

noubiaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Juny 2015



sumari

Consell de Redacció:
Manel Sol / Josep Lluís Solé (coords.)
Marianna Bosch
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Josep Pla
Romà Pujol
Manuel Udina

Juanjo Cárdenas
(responsable pàgina web)

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat
noubiaix@gmail.com
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral
Preu d'exemplar ordinari: 12 €
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
Margarida i ordre
Josep Rey
Museu de Matemàtiques
de Catalunya (MMACA)

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Publicacions i Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
Fax: 934 035 531
comercial.edicions@ub.edu
www.publicacions.ub.edu



3 Editorial

articles

8 Bótes i barrils
Armengol Gasull

29 Resoldre no és aprendre. De la resolució a la competència
matemàtica i de la vivenciació a l'abstracció
i la generalització matemàtica
Josep Callís i Franco

48 El raonament probabilístic en alumnes d'educació infantil
i de cicle mitjà d'educació primària
Paula López, Sílvia Serra i Laia Torres

55 Descobertes matemàtiques
Núria Cardet

66 Matemàtiques i entorn a l'educació infantil
Fàtima Dalmau i Àngel Alsina

80 Construir, conjecturar, comprovar i demostrar amb
el GeoGebra
Pep Bujosa

100 Concurs de resolució gràfica de «sangakus» amb el GeoGebra
Carlos Giménez Esteban

seccions

110 Per pensar d'un minut a una hora
Jordi Deulofeu

114 Construïnt matemàtiques
Anton Aubanell

120 El racó del MMACA
Josep Rey i Manuel Udina

128 El racó del *Cesire-Creatmat*

Aquest mes de juliol es farà la dissetena edició de les JAEM, organitzada per la SEMRM a la ciutat de Cartagena. És la millor mostra de la vitalitat i la il·lusió que té el professorat de matemàtiques de tot l'Estat espanyol per la feina que fem. Malgrat les dificultats dels temps actuals, al voltant d'un miler de professors i professores dediquen uns dies a compartir i aprendre noves idees per millorar el nostre treball a les aules. Els organitzadors han preparat un programa ben interessant que podeu veure amb detall a la seva pàgina web: <http://17jaem.semrm.com>

D'altra banda, un curs més s'acaba i ja hem de mirar el següent, que, com és habitual, es presenta amb uns quants canvis. A primària es completarà la implementació de la LOMCE a tota l'etapa. Pel que fa a secundària, es començarà la LOMCE a primer i tercer d'ESO i a primer de batxillerat. En el moment d'escriure aquestes línies, el Departament d'Educació de la Generalitat encara no ha fet públics els currículums, però sí que es poden veure els que ha publicat el Ministerio de Educación al BOE del 3 de gener d'aquest any.

L'abast que tindran tots aquests canvis dependrà en bona mesura de quina sigui l'evolució de totes les qüestions polítiques obertes a l'Estat espanyol. Sigui com sigui, l'aprenentatge per competències continua estant a la base del currículum de matemàtiques. Per tant, atenint-nos al que diuen sobre el paper, no s'hi haurien de produir grans modificacions. Diem això per fer notar que tots els esforços que s'han fet des de l'any 2007 per anar introduint el treball per competències a les aules no hauran estat estèrils, ja que interpretem que ara s'haurà de continuar treballant en la mateixa línia. Animem tot el professorat a seguir innovant, formant-se i compartint les bones experiències, com ha fet fins ara.

En aquest número 36 us proposem articles de tots els nivells educatius. Recordeu que un dels objectius de la nostra revista és que pugui interessar als professors de matemàtiques des d'infantil fins a la universitat. Creiem, com diem al començament, que els qui ensenyem matemàtiques som un col·lectiu amb bones idees, bones pràctiques i molta il·lusió per la nostra feina a les aules.

En primer lloc, trobem un article de l'Armengol Gasull sobre les matemàtiques associades a una qüestió pràctica com és el càlcul del volum d'una bóta o barril. L'Armengol ens explica que aquest problema interessà a Kepler, que el 1615 publicà sobre el tema un llibre titulat *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Aquest llibre, previ al desenvolupament del càlcul diferencial i integral, es considera l'avanç més seriós, juntament amb els resultats de Bonaventura Cavalieri, del càlcul d'àrees i volums, des dels temps d'Arquimedes. Amb aquest problema com a fil conductor, a l'article hi apareixen matemàtics o astrònoms com Oughtred, John Newton, Simpson, Cavalieri i Gauss.

