

LLIÇÓ INAUGURAL
DEL CURS ACADÈMIC
2015-2016

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

Caminant agafats de la mà de Karl Weierstrass

Josep Pla i Carrera

PROFESSOR EMÈRIT DEL DEPARTAMENT
DE PROBABILITAT, LòGICA I ESTADÍSTICA

Sumari

Justificació	9
Introducció	11
Alguns resultats d'anàlisi real	13
1. Teoremes de Bolzano-Weierstrass i del valor mitjà	13
1.1. Bernhard Bolzano i l'inici del problema	13
1.2. Intervé Karl Weierstrass: la construcció dels reals	22
1.3. Un incís: apareix Jean Gaston Darboux	37
1.4. Apareix el <i>Cours d'Analyse</i> d'A. L. Cauchy	43
1.4.1. Introducció	43
1.4.2. La continuïtat puntual d'una funció	47
1.4.3. La continuïtat uniforme d'una funció en un domini	53
1.4.4. La derivació en Cauchy i Weierstrass	58
2. Cauchy i Weierstrass: les sèries i les seves possibilitats	62
2.1. Les sèries en el <i>Cours d'Analyse</i> de Cauchy	62
2.2. Tres aportacions de Weierstrass relacionades amb les sèries de funcions	66
2.2.1. Weierstrass <i>versus</i> Cauchy	66
2.2.2. Les sèries i el mètode dels intervals encaixats	70
2.2.3. Preliminars de topologia	72
2.2.4. Les sèries de funcions i de les derivades	72
2.2.5. Una funció contínua arreu no derivable enlloc	74
3. El teorema d'aproximació de Weierstrass	84
3.1. La fórmula de Taylor	84
3.2. El desenvolupament de Fourier	86
Dos resultats d'anàlisi complexa	94
4. Teorema de Casorati-Weierstrass	94
5. La funció $\wp$ de Weierstrass	100
6. Especificació dels resultats indicats	104
Referències	107

Un matemàtic que no té una mica de poeta no és certament un autèntic matemàtic.¹

L'objectiu final que cal tenir sempre al cap és arribar a comprendre correctament els fonaments de la ciència; però, per assolir qualsevol progrés en ciència, és imprescindible estudiar-ne problemes concrets.²

L'única cosa que hi ha són les sèries de potències.³

KARL WEIERSTRASS

Justificació

M'ha semblat que fóra bo —en aquesta lliçó inaugural del curs 2015-2016 de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona (UB)—⁴ oferir una presentació, alhora històrica i metodològica, de com intervingueren les aportacions de Weierstrass en la consolidació dels conceptes i resultats que els estudiants d'un grau reglat de matemàtiques troben en els cursos d'anàlisi real [i complexa].

Em fixaré en una desena d'ítems —vuit d'anàlisi real i dos d'anàlisi complexa—. ⁵ Són: 1) el teorema de Bolzano-Weierstrass; 2) el teorema del

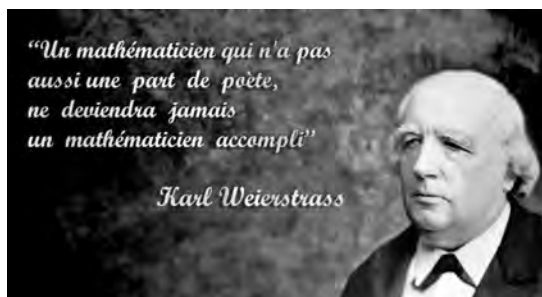
1. «Es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein». Vegeu la carta a Sofia Kowalewskaia del 27 d'agost de 1883, citada a [Mitt02, p. 149, o bé l'article de 1923, p. 191].

2. Citat a [Dura03, p. 105].

3. Citat a [Bell37, edició castellana, p. 458], on llegim textualment: «Weierstrass solia exclamar: “L'única cosa que hi ha són les sèries de potències”».

4. Una síntesi del text la vaig exposar a la FME de la UPC dins l'Any Karl Weierstrass (25-03-2015) juntament amb la delicada exposició descriptiva de la Maria Rosa Massa i Esteve sobre la vida i l'obra de Weierstrass, i l'excel·lent exposició acadèmica sobre la funció $\wp$ de Weierstrass de Jordi Guàrdia i Rúbies. Vegeu <http://upcommons.upc.edu/video/handle/2099.2/3826>.

