, s'ha establert que el congrés se celebri els dies 11, 12 i 13 de juliol de 2016 a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. Les conferències plenàries previstes tindran lloc al seu paranimf.

S'ha iniciat la formació dels grups que impulsaran els diferents àmbits organitzatius (comitè científic, tresoreria, relacions institucionals, mitjans de comunicació, cerca de patrocinis, activitats satèl·lit, voluntariat...). Tenim per davant un camí en el qual ens agradaria comptar amb la col·laboració de totes les institucions i entitats que es mouen en el camp de l'educació matemàtica a casa nostra. La tasca és tan àmplia com engrescadora:

- Identificar grans blocs temàtics entorn als quals centrar la reflexió.
- Cercar maneres àgils i eficients de comunicar, debatre, contrastar i compartir opinions.
- Fer possible que, tant en la inauguració com en la cloenda del congrés, es pugui comptar amb aportacions potents i innovadores de persones de prestigi internacional en el camp de l'ensenyament de les matemàtiques.
- Dissenyar un programa d'actes que resulti atractiu per a mestres i professors i eficaç per a fer possible l'intercanvi d'idees.
- Cercar el major ressò de l'esdeveniment en els mitjans i, mitjançant activitats paral·leles, contribuir a donar presència social a les matemàtiques.

Per fer això, i molt més, caldran mitjans i voluntats, complicitats i entusiasme, temps i feina... Aquests materials que fan possible construir projectes i obrir camins de millora.

És una iniciativa oberta a totes les idees i les maneres de fer i de ser de mestres i professors que vol projectar-se cap al futur en impulsos d'innovació i recerca educativa.

articles
articles



articles

El problema de Dido, abelles, billars i principis de màxims i mínims¹

José G. Llorente

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Resum

A la vida quotidiana es planteja constantment el repte de treure el màxim profit possible a partir d'uns recursos donats. Nombrosos exemples mostren que la Natura també segueix una mena de *principi d'economia* que l'empeny a maximitzar el rendiment amb els recursos disponibles. Matemàticament, el marc adient per abordar aquestes qüestions són els anomenats *problemes d'optimització* o *problemes de màxims i mínims*. En aquest article farem un breu recorregut per alguns problemes famosos de màxims i mínims que tenen en comú un marcat sabor geomètric.

Abstract

Everyday life often presents us with the challenge of getting the most out of limited resources. There are many examples showing that Nature also follows some sort of economy principle, whereby it maximizes the utility of the materials at hand. Mathematically speaking, the right context for such questions are the so-called optimization problems or problems of maxima and minima. This article provides a brief overview of some famous problems of maxima and minima that share a remarkable geometrical flavour.

1. Introducció

Natura, tu ets la meva deessa, i a la teva llei ceneixo els meus serveis.

(W. SHAKESPEARE, *El rei Lear*, acte I, escena II).

Per què determinades formes geomètriques apareixen reiteradament al món natural? En virtut de quins principis la natura tria certes configuracions i no d'altres també possibles? Aquesta mena de preguntes van impulsar el naixement de les matemàtiques fa milers d'anys.

1. Aquest article és una versió impresa del que trobareu a la revista electrònica *Materials Matemàtics* (Mat²) a l'adreça <http://mat.uab.cat/matmat>. Els editors del *Nou Biaix* us recomanen, sense cap vacil·lació, visitar amb freqüència la web indicada, que reuneix un seguit d'articles matemàtics, en general magnífics i molt interessants, de caire divulgatiu i de diversos nivells

Una de les funcions bàsiques del coneixement matemàtic al llarg de la història ha estat la interpretació i la comprensió del món natural. La convicció que la natura es regeix per una mena de *principi d'economia* ha estat una peça clau en aquest procés, no només des d'un punt de vista estètic, sinó també perquè es tracta d'una idea que combina l'eficiència i la senzillesa.

Un segment rectilini és el trajecte més curt entre dos punts del pla. Un arc de cercle màxim és el trajecte més curt entre dos punts de la superfície d'una esfera. De totes les corbes tancades de perímetre fix, la que envolta més àrea és la circumferència. Qüestions d'aquest estil —els anomenats *problemes de màxims i mínims*— ja van interessar els matemàtics grecs i des d'aleshores no només han contribuït d'una manera decisiva al desenvolupament de les matemàtiques, sinó també de la física, les ciències de la vida, l'economia i l'art. La nostra vida diària planteja constantment problemes que requereixen *maximitzar* o *minimitzar* alguna quantitat, en el sentit de treure el màxim profit d'una determinada situació a partir d'uns mitjans donats. Per què la natura s'hauria de comportar d'una manera diferent? A partir del segle XVII i paral·lelament al desenvolupament del càlcul diferencial, els problemes de màxims i mínims han proporcionat eines fonamentals per donar sentit al principi d'economia de mitjans de què parlàvem abans i aprofundir en la comprensió del món físic.