A «Resoldre no és aprendre», en Josep Callís posa de manifest la seva preocupació pel pas d'un aprenentatge basat en la memòria a un aprenentatge competencial. L'article explica una experiència que ha fet amb els seus alumnes de magisteri i amb mestres en actiu. Són interessants les reflexions sobre com el mestre pren les decisions, reflexions que poden també ser útils a altres nivells educatius.

L'article de Paula López, Sílvia Serra i Laia Torres presenta un estudi que han portat a terme sobre les dificultats que tenen els nens i nenes d'infantil i primària per a comprendre l'atzar. Les autores mostren que, malgrat ser conceptes no immediats, podem introduir-los i treballar-los a l'aula d'una manera apropiada.

Una bona pràctica de la descoberta matemàtica sobre la forma geomètrica dels nombres ens la presenta Núria Cardet. Es tracta d'una experiència feta amb alumnes de quart de primària. Dues qüestions caracteritzen el seu treball: la integració de tot l'alumnat i el desenvolupament de les competències. Aquest treball va ser exposat a les jornades de Lleimat «Enriquiment competencial».

En Pep Bujosa ens mostra l'ús del GeoGebra per a treballar processos matemàtics com ara construir, conjecturar, comprovar i demostrar. A més a més, també posa de manifest com l'eina informàtica permet donar més protagonisme a l'alumnat a la classe de matemàtiques, al mateix temps que li provoca un treball reflexiu. Hi trobareu bones propostes per a portar a les aules de secundària.

A «Matemàtiques i entorn a educació infantil», la Fàtima Dalmau i l'Àngel Alsina expliquen una experiència d'aula amb un plantejament teòric del treball competencial de matemàtiques a infantil, concretament un exemple d'aprenentatge de matemàtiques a partir dels coneixement intuïtius que els nens adquireixen en les seves experiències. Aquest treball és un resum del que va guanyar el premi Maria Antònia Canals a la innovació en educació matemàtica en l'edició de 2014, en la categoria d'educació infantil.

Carlos Giménez ens presenta un altre exemple de l'ús del GeoGebra a la classe de matemàtiques. En aquest cas es tracta de resoldre problemes geomètrics a l'estil dels *sangakus* japonesos. Aquest treball també és un resum del que va guanyar un accèssit en el premi d'innovació matemàtica Maria Antònia Canals a l'edició de 2014, en la categoria d'ensenyament secundari.

Jordi Deulofeu ens recorda que el 2014 s'ha celebrat el centenari del naixement de Martin Gardner, motiu pel qual arreu del món s'han celebrat actes commemoratius. A continuació, i fidel al títol de la seva secció, ens proposa una bona col·lecció de problemes per pensar una mica, de manera gradual: al començament uns de més senzills i després uns altres que no ho són tant.

L'Anton Aubanell, a la seva secció «Construint matemàtiques», ens presenta una bona tasca en la qual l'experimentació amb materials es complementa amb l'abstracció. Es tracta d'un problema que Puig Adam ja presentava a *Didàctica matemàtica heurística*, en el qual combina l'àritmètica amb la geometria a partir de l'experimentació amb triangles i rombes i s'amplia després a l'estudi de mosaics.

Al «Racó del Museu», en Josep Rey i en Manel Udina descriuen uns mòduls de les exposicions del Museu que mostren algunes de les clàssiques propietats del nombre d'or i la seva relació amb la successió de Fibonacci.

Des del Cesire-Creamat ens presenten les campanyes que han dissenyat per afavorir els canvis a les aules en tres temes com són la geometria, l'estadística i les investigacions. Amb bona idea les anomenen «impulsem», amb la voluntat d'animar el professorat a portar-ho endavant. Les propostes que fan van des d'infantil fins a batxillerat. Mireu-vos-ho, que segur que hi trobareu bones idees.