5. M'ha semblat idoni introduir aquestes dues qüestions perquè, a grans trets, l'obra de Weierstrass es pot considerar doble: la que fa referència a la fonamentació de l'anàlisi —de la qual mai no va publicar res— però que constitueix el nucli de la memòria, i la que publicà en les revistes científiques de l'època —recopilades, sense tenir en compte les cartes, en cinc



Karl Weierstrass⁶

valor mitjà; 3) el teorema de Weierstrass; 4) el teorema de Heine-Borel;⁷ 5) i 6) la convergència uniforme i el criteri M de Weierstrass; 7) l'existència de funcions contínues arreu i no derivables enlloc; 8) el teorema de Weierstrass d'aproximació de funcions usant polinomis i la generalització de Stone;⁸ 9) els teoremes de Casorati-Weierstrass i de Picard, i 10) una presentació de la funció $\wp$ de Weierstrass.⁹

Però abans d'endinsar-me en el tema vull agrair a l'equip deganal i, en particular, a la degana Carme Cascante, que enguany m'hagi distingit deixant-me llegir aquesta lliçó inaugural, probablement la darrera que faré a la Facultat. I ho faig molt sincerament. Em permet de retrobar-me, un cop més, amb els col·legues, companys i amics i també amb els alumnes dels quals estic cada cop més allunyat. Alhora, *m'ha permès reaprendre nocions i teoremes oblidats i, sincerament, he après moltíssim i he gaudit d'allò més.*

Per tot això, la presentació que faré vol ser un diàleg entre mestre i deixeble i remetré als teoremes més notables dels textos amb què jo els

volums— que tracten d'una manera molt important d'anàlisi complexa i de funcions el·líptiques.

6. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass. Ostenfeld (Westfàlia, Prússia), 31 d'octubre de 1815 – Berlín (Brandburg, Prússia), 19 de febrer de 1897.

Usaré *Weierstrass* en lloc de *Weierstraß*, d'acord amb l'*Enciclopèdia catalana*. Vegeu <http://www.enciclopedia.cat/EC-GEC-0071947.xml>.

7. Els quatre ítems es veuen el primer curs: els ítems 1 i 2, el primer quadrimestre, i el 3 i el 4, el segon.

8. Són temes de segon curs, segon semestre.

9. Són dos resultats que no s'acostumen a veure en el curs reglat d'anàlisi complexa.

vaig estudiar —i, en algunes ocasions, aprendre—¹⁰ i a aquells en els quals els estudien i, de ben segur, els aprenen avui en dia els estudiants de les facultats de matemàtiques.

Introducció

En començar el segle XIX, els matemàtics tenien plantejats alguns problemes que caldria resoldre en el decurs del segle, si volien disposar d'una matemàtica basada en el nombre real, els conceptes de *funció* i de *successió* i *sèrie* —lligats als conceptes de *continuitat* i *continuitat uniforme*; de *derivabilitat*; d'*integració*; de *convergència puntual* i *funcional*, amb èmfasi en la convergència uniforme; d'*aproximació* i d'introducció de funcions noves amb propietats peculiars, etc.—, i tot ben fonamentat amb un cert rigor lògic. Aquest procés és el que, a la historiografia de la matemàtica, es coneix com *aritmètizació de l'anàlisi*.¹²



Niels Henrik Abel¹¹

Aquesta preocupació la palesa el matemàtic noruec Abel quan diu:

En el curs de monsieur Cauchy [*Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique*] que suara he esmentat hi llegim el teorema següent: «Si els termes de la sèrie $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ són funcions d'una única quantitat variable, en tots la mateixa, i, a més, són funcions contínues respecte de la variable en l'entorn d'un cert valor particular (de la variable) en el qual la sèrie convergeix, aleshores el valor de la suma s de la sèrie, en aquest entorn particular de la variable, també és una funció contínua.» Però a mi em sembla que aquest teorema admet excepcions. Per exemple, la sèrie $\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$ és discontinua per a cada valor de x , $(2m+1)\pi$, on m és un enter. I n'hi ha d'altres amb propietats anàlogues.¹³