En aquesta nota farem un breu recorregut, necessàriament parcial i incomplet, per alguns dels problemes de màxims i mínims més rellevants de la història i les seves implicacions en qüestions del món natural.

2. El problema d'Heró d'Alexandria, la reflexió de la llum i el billar

Un dels problemes de mínims més antics està relacionat amb la geometria de la reflexió de la llum i s'atribueix al matemàtic, enginyer i inventor Heró d'Alexandria. No se sap gaire sobre la vida d'Heró; s'especula que va viure durant el primer segle després de Crist i que va escriure diversos tractats òptics, geomètrics i mecànics [9]. En un d'ells, *Catoptrica*, va estudiar les propietats de reflexió de la llum i l'ús pràctic de miralls. La llei fonamental de la reflexió de la llum diu que *quan un raig de llum és reflectit per una superfície plana, l'angle d'incidència i de reflexió són iguals* i probablement ja era coneguda per Euclides quatre-cents anys abans. L'observació fonamental d'Heró és que la llei de reflexió es podia deduir d'un principi més general: la llum viatja de tal manera que el **temps** del recorregut és **mínim**.

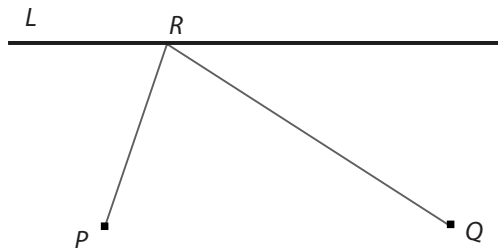


Figura 1

A continuació deduirem la llei de reflexió a partir del principi de temps mínim seguint l'argument d'Heró. Suposem (fig. 1) que un raig de llum que surt del punt *P* es reflecteix en

una línia L i torna a Q . On ha d'estar situat el punt de contacte R per tal que el camí PRQ sigui òptim d'acord amb el principi de temps mínim? Com que la velocitat de la llum no canvia amb la reflexió, temps mínim equival a distància mínima. Per tant, R ha de ser tal que la suma de les distàncies $PR + RQ$ sigui mínima. Podem plantejar el mateix problema matemàtic adaptat a diferents situacions de la «vida real». Per exemple, suposem que som al punt P , casa nostra és el punt Q i la recta L representa un riu. En aquest context, la pregunta és: quin és el camí òptim de tornada a casa si volem fer abans una parada al riu? Una altra interpretació, més lúdica, té a veure amb trajectòries en **billars**. Una bola surt de P , xoca en la recta L (una de les parets de la taula de billar) en un punt R i torna a Q . Com que la bola seguirà el camí més curt, el problema és idèntic al del raig de llum i, per tant, la llei bàsica del billar és també la igualtat entre els angles d'incidència i de reflexió. Tornarem als billars a la secció 9.

La solució del problema d'Heró es basa en un argument de simetria tan simple com elegant. Sigui Q^* el punt simètric de Q respecte de la recta L (fig. 2).

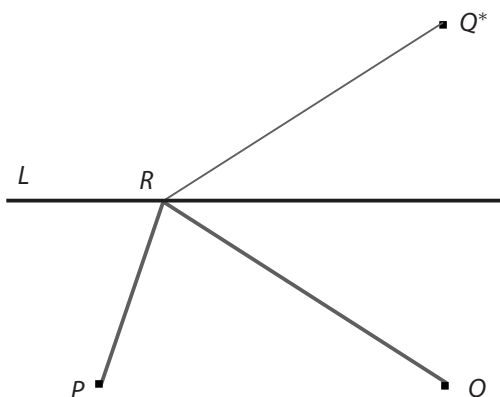


Figura 2

Com que $RQ = RQ^*$, el problema es pot replantejar així: quin és el punt R sobre la recta L de manera que la suma de les distàncies $PR + RQ^*$ sigui mínima? Ara és geomètricament obvi que aquesta suma és mínima quan R és el punt d'intersecció del segment PQ^* amb la recta L (fig. 3).