Finalment, encoratgem tots els lectors a explicar, per mitjà del *Nou Biaix*, les propostes, experiències o idees que considerin d'interès per a la comunitat d'ensenyants de matemàtiques del nostre país. Esperem els vostres articles!

articles

articles



articles

Bótes i barrils

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques, Edifici C,
Universitat Autònoma de Barcelona,
08193 Bellaterra (Barcelona)
gasull@mat.uab.cat

Resum

En aquest treball ens interessem per la validesa de distintes fórmules usades a la pràctica per a calcular la capacitat de les bótes de vi o de sidra. Hi trobareu, per exemple, la fórmula de Simpson per a calcular integrals definides, un llibre escrit pel mateix Kepler sobre el tema i el mètode dels mínims quadrats, introduït per Gauss i Legendre per a trobar la millor solució per a sistemes sobredeterminats i incompatibles.

Abstract

In this paper we consider the validity of several practical formulas used to calculate the volume of wine or cider barrels. In our study we will find, for instance, Simpson's formula for calculating definite integrals; a book written by Kepler on the subject; and the method of least squares established by Gauss and Legendre, for calculating the best solution for overdetermined and incompatible systems.

Rellegint l'enciclopèdia¹ amb la qual vaig estudiar quan era petit, així com altres enciclopèdies i llibres antics que hi havia per casa (vegeu per exemple [3, 11]), vaig trobar un parell de fórmules que permetien calcular el volum d'una bóta de vi amb seccions circulars. Si anomenem D i d els diàmetres de la part més ampla i de les bases de la bóta, respectivament, h la seva altura i ℓ la distància entre el forat per omplir la bóta i l'extrem més allunyat d'aquest forat (vegeu la figura 1), les fórmules eren:

$$V_1 = \frac{11}{42} (2D^2 + d^2) \times h, \quad \text{i} \quad V_2 = 0.625 \times \ell^3 = \frac{5}{8} \ell^3. \quad (1)$$

1. Als anys cinquanta i seixanta, com alguns de vosaltres segur que recordareu, a moltes escoles de Catalunya s'estudiava amb un llibre (enciclopèdia) que contenia totes les matèries i servia per molts d'anys. De fet, en alguns temes hi havia fins i tot dues mides de lletra, de manera que quan eres més petit només llegies la lletra més gran i en una segona passada, de més gran, ho havies d'estudiar tot.

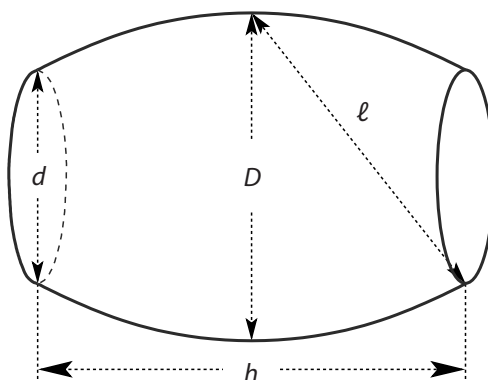


Figura 1. Mesures en una bóta de vi.

Buscant per Internet també vaig veure que en una pàgina web dedicada a la sidra ([16]) es donava la fórmula alternativa

$$V_3 = 0.82 \times D \times d \times h. \quad (2)$$

Per a un matemàtic és un problema força suggerent trobar explicacions sobre la validesa de les tres fórmules. Amb una mica de reflexió, ben aviat hom s'adona que la fórmula V_2 ha de pressuposar alguna informació addicional. No pot ser que només amb una mida ℓ ja puguem saber el volum de la bóta. De totes maneres, aquesta fórmula ja fa molt de temps que s'usa a altres llocs del món, com per exemple a Àustria (consulteu la secció 2) o a les Canàries (vegeu [7] i les seves referències, o també [1]). Per tant, ha de ser «bona», almenys en algun context. La fórmula V_3 també sembla poc natural.

L'objectiu principal d'aquest treball serà donar justificacions matemàtiques de les tres fórmules. Buscant en la literatura trobem altres treballs que han tingut una motivació similar (vegeu, per exemple, [6, 10, 15]). La fórmula V_1 es basa en el càlcul d'un volum de revolució i a aproximar π per la fracció $22/7$. De fet, en el camí d'aquesta fórmula i d'altres de ben semblants, ens trobarem Kepler, que es va interessar precisament per aquest problema, cosa que el va motivar per ser el continuador d'Arquimedes en el càlcul de volums, abans de la creació del càlcul integral (vegeu [8]). Pel que sabem, les explicacions que donarem de les altres dues fórmules són originals.