10. Són els llibres: [Teix68], [Apos60], [Cart61]; [Orte90].

11. Niels Henrik Abel. Finnøy (Noruega), 5 d'agost de 1802 – Froland (Noruega), 6 d'abril de 1829.

12. Vegeu, per exemple, [Boye68, capítol xxv].

13. Vegeu [Abel26, p. 336]. Una part de l'article, en anglès, es troba a [Birk73, p. 69-70].



Richard Dedekind¹⁴

Semblantment, un quart de segle més tard, l'any 1858 —quan a Dedekind, aleshores professor de l'École Polytechnique de Zuric, se li encarrega un curs sobre els elements del càlcul diferencial— s'adonna que l'apropament geomètric tradicional de la idea de límit, encara que té un valor pedagògic important en un curs introductori, no és acceptable quan el que es pretén és fonamentar «científicament» la qüestió.¹⁵

Em vaig preocupar per les consideracions d'aquest opuscle per primera vegada la tardor de l'any 1858. Com a professor de l'Escola Politècnica de Zuric em vaig veure obligat, per primera vegada a la vida, a donar un curs sobre els elements del càlcul diferencial i em vaig adonar, com no me n'havia adonat mai abans, de la manca d'una base veritablement científica per a l'aritmètica. En el moment d'haver de tractar el concepte d'aproximació d'una quantitat variable a un valor límit fix i sobretot en el moment d'haver de demostrar la proposició que estableix que *qualsevol quantitat [variable] que creix constantment, però que no depassa totes les fites possibles, s'ha d'apropar a un valor límit*, em veia abocat a recórrer a l'evidència geomètrica. Fins i tot ara mateix sostinc que, des d'un punt de vista didàctic, l'ús de la intuïció geomètrica resulta extraordinàriament útil en tota primera presentació del càlcul diferencial —i àdhuc indispensable— si no es vol perdre molt de temps. Ningú no pot negar, emperò, que aquesta mena d'introducció al càlcul diferencial no pot pretendre que se la consideri científica (*Wissenschaftlichkeit*). Aquest sentiment d'insatisfacció em va resultar tan aclaparador que em vaig proposar amb fermesa meditar-hi fins a aconseguir una fonamentació purament aritmètica i completament rigorosa dels principis de l'anàlisi infinitesimal. Es diu sovint que *el càlcul diferencial maneja magnituds contínues, i, no obstant això, encara ningú no ha donat mai una explicació d'aquesta continuïtat*; fins i tot la presentació més rigorosa del càlcul diferencial basa les demostracions, no en la continuïtat, sinó que apella, més o menys conscientment, a conceptes

14. Julius Wilhelm Richard Dedekind. Brunsvic (Baixa Saxònia, Alemanya), 6 d'octubre de 1831 – Brunsvic (Baixa Saxònia, Alemanya), 12 de febrer de 1916.

15. Vegeu la nota 54 i, en particular, [Pla93, p. 222].

geomètrics o suggerits per la geometria, o a proposicions que mai no s'han establert d'una manera purament aritmètica.¹⁶

Quin és, però, el problema que, en el segle XIX,¹⁷ comporta l'estudi al qual es refereix Dedekind?

Una primera resposta la podem donar plagiant Hairer-Wanner:

—Realment, què és una derivada? Resposta: és un límit.

—Realment, què és una integral? Resposta: és un límit.

—Realment, què és una sèrie $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$? Resposta: és un límit. Això porta a haver-se de preguntar:

—Què és un límit? Resposta: és un nombre.

I aleshores, per fi, cal encara fer la pregunta:

—Però, què és un nombre?¹⁸

Alguns resultats d'anàlisi real

1. Teoremes de Bolzano-Weierstrass i del valor mitjà

1.1. Bernhard Bolzano i l'inici del problema

Un dels problemes importants de finals del segle XVIII i de principis del segle XIX era el que actualment coneixem com a *teorema fonamental de l'àlgebra* que, bàsicament, podem sintetitzar així: *a)* «Tot polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ té almenys una arrel complexa (i també la conjugada)» o, més humilment, *a')* «Tot polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, de grau senar, té almenys una arrel real».

16. Vegeu [Dede72, p. 14-15]. Els èmfasis són meus.

17. Per no retrocedir en el temps excessivament —i, com sempre, arribar a Grècia—, posaré l'accent en les aportacions de l'anàlisi matemàtica del segle XIX i deixaré a la teva curiositat, estimat lector!, la recerca dels antecedents. Pots consultar, per exemple, [Boye49], [Baro69], [Edwa79], [Jahn03].

18. Vegeu [Hair96, p. 170-171].



Bernhard Bolzano¹⁹

Bolzano observa que les demostracions —en concret, la de Laplace i la primera de Gauss—²⁰ necessiten el resultat de a' per poder establir el resultat a .²¹

Cal, doncs, establir aquest resultat amb rigor, i Bolzano hi dedica el treball de 1817.²² Fa una presentació genètica del problema —i de les solucions «errònies» que se li han atribuït— per tal de conduir-nos, a poc a poc i d'una forma raonable i raonada, a l'autèntica solució. Tant de bo hi hagués més autors amb aquesta manera d'entendre l'exposició de les idees i dels resultats —sobretot quan són iniciàtics— que volen comunicar!²³

Diu:

En el mètode demostratiu *més usual*, hom es basa en una veritat manllevada a la geometria: *a saber, que tota línia contínua amb curvatura simple les ordenades de la qual són primer positives, i després negatives (o a la inversa), talla necessàriament l'eix de les abscisses en algun indret situat entre aquestes dues ordenades*. No hi ha res a objectar ni a la *precisió* ni a l'*evidència* d'aquest teorema geomètric. Però, alhora, és ben manifest que es cau en una falta intolerable contra el *mètode adequat* que consisteix a pretendre demostrar les veritats de les matemàtiques *pures* (o generals) (és a dir, de l'aritmètica, de l'àlgebra o de l'anàlisi) amb consideracions que pertanyen a una part *aplicada*²⁴ (o especial), és a dir, la *geometria*.

19. Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano. Praga (Bohèmia, actual República Txeca), 5 d'octubre de 1781 – Praga (Bohèmia, actual República Txeca), 18 de desembre de 1848.

20. Vegeu [Pla92] i [Pla05].

21. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 164-165; edició francesa, p. 142].

22. El lector interessat en l'obra matemàtica de Bolzano la trobarà, en anglès, a [Russ04], i una anàlisi força completa, a [Rusn94]. Vegeu també [Bolz30].

El text de 1817, que analitzem aquí —que, sense cap mena de dubte, és un d'aquells treballs que, insistent en la idea que tantes vegades he defensat (la necessitat de llegir els clàssics), aconsellaria a tot matemàtic—, es troba també a [Bolz17].

23. Seria molt interessant fer una traducció, al català, anotada, d'aquest treball i el lligam amb altres treballs de Bolzano. Vegeu [Russ04].

24. És, si més no, curiosa aquesta distinció entre matemàtica pura —l'aritmètizació de la matemàtica— i aplicada —la geometrització de la matemàtica—.

Amb el temps, no heu sentit ni reconegut la incongruència de μεταβασις εἰς ἄλλο γενοϛ? ²⁵ No l'hem evitat en centenars d'ocasions —quan coneixíem la manera de fer-ho— i no s'ha considerat aquesta eliminació tot un èxit? I si insistim en la voluntat de ser coherents, no ens hem d'esforçar per ser-ho també en aquesta ocasió? —En efecte, en la ciència, les demostracions mai no han de ser simples procediments de *fabricació d'evidències* (*Gewissmachungen*), sinó que, abans que cap altra cosa, han de ser els *fonaments* (*Begründungen*); cal exposar el fonament objectiu que posseeix la veritat que es vol demostrar [...]. ²⁶

Aleshores, després d'analitzar els intents fallits, mostra allò que cal fer per establir els fonaments i, posteriorment, fa la demostració correcta del teorema. Calen tres passos: 1) una definició; 2) un resultat que, de fet, és previ, malgrat que ell el vincula a la definició anterior, finalment 3) la demostració del teorema.

Definició 1.1 (Definició de *continuitat* de Bolzano). *La funció $f(x)$ varia segons la llei de continuïtat per a tots els valors de x situats a l'interior o a l'exterior de dos extrems²⁷ quan, si x és un valor arbitrari d'aquests extrems, podem aconseguir que la diferència $f(x + \omega) - f(x)$ sigui més petita que una quantitat arbitrària donada per endavant, quan ω s'agafa tan petit com calgui.* ²⁸

25. «No podem passar d'un indret a un altre». Una frase anàloga, la trobem al llibre dels *Analítics segons*, 75 a 39 [Barn75, p. 131]: «No és possible, doncs, demostrar res passant d'un gènere a un altre, és a dir, no podem provar cap qüestió geomètrica amb recursos aritmètics».

Vull indicar, tanmateix, que aquest «aforisme», al peu de la lletra, és fals: hi ha problemes geomètrics —la quadratura del cercle, la resolució amb regla i compàs, etc.— que s'han resolt en un altre indret. Pensem, més complexos, el teorema darrer de Fermat, el problema dels quatre colors, la llei dels nombres primers, etc. Constitueix una de les grans riqueses de la matemàtica, que anomeno «els corrents subterranis».

26. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 160; edició francesa, p. 137].

27. Fixem-nos en l'ambigüïtat entre si la definició és puntual o bé val en un cert interval. Vegeu, a la pàgina 48, la definició de *continuitat* de Heine. A més, Bolzano pensa també en funcions com ara $x + \sqrt{(1-x)(2-x)}$ que «és contínua solament per als valors de $x < +1$ o $x > +2$, però no per als valors de x entre $+1$ i $+2$ » [Bolz17, edició anglesa, p. 162, nota 12; edició francesa, p. 139, nota].

28. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 162; edició francesa, p. 139].

Aquestes són les funcions susceptibles de complir el que imposa el teorema. Però per poder-ne fer una demostració correcta li cal un teorema auxiliar.

Teorema 1.2 (Teorema de Bolzano). *Si no tots els valors en general d'una quantitat i satisfan una propietat M que val, però, per a tots els $i < u$ per a algun valor u ,²⁹ aleshores existeix un valor maximal U per al qual podem afirmar que M val per a tot $i < U$.³⁰*

De fet, Bolzano afirma l'existència del *suprem* $U := \sup \mathcal{M}(u)$, on $\mathcal{M}(u)$ és el conjunt:

$$\mathcal{M}(u) = \left\{ u \in \mathbb{R} : (\forall i < u \, M(i)) \wedge (\exists j \neg M(j)) \right\}.$$
³¹

Vegeu que es tracta d'un antecedent del teorema:

Teorema. *Tot conjunt de nombres reals fitat superiorment té un suprem.*

Aleshores pot demostrar el teorema següent —més general que el que ha enunciat a la introducció—:

Teorema 1.3 (Teorema del valor mitjà). *Siguin $f(x)$ i $\varphi(x)$ dues funcions contínues de x —o simplement contínues per a tot x entre α i β —. Si, a més, satisfan*

Cal entendre-ho així: «Per a tots els valors $\omega > 0$ inferiors a cert valor $\omega_0 > 0$ tan petit com calgui; o sigui, per a tot $w, 0 < w < w_0$ ». Imposa, de fet, la condició restrictiva: «La propietat “ $f(x + \omega) - f(x)$ és més petit que una quantitat donada per endavant” val per a tot $0 < \omega < \omega_0$ ». Això queda ben palès quan, més endavant, diu: «Si $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, aleshores, per la llei de continuïtat, $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, quan prenem i suficientment petit» [Bolz17, edició anglesa, p. 166; edició francesa, p. 144]. A més, cal entendre, «en valor absolut»; és a dir, per a la funció $|f(x) - \varphi(x)|$. L'expressió *valor absolut*, la trobem a [Bolz17, § 15, edició anglesa, p. 177; edició francesa, p. 159] i també a *Funktionenlebre* dins [Bolz30, p. 14].

29. Anomenem-la hipòtesi restrictiva H_u .

30. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 166; edició francesa, p. 144].

31. Tal com està enunciat la hipòtesi H_u , és obvi que aquest objecte que falseja M és més gran que cada un dels u del conjunt $\mathcal{M}(u)$.

la propietat $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ i $f(\beta) > \varphi(\beta)$, aleshores sempre existeix un valor γ entre α i β per al qual $f(\gamma) = \varphi(\gamma)$.³²

Demostració. Bolzano n'analitza la plausibilitat.³³

Si suposem que $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, aleshores, per la llei de continuïtat, tenim igualment $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, sempre que i sigui prou petit. Per tant, la *propietat de ser més petit*³⁴ pertany a la funció de i representada per la funció $f(\alpha + i)$ per a tots els valors de i que són més petits que un cert valor.³⁵ Però aquesta propietat no val per a tots els valors de i sense cap restricció ja que no val, per exemple, per a $i = \beta - \alpha$, ja que [per hipòtesi] $f(\beta) > \varphi(\beta)$.

Apliquem el teorema 2.2 i obtenim un valor maximal U .

Per al valor maximal U dels i , no pot ser que $f(\alpha + U) < \varphi(\alpha + U)$ ja que, si ho fos, per la llei de continuïtat, tindríem també $f(\alpha + U + \omega) < \varphi(\alpha + U + \omega)$, sempre que ω sigui prou petit. Per tant, no seria veritat que U és el més gran dels valors per als quals hom pot afirmar que tots els valors i inferiors a U satisfan $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, ja que $i := U + \omega$ seria un valor més gran que U per al qual això també seria veritat.

Però encara molt menys podem tenir que $f(\alpha + U) > \varphi(\alpha + U)$, ja que, aleshores, tindríem també $f(\alpha + U - \omega) > \varphi(\alpha + U - \omega)$ prenent ω prou petit. I, per tant, no seria veritat que $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$ per a tots els valors de $i < U$.

Cal, doncs, que $f(\alpha + U) = \varphi(\alpha + U)$, com volíem. □

Corol·lari 1.4. *Sigui $f(x)$ una funció contínua en $[a, b]$.*

- a) *Si $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$, existeix un γ entre α i β per al qual $f(\gamma) = \eta$.*
- b) *Si $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$, existeix un γ entre α i β per al qual $f(\gamma) = 0$.*

32. Vegeu [Bolz17, edició anglesa, p. 166; edició francesa, p. 143-144].

33. Diu: «Això constitueix un breu resum del mètode adoptat» [Bolz17, § 15, edició anglesa, p. 166; edició francesa, p. 143-144]. Més endavant, [Bolz17, § 15, edició anglesa, p. 177-179; edició francesa, p. 159-162], n'ofereix la demostració detallada i acurada.

34. Les cursives es troben a l'original.

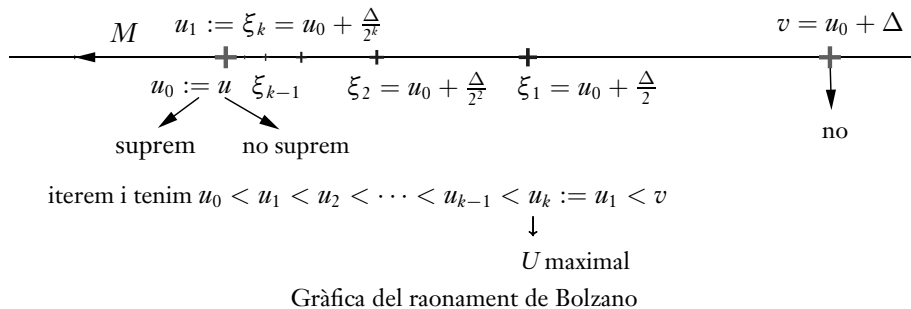
35. Amb aquesta precisió, queda aclarit el caràcter puntual de la continuïtat.

Demostració. El teorema anterior s'aplica als casos: a) $\varphi(x) = \eta$, i b) $\eta = 0$. $\square$

Només cal, doncs, demostrar el teorema 1.2. Aquí és on Bolzano usa la dimidiació, una metodologia que ja havien usat els grecs en l'exhaustió.³⁶

Demostració del teorema 1.2. Atès que la propietat M val per a tots els x que són més petits que $u_0 := u$, però no val per a tots els u , en general, existeix un cert valor $v_0 := u_0 + \delta$, amb $\delta > 0$, per al qual podem afirmar que M no val pas per a tot els $x < v_0$.³⁷

- a) Si u_0 és el darrer valor amb aquesta propietat — M val per a tots els $x < u_0$ —, ja hem acabat.
- b) Si u_0 no és el darrer valor amb aquesta propietat, aleshores, per a un cert $k_1 > 0$, $u_1 := u_0 + \frac{\delta}{2^{k_1}}$ fa el paper de u_0 , ja que, si no fos així, per a tot $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, cap dels valors $u_0 + \frac{\delta}{2^k}$ no la compliria i, per tant, u_0 seria l'element maximal buscat, i hem suposat que no ho és. I podem considerar que l'exponent k_1 és el primer dels exponents k per als quals això és així.



Fixem-nos amb quina habilitat —en fer que «tots els x » esdevinguin «tots els i »— Bolzano maneja ja el que, en paraules de Weierstrass, serà un «entorn d'un punt» de $\mathbb{R}$. Vegeu la pàgina 53.

36. Vegeu [Jahn03, p. 18-19] o [Pla15].

37. Bolzano l'anomena $V = u + D$, amb $D > 0$, però he preferit usar la notació subindexada perquè n'hem de fabricar molts altres, de punts.