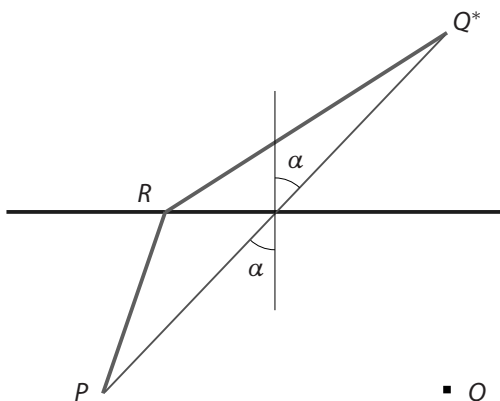


Figura 3

Tornant a la pregunta original, el raonament d'Heró implica no només que els angles d'incidència i de reflexió del camí òptim són iguals (fig. 4) sinó que també proporciona un mètode constructiu. Aquest argument probablement ja era conegut per Arquímedes. Trobarem més aplicacions del problema d'Heró en les seccions següents.

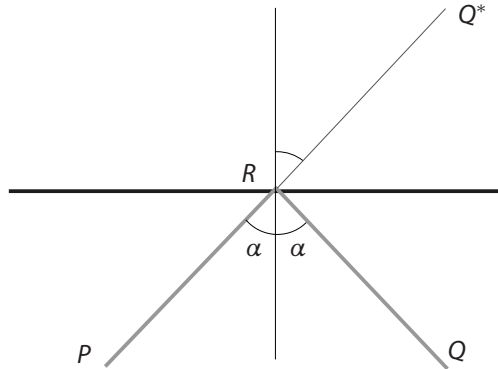


Figura 4

3. La llegenda de la princesa Dido

Res millor que acudir a *L'Eneida* de Virgili per explicar la llegenda de la princesa Dido. La versió de Virgili diu que Dido, princesa fenícia de la ciutat de Tir, es va veure obligada a fugir-ne quan el seu germà Pigmalión va assassinar el marit de Dido. Aleshores va emprendre una travessia pel Mediterrani que la va portar fins a la ciutat de Cartago, a la costa nord de l'actual Tunísia, on es va voler establir amb la seva gent. Va negociar amb el cap local, Jarbes, qui li va proposar el tracte següent: tot el terreny que pogués tancar amb una pell de brau seria seu. Potser Jarbes no comptava amb l'astúcia de Dido, que va fer tallar la pell en tires molt primes per després unir-les i formar una corda tancada que envoltava una figura amb l'àrea màxima possible.



El problema matemàtic al qual es va enfrontar Dido (**problema isoperimètric**) és el següent: *entre totes les corbes tancades de longitud fixa, quina envolta una àrea màxima?* És legítim pensar que Dido va trobar la solució correcta: **la circumferència**.

Teorema isoperimètric. *De totes les corbes tancades de longitud fixa, la circumferència és la que envolta més àrea.*²

2. El problema isoperimètric *dual* pregunta per la corba tancada de perímetre mínim entre les que tenen àrea donada. Els dos problemes són equivalents. Considerarem la formulació dual a la secció 8.

De fet, Dido podria haver tret encara més partit de la situació aprofitant la línia de costa, que se suposa recta (fig. 5): amb la corda sense tancar, es forma un arc semicircular els extrems del qual són dos punts de la costa. En aquest cas, el problema matemàtic corresponent —de fet, equivalent a l'anterior— és: de totes les corbes de longitud fixa que tenen els extrems sobre una recta donada, quina és la que envolta més àrea? La resposta és un arc semicircular.

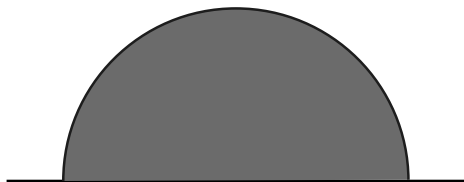


Figura 5

Paral·lelament, *L'Eneida* relata la història d'Enees de Troia. Enees, juntament amb un grup de supervivents de la batalla contra els grecs, es dirigia cap a Itàlia per fundar una nova ciutat. Una tempesta va desviar el vaixell cap a Cartago, on Dido els va acollir i, per obra de Venus, es va enamorar d'Enees. Hermes, enviat per Zeus, va ordenar Enees que abandonés Dido, que, desesperada, es va suïcidar. Dant va condemnar Dido als inferns i, en clau musical, Purcell va recuperar la història en l'òpera *Dido i Enees*. La història de Dido va acabar tràgicament i Cartago va desaparèixer fa molt, però el problema de Dido ha esdevingut un dels clàssics de les matemàtiques i durant segles ha continuat sent una font d'inspiració tant dintre com fora de les matemàtiques pures.³