És curiós saber que, segons el diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans, un barril és una bóta petita. Més concretament es diu que una bóta és «un recipient de fusta més llarg que ample, de secció transversal aproximadament circular, major en el centre que en els extrems, les bases del qual són dues peces de fusta i la superfície lateral està formada per dogues encorbades i acoblades mantingudes unides amb cercols de fusta o ferro, que serveix per a guardar i transportar vi i altres líquids, especialment de capacitat superior a quatre cargues». D'altra banda, seguint la mateixa font, una carga de vi equival a 128 porrons, és a dir, a 121.60 litres. Per tant, la diferència entre bóta i barril és d'uns 500 litres. En aquest treball hem decidit parlar només de bótes, però tots els resultats que es donen són també aplicables als barrils.

1. Volums de revolució: fórmules exacta i aproximada

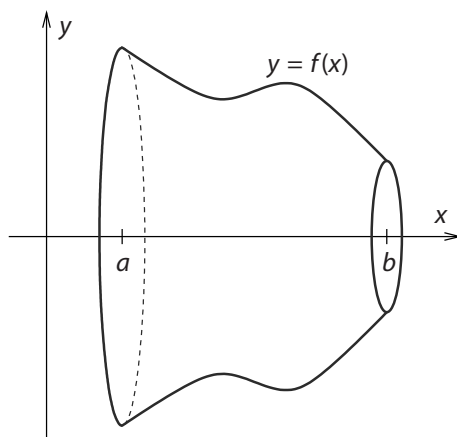


Figura 2. Un volum de revolució.

Donada una figura de revolució, respecte a l'eix OX i amb perfil $y = f(x)$, com la de la figura 2, el seu volum és donat per la fórmula

$$V_r = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (3)$$

Quan la integral de $(f(x))^2$ és molt complicada de calcular, o bé la funció en qüestió no té primitiva expressable en termes de les funcions elementals, pot ser útil usar la fórmula d'integració de Simpson per a calcular una aproximació de V_r . Aquesta fórmula s'escriu com

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right) - \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \frac{g^{(iv)}(s)}{90}, \quad (4)$$

on s és un punt desconegut de l'interval (a, b) i $g^{(iv)}$ denota la derivada quarta de g . Si no tenim en compte el darrer terme (anomenat terme d'error), obtenim una aproximació de la integral buscada.

Si apliquem aquesta fórmula aproximada al càlcul de la integral (3) arribem a

$$V_{ap} = \frac{b-a}{6} \pi \left((f(a))^2 + 4 \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^2 + (f(b))^2 \right), \quad (5)$$

o, en altres paraules,

$$V_{ap} = \frac{h}{6} (A_i + 4A_m + A_s) \quad (6)$$

on A_i , A_m i A_s són respectivament les àrees de les seccions inferior, mitjana i superior d'un volum de revolució, amb altura h . Aquesta fórmula apareix a [10, p. 24] amb el nom de *fórmula universal*. El motiu d'aquest nom és que si s'aplica per a calcular el volum d'un prisma,

un cilindre, una piràmide, un con, una piràmide truncada, un con truncat (tots rectes) o una esfera, en tots els casos dóna el resultat exacte. De fet, per a les figures de revolució anteriors, que (6) ens doni el volum exacte és una conseqüència de l'expressió de l'error a la fórmula de Simpson (4). Observeu que en aquesta fórmula l'error és zero si l'apliquem a un polinomi g de grau menor que 4, ja que $g^{(4)} = 0$. Per tant si fem girar perfils $y = f(x)$ de manera que $(f(x))^2$ sigui un polinomi de grau menor o igual que 3, el resultat obtingut usant (6) serà exacte. Aquest és el cas del cilindre, en què el grau de $(f(x))^2$ és 0, i del con, el con truncat i l'esfera, tots amb grau de $(f(x))^2$ igual a 2. Així, per exemple, el volum d'una esfera de radi r serà

$$V = V_{ap} = \frac{2r}{6} (0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

1.1. Aplicació de les bótes de vi. Una explicació de la fórmula V_1

Per tal d'aplicar les fórmules (3) i (5) posarem coordenades adjents a certs punts de la bóta. Així, els punts superiors de les dues bases i el punt de més altura seran $b^\pm = (\pm h/2, d/2)$ i $c = (0, D/2)$, respectivament (vegeu la figura 3).

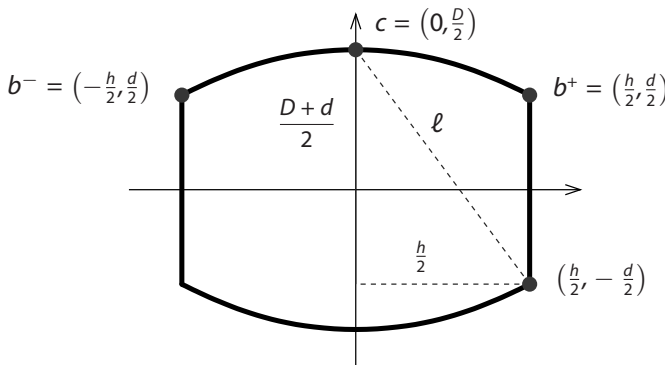


Figura 3. Coordenades en una bóta.

Ara tenim l'opció d'aplicar directament la fórmula universal (6), o bé buscar corbes senzilles que tinguin un perfil similar al d'una bóta de vi i aplicar la fórmula (3). En el primer cas, obtenim

$$V_4 = \frac{h}{6} \left(\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 + 4\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) = \frac{\pi}{12} (2D^2 + d^2) h.$$

Per a la segona opció podem considerar diverses possibilitats:

- (a) Perfil format per dos segments, els que uneixen els punts b^- i c i els punts c amb b^+ . L'equació és:

$$y = \begin{cases} (D-d)x/h + D/2 & \text{per } -h/2 \leq x \leq 0, \\ (d-D)x/h + D/2 & \text{per } 0 \leq x \leq h/2, \end{cases}$$

i en aquest cas la figura de revolució es la unió de dos cons truncats.

(b) Perfil format per un tros d'el·lipse. La seva equació és:

$$y = \sqrt{\frac{d^2 - D^2}{h^2} x^2 + \frac{D^2}{4}}.$$

(c) Perfil format per un tros de paràbola. La seva equació corresponent és:

$$y = \frac{2(d - D)}{h^2} x^2 + \frac{D}{2}.$$

(d) Perfil donat per un tros de la funció cosinus. En aquest cas l'equació és:

$$y = \frac{D}{2} \cos \left(\frac{2 \arccos(d/D)}{h} x \right).$$

També es poden prendre altres perfils. Per exemple, a [17] es considera el cas en què el perfil és un tros de circumferència.

Aplicant en cada situació la fórmula (3), arribem a diferents expressions per a obtenir el volum de la nostra bóta. Per exemple, en el cas (c) tenim:

$$\begin{aligned} V_r &= \pi \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{2(d - D)}{h^2} x^2 + \frac{D}{2} \right)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{h/2} \left(\frac{4(d - D)^2}{h^4} x^4 + \frac{2(d - D)D}{h^2} x^2 + \frac{D^2}{4} \right) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{4(d - D)^2}{5h^4} \left(\frac{h}{2} \right)^5 + \frac{2(d - D)D}{3h^2} \left(\frac{h}{2} \right)^3 + \frac{D^2}{4} \frac{h}{2} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{(d - D)^2}{40} + \frac{(d - D)D}{12} + \frac{D^2}{8} \right) h \\ &= \frac{\pi}{60} \left(3(d - D)^2 + 10(d - D)D + 15D^2 \right) h = \frac{\pi}{60} \left(8D^2 + 4Dd + 3d^2 \right) h. \end{aligned}$$

Fent uns càlculs similars, en els altres tres casos anteriors obtenim les fórmules següents:

$$(a) \quad V_5 = \frac{\pi}{12} \left(D^2 + Dd + d^2 \right) h.$$

$$(b) \quad V_6 = \frac{\pi}{12} \left(2D^2 + d^2 \right) h.$$

$$(c) \quad V_7 = \frac{\pi}{60} \left(8D^2 + 4Dd + 3d^2 \right) h.$$

$$(d) \quad V_8 = \frac{\pi D^2}{8} \left(1 + \frac{\frac{d}{D} \sqrt{1 - (d/D)^2}}{\arccos(d/D)} \right) h.$$

De fet, no caldria haver calculat V_6 fent servir (3), ja que hauríem pogut aplicar directament la fórmula de Simpson V_4 , perquè en aquest cas $(f(x))^2$ és un polinomi de grau 2. És clar que la fórmula V_5 és la pitjor de totes, ja que aproxima la bóta per dos cons truncats, que clara-

ment tenen un volum menor que el que busquem. A més, per exemple, V_6 és sempre més gran que V_7 , ja que per a $D > d$,

$$V_6 - V_7 = \frac{\pi}{30}(D - d)^2 h > 0. \quad (7)$$

Si substituïm en les fórmules que ens donen $V_4 = V_6$ el nombre π per la seva aproximació racional $22/7$, deguda a Arquímedes, obtenim que

$$V_4 = V_6 \approx \frac{11}{42}(2D^2 + d^2)h = V_1,$$

i arribem en conseqüència a una justificació matemàtica de l'expressió V_1 , tal com desitjàvem.

Volem remarcar aquí que a l'època de les enciclopèdies, en què no es disposava encara de calculadores, era habitual treballar en els càlculs concrets amb aproximacions de π com a 3.14, 3.1416 o el mateix $22/7 = 3.1428\dots$; d'aquí ve que a la fórmula V_1 es prescindeixi de π i es posi directament una aproximació seva que dóna lloc a una expressió amb nombres senzills. No podem deixar de mencionar aquí la fantàstica aproximació racional de π , $355/113$, ja coneguda des del segle v pel matemàtic xinès Tsu Ch'ung-Chih. De fet, $|\pi - 355/113| < 3 \times 10^{-7}$. Aquestes aproximacions racionals són precisament dos dels convergents del desenvolupament de π en fracció contínua:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}, \quad \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} \quad \text{i} \quad \frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + 1}},$$

(vegeu [4, p. 68]). Acabarem aquesta secció amb alguns comentaris històrics sobre les fórmules $V_4 = V_6$ i V_5 i amb mencions a altres fórmules similars. La fórmula V_5 va ser donada per Johannes Kepler (1571-1630). Com que es basa a aproximar la bóta per la unió de dos cons truncats, ja es pot considerar coneguda des de l'època dels egipcis i els babilonis ([15]). L'expressió V_6 (i en conseqüència la de V_1) és deguda al matemàtic anglès William Oughtred (1574-1660), inventor, entre d'altres coses, del regle de càlcul.

De fet, les tres fórmules V_5 , V_6 i V_7 admeten un format comú:

$$V_{i,j,k} = \frac{\pi i D^2 + j D d + k d^2}{4(i + j + k)} h, \quad (8)$$

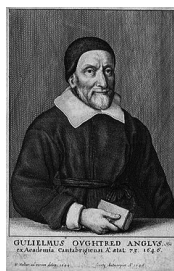


Figura 4. Johannes Kepler i William Oughtred.

amb (i, j, k) , nombres naturals. És a dir, que en totes el volum és $\pi h/4$ vegades una mitjana ponderada de D^2 , Dd i d^2 . Aquesta estructura és molt raonable, ja que en el cas particular d'una bóta cilíndrica ($D = d = 2r$), on r és el radi de la base, la fórmula anterior ens ha de proporcionar sempre el volum del cilindre:

$$V_{i,j,k}|_{D=d=2r} = \frac{\pi}{4} d^2 h = \pi r^2 h.$$

La fórmula (8) ens dóna, per exemple, la senzilla fórmula donada a [6], que usa la mitjana de D i d ,

$$V_{1,2,1} = \frac{\pi}{4} \frac{D^2 + 2Dd + d^2}{4} h = \frac{\pi}{16} (D + d)^2 h,$$

les fórmules proposades l'any 1692 per John Newton, astrònom a Cambridge ([15]),

$$V_{10,0,5} = \frac{\pi}{4} \frac{10D^2 + 5d^2}{15} h \quad \text{i} \quad V_{8,0,7} = \frac{\pi}{4} \frac{8D^2 + 7d^2}{15} h,$$

la fórmula donada en una ordre Ministeri de l'Interior francès de l'any² 1799,

$$V_{4,4,1} = \frac{\pi}{4} \frac{4D^2 + 4Dd + d^2}{9} h = \frac{\pi}{4} \left(d + \frac{2}{3}(D - d) \right)^2 h,$$

o la fórmula proposada per M. Dez, professor a l'Escola Reial Militar francesa l'any 1773 ([5]), usada per exemple en un reglament de duanes a l'illa de Cuba l'any 1847:

$$V_{25,30,9} = \frac{\pi}{4} \frac{25D^2 + 30Dd + 9d^2}{64} h = \frac{\pi}{4} \left(d + \frac{5}{8}(D - d) \right)^2 h.$$

Per a aquesta darrera fórmula es proposava també reemplaçar el valor $5/8 = 0.625$ per $2/3 \approx 0.667$ si la bóta era molt bombada (precisament la fórmula anterior), o per 0.55 , o 0.6 en cas contrari ([6]), donant lloc a les fórmules $V_{121,198,81}$ i $V_{9,12,4}$, respectivament. Altres fórmules d'aquest tipus, així com un manual sobre l'ús de regles de càlcul per a calcular volums de bótes es pot trobar a [9]. És fàcil veure que totes les fórmules de la forma

$$V = \frac{\pi}{4} \left(d + \frac{p}{q}(D - d) \right)^2 h, \quad 0 < \frac{p}{q} < 1, \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

també donen lloc a fórmules del tipus (8) amb $(i, j, k) = (p^2, 2(q - p)p, (q - p)^2)$.

L'expressió de V_8 és totalment diferent i sembla que només té interès matemàtic, vegeu [17].

2. A [17] és parla de Pluviós de l'any VII, sense cap més explicació. De fet, els anys del calendari revolucionari francès s'acostumaven a escriure amb xifres romanes, i es comptaven a partir de l'inici de l'Era Republicana, que començà el dia 22 de setembre de 1792. Així, per exemple, el numeral romà VII indica el setè any —o any 7— de la República francesa. Els mesos tenien noms relacionats amb la natura. Així, els mesos d'hivern eren Nivós, Pluviós i Ventós.

2. La boda de Kepler

L'any 1613, Kepler va decidir comprar unes quantes bótes de vi per a les celebracions de la seva segona boda. Quan va veure la manera com el venedor mesurava la quantitat de vi que contenien les bótes va quedar astorat. L'home usava la fórmula $V_2 = 0.625 \ell^3$ donada a la introducció. Immediatament Kepler va començar a pensar quina havia de ser la forma de la bóta que li sortia més a compte triar, ja que és evident que entre bótes amb la mateixa distància ℓ el volum real no sempre és el mateix. Per aclarir bé el problema va tractar el cas «ideal» de bótes cilíndriques $D = d$ amb una ℓ fixada.

En aquest cas, és clar que el volum és donat per

$$V = V(h) = \frac{\pi}{4} d^2 h = \frac{\pi}{16} (4 \ell^2 - h^2) h,$$

on hem usat que $d^2 + (h/2)^2 = \ell^2$, i que en aquest cas $D = d$ (vegeu la figura 3). Per tal d'obtenir el màxim de $V(h)$ per a una ℓ donada, resollem

$$V'(h) = \frac{\pi}{16} (4 \ell^2 - 3 h^2) = 0,$$

i obtenim $h = 2\ell/\sqrt{3}$, o equivalentment $\ell = \sqrt{3}h/2$ o $d = h/\sqrt{2}$. És fàcil veure que aquest valor de h és un màxim absolut quan $0 < h < 2\ell$, que és quan el problema té sentit. Recordeu que en el seu temps el càlcul diferencial no es coneixia i, per tant, va haver de resoldre la qüestió amb altres mitjans. La seva aproximació al problema va ser geomètrica (vegeu el teorema v de la segona part de [8]).

A la figura 5 podem veure un gravat i una fotografia on s'il·lustra el mètode d'aplicar la fórmula V_2 per a calcular volums de bótes. En castellà, aquest procediment té el nom d'«aforo diagonal». No he sabut trobar el nom català d'aquest mètode, però potser es podria anomenar «cabuda diagonal».



Figura 5. Mètode de càlcul de volums basat en l'ús de la fórmula V_2 .

Per tant, hem vist que si es compleix que $h \approx 2\ell/\sqrt{3}$, aleshores el mètode donat per a la fórmula V_2 , suposant que la fórmula ens doni realment el volum, és just, en el sentit que no hi haurà bótes amb la mateixa ℓ amb essencialment menys capacitat.

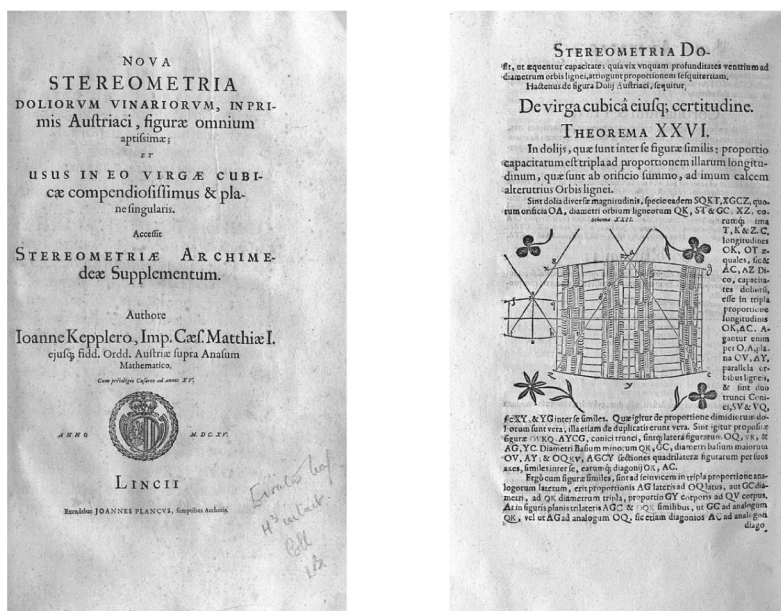


Figura 6. Portada i una pàgina del llibre de Kepler, *Nova stereometria doliorum vinariorum*.

Sembla que per a les bótes d'Àustria, que és on es casava, sí que es compleix aproximadament aquesta proporció, i això va tranquil·litzar relativament Kepler (consulteu [2, 8]). Però aquest fet no explica de cap manera la validesa de la fórmula V_2 . Per tant, segurament motivat per la seva insatisfacció, va seguir buscant fórmules millors per a calcular el volum d'un sòlid de revolució, i un parell d'anys més tard escriví el tractat *Nova stereometria doliorum vinariorum*, [8]. Aquest llibre ha estat, després de la contribució d'Arquimedes (287-212 aC), l'avançament més seriós juntament amb els de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), en els càlculs d'àrees i volums fins al desenvolupament del càlcul diferencial i integral per part de Gottfried W. Leibnitz (1646-1716) i Isaac Newton (1642-1727).

Observeu finalment que a la discussió del primer paràgraf d'aquesta secció, basada en l'estudi de Kepler, no s'han considerat en cap cas bótes no cilíndriques. A continuació farem un estudi d'optimització similar per a diverses de les fórmules que hem obtingut en la secció anterior. Aquesta qüestió, usant només la fórmula V_5 , es tracta ja a [13].

Per començar, serà útil introduir un nou paràmetre, $\rho = D/d \geq 1$, que ens mesura el bombament de la bóta, ja que $\rho = 1$ correspon al cas cilíndric. A més, observem que pel teorema de Pitàgores, $4\ell^2 = (D + d)^2 + h^2 = (\rho + 1)^2 d^2 + h^2$, on el catet vertical és $D/2 + d/2$ (vegeu la figura 3). Per tant,

$$d^2 = \frac{4\ell^2 - h^2}{(\rho + 1)^2}.$$

Aleshores les formules V_j per $j = 5, 6$ i 7 , es transformen en

$$V_j = \frac{\pi}{12} g_j(\rho)(4\ell^2 - h^2)h, \quad j = 5, 6, 7,$$