4. Breu història del problema isoperimètric

La confusió entre àrea i perímetre estava molt estesa a l'antiguitat. Al llibre 4 de les *Històries*, l'historiador grec Polibi (ca. 200-118 aC), en un fragment amb títol *Càlcul de la mida de les ciutats*, diu:

Molta gent jutja la mida de les ciutats simplement pel seu perímetre. Quan hom diu que Megalopolis fa cinquanta estadis de perímetre i Esparta només quaranta vuit, però que Esparta és dues vegades més grossa que Megalopolis, l'afirmació els sembla increïble... He arribat a fer aquestes observacions perquè no només els homes ordinaris, sinó també aquells qui aspiren al poder polític i al comandament dels exèrcits, són ignorants d'aquestes coses.

Dos segles més tard, el filòsof Procle (al primer llibre dels *Elements* d'Euclides) també feia reflexions semblants. Per exemple, la figura 6 mostra dos triangles *A* i *B* de la mateixa àrea (tenen la mateixa base i la mateixa alçada), però el perímetre de *B* és clarament més gran.

3. Al llibre *A mathematician's apology*, G. H. Hardy fa una deliciosa reivindicació del caràcter estètic de les matemàtiques i, entre d'altres observacions sucoses, deixa anar l'afirmació següent, que certament no contribueix a enfortir els ponts entre matemàtiques i literatura: «Arquímedes serà recordat quan Èsquil sigui oblidat, perquè les llengües moren i les idees matemàtiques no».

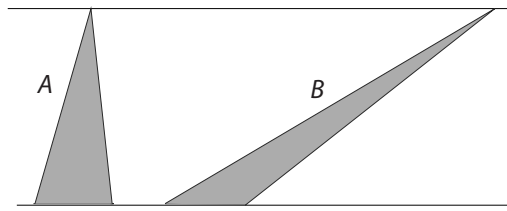


Figura 6

Una observació prèvia és que, un cop assumida l'existència d'una corba tancada que és solució del problema isoperimètric, l'aproximació de la corba per poligonals mostra que podem reduir-nos al cas de polígons (fig. 7).

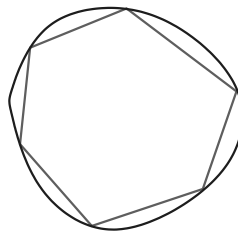


Figura 7

Aquest mètode va ser emprat pels grecs, que ja coneixien la solució del problema isoperimètric, malgrat la confusió entre àrea i perímetre esmentada abans. Possiblement el primer atac seriós al problema isoperimètric va aparèixer al tractat *De les figures isomètriques* del matemàtic grec Zenodor. Sabem poca cosa de la vida de Zenodor, però es creu que va viure al segle II aC, poc temps després d'Arquimedes. Les referències als seus treballs ens han arribat pels comentaris de Teó d'Alexandria⁴ i de Pappus d'Alexandria. Entre els resultats demostrats per Zenodor, hi ha els següents:

1. L'àrea d'un polígon *regular* de n costats és més gran que l'àrea de qualsevol altre polígon de n costats amb el mateix perímetre.
2. Donats dos polígons regulars del mateix perímetre i costats $m < n$, l'àrea del polígon de n costats és més gran que la del polígon de m costats.
3. Un cercle té més àrea que qualsevol polígon regular amb el mateix perímetre.

Dels quals es pot deduir, per arguments d'aproximació, que la solució del problema isoperimètric és la circumferència (que es pot considerar un polígon regular d'infinit costats). Les demostracions de Zenodor eren incompletes: en el primer resultat assumia que el polígon òptim existeix, afirmació que requereix una justificació. De fet, la qüestió de l'existència de solució al problema isoperimètric no va ser objecte d'atenció seriosa fins ben entrat el segle XIX. El matemàtic suís Jakob Steiner (1796-1863) va donar cinc «demostracions»

4. Teó era el pare de la filòsofa i matemàtica Hipàtia.

del teorema isoperimètric [2], però tot i que els arguments de Steiner són veritables joies per la seva elegància i simplicitat, un punt restava sense aclarir: en totes les demostracions donava per fet que existia solució (bàsicament, la seva estratègia sempre és partir d'una figura que no és un cercle i millorar la seva àrea). El matemàtic alemany Peter Dirichlet, contemporani de Steiner, li va fer notar que les demostracions estaven incompletes perquè pressuposaven l'existència de solució. Gràcies als esforços de Dirichlet, Weierstrass i Hilbert, entre d'altres, les qüestions d'existència es van anar incorporant com una part necessària de les resolucions matemàtiques als problemes de màxims i mínims.

5. El problema isoperimètric per triangles

Com s'ha comentat a la secció anterior, és suficient resoldre el problema isoperimètric per polígons. En aquesta secció analitzarem el primer teorema de Zenodor per triangles, cas que ja és prou interessant i conté els principals elements del cas general. Els arguments que s'exposaran a continuació estan basats en la solució del problema d'Heró i en consideracions geomètriques elementals. Vegeu [2, 3, 14] per al cas general i en particular [9] per a l'argument original de Zenodor.

Es tracta de demostrar que, entre tots els triangles de perímetre donat, el triangle equilàter és el d'àrea màxima. Prescindirem de la justificació d'existència i, donant per fet que hi ha un triangle òptim, demostrarem que és l'equilàter. Suposem que el triangle PRQ té dos costats diferents, per exemple $PR \neq RQ$ (fig. 8). L'estratègia consisteix a provar que existeix un altre triangle del mateix perímetre que té més àrea.

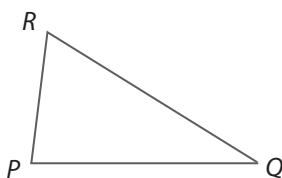


Figura 8

Sigui L la recta paral·lela a PQ que passa per R . Triem un punt S sobre L de manera que el triangle PSQ sigui isòsceles (fig. 9).

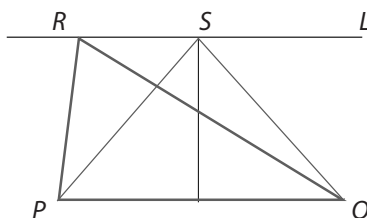


Figura 9

Pel teorema d'Heró discutit a la segona secció, tenim $PR + RQ > PS + SQ$. D'altra banda, les àrees de PRQ i de PSQ són iguals perquè són triangles de la mateixa base i la mateixa alçada.

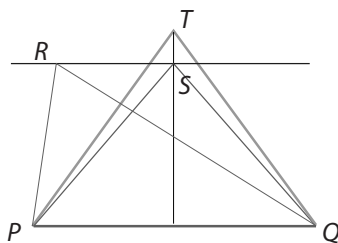


Figura 10

Ara (fig. 10) apugem el punt S i construïm un altre triangle isòsceles PTQ de forma que $PT + TQ = PR + RQ$. Com que hem augmentat l'alçada, l'àrea de PTQ és més gran que la de PRQ , però el perímetre és el mateix.

Per tant (fig. 11), la suposició que PRQ té dos costats diferents implica que hi ha un altre triangle (PTQ) que té el mateix perímetre però més àrea. La conclusió és que el triangle de més àrea entre tots els que tenen el mateix perímetre ha de ser equilàter.

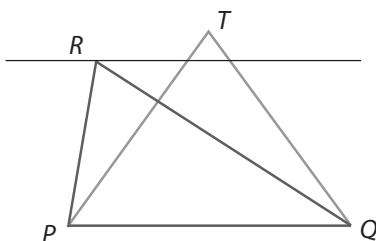


Figura 11

6. La sagacitat de les abelles (I)

*Construeixo casa meva segons les lleis d'una arquitectura severa;
i el mateix Euclides s'instruïria admirant la geometria dels meus alvèols.*

(Les mil i una nits. Cant de l'abella. Nit 934)

Les abelles i les seves construccions han atret l'atenció de científics, literats i artistes al llarg de la història. Virgili en parla al llibre IV de les *Geòrgiques* i des de Kepler fins a Darwin molts han elogiat les seves habilitats geomètriques. Al voltant de l'any 36 aC, Marc Terenci Varró, en el seu llibre d'agricultura [18], va escriure sobre la forma hexagonal de les cel·les de les abelles. Els matemàtics de l'època secundaven la teoria que la forma hexagonal s'explicava a partir de principis d'optimització. L'origen de la qüestió és incert, però Varró s'hi va referir molt abans que Pappus d'Alexandria, un dels grans geòmetres de l'antiguitat, inclogués el problema en la seva gran obra, la *Col·lecció*. Pappus, que va viure a finals del segle III dC, va escriure un prefaci al llibre V de la *Col·lecció* amb el títol *De la sagacitat de les abelles*. Al capítol dedicat a Pappus del llibre *A history of greek mathematics* [9], Heath escriu a propòsit de l'estil i el tema del prefaci: