

VALORACIÓN DE OPERACIONES ACTUARIALES RELACIONADAS CON LA SUPERVIVENCIA DE GRUPOS FORMADOS POR VARIAS PERSONAS

Antonio Alegre Escolano

Departament de Matemàtica Econòmica, Financiera i Actuarial

VALORACIÓN DE OPERACIONES ACTUARIALES RELACIONADAS CON LA SUPERVIVENCIA DE GRUPOS FORMADOS POR VARIAS PERSONAS

Antonio Alegre Escolano

Departament de Matemàtica Econòmica,
Financiera i Actuarial

Índice

PRESENTACIÓN	7
Capítulo 1	
INTRODUCCIÓN	9
1.1. Hipótesis de independencia	9
1.2. Introducción a la valoración de rentas actuariales sobre dos personas	9
1.3. Conceptos de teoría de conjuntos	13
Capítulo 2	
RENTAS DE SUPERVIVENCIA SIMPLE SOBRE UN GRUPO FORMADO POR TRES PERSONAS	17
2.1. Definición del álgebra reducida de tres generadores	17
2.2. Valoración en función de los monomios	21
2.3. Valoración actuarial de un único átomo	22
2.4. Suma de dos átomos. Valoración en función de los monomios	25
2.5. Suma de tres átomos. Valoración en función de los monomios	28
2.6. Suma de cuatro átomos. Valoración en función de los monomios	33
2.7. Suma de cinco átomos. Valoración en función de los monomios	40
2.8. Valoración actuarial de la suma de seis átomos	45
2.9. Valoración actuarial de la suma de siete átomos	47
2.10. Conclusión	48
Capítulo 3	
RENTAS DE SUPERVIVENCIA COMPUESTA	49
3.1. Definición de renta de supervivencia compuesta	49
3.2. Álgebra actuarial de dos generadores	50
3.2.1. Sumas de dos átomos	51
3.2.2. Sumas de tres átomos	52
3.2.3. Valoración en función de los monomios	52
3.2.4. Valor actual actuarial de los monomios	55
3.3. Álgebra actuarial de tres generadores	57
3.3.1. Valoración en función de los monomios	60
3.3.2. Algunos ejemplos	60
Capítulo 4	
SEGUROS DE SUPERVIVENCIA COMPUESTA	63
4.1. Definición de seguro de supervivencia compuesta	63
4.2. Álgebra actuarial de dos generadores	63
4.2.1. Sumas de dos átomos	65
4.2.2. Sumas de tres átomos	65
4.2.3. Valoración en función de los monomios	66
4.3. Álgebra actuarial de tres generadores	71
4.3.1. Valoración en función de los monomios	72
4.3.2. Algunos ejemplos	72

Capítulo 5

SEGUROS DE SUPERVIVENCIA SIMPLE	75
5.1. Estructura de retículo distributivo	76
5.2. Valoración de los seguros de supervivencia simple sobre tres personas	80
5.2.1. Seguro pagadero a la disolución del grupo	80
5.2.2. Seguro pagadero a la extinción del grupo	80
5.2.3. Seguro pagadero al segundo fallecimiento	81
5.2.4. Seguro pagadero al segundo fallecimiento o al primero si es x	81
5.2.5. Seguro pagadero al segundo fallecimiento o al tercero si es x	82
5.3. Cálculo de los seguros pagaderos a la disolución de un grupo	83

Anexo 1

EJERCICIOS PROPUESTOS	87
-----------------------------	----

Anexo 2

SOLUCIONES	91
BIBLIOGRAFÍA	103

Presentación

El contenido de esta publicación trata de la valoración financiero-actuarial de operaciones relacionadas con la supervivencia de un cierto grupo de personas.

Para llevar a cabo esta tarea de una forma sistemática, se ha desarrollado la idea inicial del Dr. Rafael Velasco (1966, 1969, 1970), consistente en tratar la valoración de las operaciones actuariales relacionadas con la supervivencia de un grupo de personas, como una medida definida en una estructura de álgebra de Boole generada por los conjuntos aleatorios de supervivencia de los integrantes del grupo, tomando como medida, en cada caso, la correspondiente al tipo de operación.

Una primera aproximación de este trabajo fue publicada en Alegre, A. (2001), dentro de la Colección de Publicaciones del Departamento de Matemática Económica Financiera y Actuarial de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Barcelona.

En el trabajo, se tratan las rentas de supervivencia simple y compuesta para grupos y también los seguros de fallecimiento con más de un asegurado.

Este planteamiento estructural de las operaciones puede efectuarse mediante las álgebras de Boole, dada la dicotomía en el estado en que se encuentra una persona, cuando solo se tiene en cuenta la contingencia de fallecimiento.

Partiendo de la estructura de álgebra generada por un cierto número de subconjuntos aleatorios de $\mathfrak{R}^+$, se obtienen todos los elementos del álgebra y se procede a su medición (valoración financiero-actuarial de la operación que se da en el subconjunto de vencimientos), primero mediante una base formada por los átomos del álgebra y posteriormente por los monomios positivos, que en nuestras aplicaciones se corresponden con las operaciones más simples de valoración.

Así por ejemplo, en un álgebra completa de 3 generadores que contiene 256 elementos y que se corresponderán con otras tantas operaciones sobre un grupo formado por 3 personas, todas ellas podrán valorarse conociendo el valor de 8 de ellas, que actuarán como base de la estructura, la más sencilla es la formada por los átomos que tienen la propiedad de ser disjuntos, pero nosotros utilizaremos los monomios calculando sus componentes a partir de las componentes de la base formada por los átomos.

La actual versión de la publicación recoge la experiencia docente acumulada, los comentarios de alumnos y compañeros, todo lo cual ha servido indudablemente para mejorarla; mi agradecimiento a todos ellos.

Barcelona, julio de 2014

INTRODUCCIÓN

En este capítulo trataremos las operaciones actuariales más sencillas en las que se ven involucradas varias personas, como, por ejemplo, el caso de seguros de vida en los que las primas a pagar y las prestaciones a percibir pueden estar condicionadas al cumplimiento de ciertas condiciones acerca de la supervivencia de los componentes de una familia, o un grupo de personas.

La complejidad de estas operaciones hace necesaria la aplicación de la teoría de conjuntos y la asunción de cierta hipótesis que nos permita realizar el estudio de las mismas. Es por ello que, en esta introducción, se realizará un repaso de ciertos conceptos de la teoría de conjuntos, al mismo tiempo que se estudiarán las operaciones de rentas de supervivencia simple sobre dos personas.

1.1. Hipótesis de independencia

Al grupo formado por n personas de edades $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ lo representaremos de la siguiente forma:

$$g \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dado que ahora trabajamos con un grupo, nos interesará estudiar la supervivencia del mismo, la probabilidad de que todos sus miembros sobrevivan t periodos. Para ello asumiremos la hipótesis de que las variables aleatorias *edad de fallecimiento de la persona x_i* y *edad de fallecimiento de la x_j* son independientes $\forall i \neq j$. Esto supondrá que la función de distribución actuarial conjunta que describe la supervivencia de $g \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se obtendrá como producto de las marginales.

$${}_t p_{x_1 x_2 \dots x_n} = {}_t p_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot \dots \cdot {}_t p_{x_n}$$

Que nos da la probabilidad de que el grupo llegue vivo después de t años y, por tanto, que el grupo inicial no se ha disuelto por fallecimiento.

1.2. Introducción a la valoración de rentas actuariales sobre dos personas

Ahora centraremos nuestra atención en un grupo formado únicamente por dos personas, x_1 y x_2 . Consideremos un capital diferido unitario pagadero en caso de que ambas personas sobrevivan los próximos t periodos.



Resulta fácil valorar este capital diferido, solo hay que actualizar financieramente una unidad monetaria t periodos, y multiplicar después por la probabilidad de supervivencia conjunta, que podemos expresar en función de las marginales.

$${}_tE_{x_1 x_2} = v^t \cdot {}_t p_{x_1 x_2} = v^t \cdot {}_t p_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2}$$

En el siguiente cuadro se representan los diferentes estados en que se puede encontrar el colectivo con relación a la supervivencia de sus miembros después de n años, dada la hipótesis de independencia que hemos adoptado.

		x_2		
		Vivo	Fallecido	
x_1	Vivo	${}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2}$	${}_n p_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2}$	${}_n p_{x_1}$
	Fallecido	${}_n q_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2}$	${}_n q_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2}$	${}_n q_{x_1}$
		${}_n p_{x_2}$	${}_n q_{x_2}$	1

La primera casilla (x_1 vivo - x_2 vivo) no es más que la **probabilidad de supervivencia conjunta temporal n años**. La **disolución de un grupo** se da cuando se produce el primer fallecimiento. Así pues, la probabilidad de disolución temporal n años se obtiene sumando las casillas " x_1 vivo - x_2 fallecido", " x_1 fallecido - x_2 vivo", " x_1 fallecido - x_2 fallecido". La **extinción de un grupo** se da al producirse el último fallecimiento. Se corresponde con la casilla " x_1 fallecido - x_2 fallecido".

A continuación aplicamos las anteriores probabilidades a la valoración de rentas. Supongamos que queremos valorar una renta sobre dos personas, inmediata y anual prepagable mientras no se produzca la disolución del grupo. En este caso, utilizaremos la probabilidad de supervivencia conjunta o no disolución:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x_1 x_2} &= \sum_r^{\min\{\omega_1, \omega_2\}} {}_r E_{x_1 x_2} = \sum_r^{\min\{\omega_1, \omega_2\}} v^r \cdot {}_r p_{x_1} \cdot {}_r p_{x_2} = \\ &= \frac{1}{l_{x_1} \cdot l_{x_2}} \cdot \sum_r^{\min\{\omega_1, \omega_2\}} v^r \cdot l_{x_1+r} \cdot l_{x_2+r} \end{aligned}$$

Estudiemos ahora la renta pagadera al beneficiario de edad x_1 a partir del fallecimiento del asegurado de edad x_2 . Esta renta no puede ser nunca prepagable, pues se ha de producir la muerte de x_2 para que la renta se haga efectiva. Lógicamente, si el beneficiario de edad x_1 fallece antes que el asegurado de edad x_2 la renta no se paga. A la renta descrita la simbolizamos como:

$$\begin{aligned} a_{x_2/x_1} &= \sum_r^{\omega_1} v^r \cdot {}_r p_{x_1} \cdot {}_r q_{x_2} = \sum_r^{\omega_1} v^r \cdot {}_r p_{x_1} \cdot (1 - {}_r p_{x_2}) = \\ &= \sum_r^{\omega_1} v^r \cdot {}_r p_{x_1} - \sum_r^{\min\{\omega_1, \omega_2\}} v^r \cdot {}_r p_{x_1} \cdot {}_r p_{x_2} = a_{x_1} - a_{x_1 x_2} \end{aligned}$$

Si la renta es vitalicia, podemos expresar la renta pospagable en función de las rentas prepagables, sabiendo que:

$$a_{x_2/x_1} = a_{x_1} - a_{x_1x_2} = (\ddot{a}_{x_1} - 1) - (\ddot{a}_{x_1x_2} - 1) = \ddot{a}_{x_1} - \ddot{a}_{x_1x_2}$$

Análogamente, se deduce la valoración de la renta pagadera a x_2 a partir del fallecimiento de x_1 .

$$a_{x_1/x_2} = \ddot{a}_{x_2} - \ddot{a}_{x_1x_2}$$

Ahora consideramos la renta pagadera hasta la extinción del grupo, esto es, la renta pagadera mientras viva uno de los miembros del grupo o ambos. Para su valoración aplicamos la probabilidad complementaria a la de extinción, de forma que tendremos:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x_1x_2} &= \sum_r \min\{\omega_1, \omega_2\} v^r \cdot {}_r p_{x_1x_2} + \sum_r^{\omega_1} v^r \cdot {}_r p_{x_1} \cdot {}_r q_{x_2} + \sum_r^{\omega_2} v^r \cdot {}_r q_{x_1} \cdot {}_r p_{x_2} = \\ &= \ddot{a}_{x_1x_2} + a_{x_1/x_2} + a_{x_2/x_1} \end{aligned}$$

Lógicamente obtenemos que la renta pagadera hasta la extinción del grupo es igual a la suma de tres rentas, pagadera la primera hasta la disolución, la segunda pagadera a x_2 a partir del fallecimiento de x_1 , y la última pagadera a x_1 a partir del fallecimiento de x_2 . Si la renta es vitalicia, tendremos que:

$$\ddot{a}_{x_1x_2} = \ddot{a}_{x_1x_2} + \ddot{a}_{x_1} - \ddot{a}_{x_1x_2} + \ddot{a}_{x_2} - \ddot{a}_{x_1x_2} = \ddot{a}_{x_1} + \ddot{a}_{x_2} - \ddot{a}_{x_1x_2}$$

Ejemplo 1

Determinación del valor actual actuarial de una renta prepagable hasta la extinción de un grupo formado por dos personas, consistente en el pago anual de 2.000 € siempre que sobrevivan las dos personas, 1.500 € si solo vive x_1 , y 1.200 € si solo vive x_2 .

El valor actual actuarial de esta renta es:

$$(V\ddot{a})_{x_1x_2} = 2.000 \cdot \ddot{a}_{x_1x_2} + 1.500 \cdot \ddot{a}_{x_2/x_1} + 1.200 \cdot \ddot{a}_{x_1/x_2} = 1.500 \cdot \ddot{a}_{x_1} + 1.200 \cdot \ddot{a}_{x_2} - 700 \cdot \ddot{a}_{x_1x_2}$$

Recordemos que la renta $\ddot{a}_{x_1}$ es la pagadera en el caso de que sobreviva x_1 tanto si lo hace o no en compañía de x_2 . Por tanto, en el primer sumando del segundo término recogemos el pago de 1.500 € si sobrevive x_1 pase lo que pase con x_2 . Es por ello que los tenemos que sustraer en el último sumando, al igual que los 1.200 € pagaderos en el caso de que x_2 sobreviva (pase lo que pase con la otra persona).

En consecuencia, en el último sumando tenemos $2.000 - (1.500 + 1.200) = -700$ €.

Ahora nos ocuparemos de valorar la renta pagadera mientras sobreviva exactamente una de las dos personas de las que forma el grupo, esto es, mientras viva una o la otra pero no las dos. Resulta fácil deducir que:

$$\begin{aligned} a_{x_1x_2}^{[1]} &= a_{x_2/x_1} + a_{x_1/x_2} = \sum_r^{\omega_1} v^r \cdot {}_r p_{x_1} \cdot {}_r q_{x_2} + \sum_r^{\omega_2} v^r \cdot {}_r q_{x_1} \cdot {}_r p_{x_2} = \\ &= \sum_r^{\omega_1} v^r \cdot {}_r p_{x_1} \cdot (1 - {}_r p_{x_2}) + \sum_r^{\omega_2} v^r \cdot (1 - {}_r p_{x_1}) \cdot {}_r p_{x_2} = \\ &= a_{x_1} - a_{x_1x_2} + a_{x_2} - a_{x_1x_2} = a_{x_1} + a_{x_2} - 2 \cdot a_{x_1x_2} \end{aligned}$$

Si la renta es vitalicia, podemos expresarla en función de prepagables como:

$$\begin{aligned} a_{\overline{[1]}_{x_1 x_2}} &= a_{x_1} + a_{x_2} - 2 \cdot a_{x_1 x_2} = (\ddot{a}_{x_1} - 1) + (\ddot{a}_{x_2} - 1) - 2 \cdot (\ddot{a}_{x_1 x_2} - 1) = \\ &= \ddot{a}_{x_1} + \ddot{a}_{x_2} - 2 \cdot \ddot{a}_{x_1 x_2} = \ddot{a}_{\overline{x_1 x_2}} - \ddot{a}_{x_1 x_2} \end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que esta renta puede expresarse en función de las prepagables de supervivencia de cada una de las dos personas y la de supervivencia conjunta, así como la pagadera hasta la extinción menos la pagadera hasta la disolución. De esta manera, hemos recogido todos los casos en que sobrevive exactamente una persona.

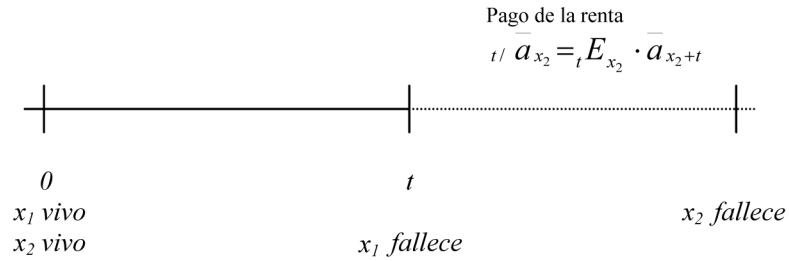
Nos ocuparemos ahora de la renta continua pagadera a x_2 a partir del instante en que se produce el fallecimiento de x_1 . La expresaremos como:

$$\bar{a}_{x_1/x_2} = \int_0^{\omega_2} v^t \cdot {}_t p_{x_2} \cdot {}_{/t} q_{x_1} \cdot dt$$

Resulta fácil deducir la siguiente relación:

$$\bar{a}_{x_1/x_2} = \bar{a}_{x_2} - \bar{a}_{x_1 x_2}$$

Esta renta es de inicio aleatorio por lo que, para su valoración, tendremos que considerar todos los posibles instantes en que puede iniciarse, tal y como indicamos en el siguiente esquema.



Por lo tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x_1/x_2} &= \int_0^{\omega_1} {}_t p_{x_1} \cdot \mu_{x_1+t} \cdot {}_{t/}\bar{a}_{x_2} \cdot dt = \\ &= \left\{ {}_{t/}\bar{a}_{x_2} = {}_t E_{x_2} \cdot \bar{a}_{x_2+t} \right\} = \int_0^{\omega_1} v^t \cdot {}_t p_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot \mu_{x_1+t} \cdot \bar{a}_{x_2+t} \cdot dt \end{aligned}$$

donde

$$\bar{a}_{x_2+t} = \int_0^{\omega_2-t} v^s \cdot {}_s p_{x_2+t} \cdot ds$$

Sustituyendo resulta:

$$\bar{a}_{x_1/x_2} = \int_0^{\omega_1} v^t \cdot {}_t p_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot \mu_{x_1+t} \cdot \left(\int_0^{\omega_2-t} v^s \cdot {}_s p_{x_2+t} \cdot ds \right) \cdot dt$$

Realizamos un cambio de variable y simplificamos:

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{x_1/x_2} &= \left\{ \begin{array}{l} s = r - t \rightarrow r = s + t \\ s = 0 \rightarrow r = t \\ s = \omega_2 - t \rightarrow r = \omega_2 \end{array} \right\} = \\
 &= \int_0^{\omega_1} v^t \cdot {}_t p_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot \mu_{x_1+t} \cdot \left(\int_t^{\omega_2} v^{r-t} \cdot {}_{r-t} p_{x_2+t} \cdot dr \right) \cdot dt = \\
 &= \int_0^{\omega_2} v^r \cdot {}_r p_{x_2} \cdot \left(\int_0^r {}_t p_{x_1} \cdot \mu_{x_1+t} \cdot dt \right) \cdot dr = \\
 &= \int_0^{\omega_2} v^r \cdot {}_r p_{x_2} \cdot {}_{/r} q_{x_1} \cdot dr
 \end{aligned}$$

De forma parecida podemos valorar la renta discreta pospagable.

$$\begin{aligned}
 a_{x_1/x_2} &= \sum_t^{\omega_1} v^t \cdot {}_{t-1/1} q_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot \ddot{a}_{x_2+t} = \\
 &= \sum_t^{\omega_1} v^t \cdot {}_{t-1/1} q_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot \left(\sum_s^{\omega_2-t} v^s \cdot {}_s p_{x_2+t} \right) = \\
 &= \sum_t^{\omega_1} v^t \cdot {}_{t-1/1} q_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot \left(\sum_r^{\omega_2} v^{r-t} \cdot {}_{r-t} p_{x_2+t} \right) = \\
 &= \sum_r^{\omega_2} v^r \cdot {}_r p_{x_2} \cdot \left(\sum_t^{r+1} {}_{t-1/1} q_{x_1} \right) = \\
 &= \sum_r^{\omega_2} v^r \cdot {}_r p_{x_2} \cdot {}_{/r} q_{x_1}
 \end{aligned}$$

1.3. Conceptos de teoría de conjuntos

En este apartado resumimos determinados conceptos recogidos en la teoría de conjuntos, fundamentales para el seguimiento de posteriores desarrollos.

Retículo

Dado un conjunto de elementos $x, y, z, \dots$, se dice que posee estructura de *retículo* si, para sus elementos, están definidas las relaciones binarias $\subset$ e $=$, y las operaciones $\cup$ y $\cap$, caracterizadas por los siguientes axiomas:

Ley reflexiva	$x \subset x$
Ley antisimétrica	$(x \subset y, y \subset x) \Leftrightarrow x = y$
Ley transitiva	$(x \subset y, y \subset z) \Rightarrow x \subset z$

Definición de $\cap$, cota inferior máxima

$$(x \subset y, x \subset z) \Leftrightarrow x \subset (y \cap z)$$

Definición de $\cup$, cota superior mínima

$$(x \subset z, y \subset z) \Leftrightarrow (x \cup y) \subset z$$

Además, podemos distinguir los siguientes tipos de retículos:

- *Retículo distributivo*, que además ha de cumplir:

$$x \cap (y \cup z) \subset (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

- *Retículo complementado*, que satisface los siguientes axiomas:

a) Existe un elemento Ω tal que cualquier elemento del retículo verifica que $x \subset \Omega$.

b) Existe un elemento $\emptyset$ tal que cualquier elemento del retículo verifica que $\emptyset \subset x$.

c) Definición de la operación de complementación C .

$$\Omega \subset x \cup x^c; \quad x \cap x^c \subset \emptyset; \quad x^c = Cx$$

Operación diferencia simétrica Δ

$$x \Delta y = (x \cap y^c) \cup (x^c \cap y)$$

Álgebra de Boole

Se llama álgebra de Boole a un retículo distributivo complementado.

σ - Álgebra de Boole

Una σ - Álgebra de Boole o álgebra de Borel es una clase o familia de elementos que contiene a $\emptyset$ y a Ω , y permanece estable para las operaciones de complementación, intersección y reunión numerables.

Medidas o valoraciones

Se llama medida $\mu(x)$, o simplemente medida μ , sobre una σ - álgebra B , a una aplicación de B en R^+ , tal que es:

a) *Aditiva*, pues si consideramos la sucesión de elementos $\{x_i\}_{i \in N}$ tales que $\forall i \neq j$, tenemos $x_i \cap x_j = \emptyset$, entonces:

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i)$$

$$b) \mu(\emptyset) = 0$$

Álgebra booleana de m generadores B_m

Dados m elementos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, tales que $x_i \neq x_j^c$, se llama álgebra booleana de orden m , que representaremos por B_m , a la constituida con dichos elementos y los $\emptyset$ y Ω mediante las operaciones de complementación, intersección y reunión finitas.

Átomos

Dada un álgebra B_m , se llaman átomos booleanos, o simplemente átomos, de orden r , a las intersecciones de r de los generadores de B_m , con la intersección de los complementarios de los $m-r$ restantes. Sus propiedades son las siguientes:

- El número de átomos distintos de orden r de un álgebra B_m es $\binom{m}{r}$.
- El número total de átomos es 2^m .
- Dos átomos distintos son disjuntos.

Monomios booleanos

Llamaremos monomio booleano, o simplemente monomio, de orden r ($0 < r \leq m$) de un álgebra B_m , a toda intersección de r generadores distintos elegidos de entre los $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, de B_m , y tomaremos como monomio de orden 0 al elemento W . Sus propiedades son:

- El número de monomios distintos de orden r de un álgebra B_m es $\binom{m}{r}$.
- El número total de monomios es 2^m .

Álgebra actuarial reducida A_m^*

En ciertas aplicaciones se da el caso de que el espacio W coincide con la unión de los generadores $\bigcup_{i=1}^m x_i$. En este caso, a la subálgebra resultante la llamamos álgebra reducida de m generadores. Sus propiedades se definen como:

El número de átomos es $2^m - 1$.

El total de funciones booleanas distintas del vacío $\emptyset$ es $2^{2^m-1} - 1$.

RENTAS DE SUPERVIVENCIA SIMPLE SOBRE UN GRUPO FORMADO POR TRES PERSONAS

En este capítulo desarrollaremos la valoración de las rentas actuariales relacionadas con un cierto suceso asociado a la supervivencia de alguno de los miembros de un grupo formado por tres personas.

$$g \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$$

Definiremos el álgebra actuarial, la medida sobre dicha álgebra y la expresión de la medida de todos los elementos en función de la medida de los monomios, que nos permitirán calcular cada una de las rentas actuariales pagaderas hasta la disolución.

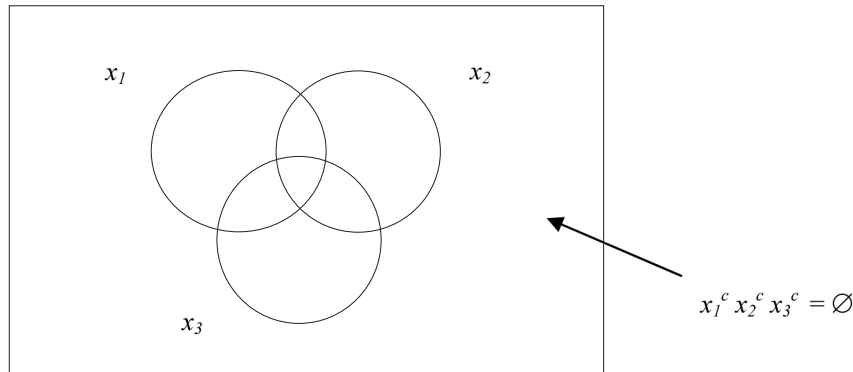
2.1. Definición del álgebra reducida de tres generadores

Las rentas de supervivencia simple sobre tres personas son aquellas rentas pagaderas mientras se cumpla cierta condición acerca de la supervivencia de los miembros del grupo, en este caso tres. Por tanto, son rentas en las que el pago se efectúa en cada momento, previa observación de si se cumple o no la condición.

Consideramos la variable aleatoria *edad de fallecimiento de la persona x* , que llamaremos ξ_x , y representaremos por x todos los instantes t tales que $\xi_x > t$, es decir, el conjunto aleatorio de instantes en los que x está vivo:

$$x = \{t \in \mathcal{R}^+ | \xi_x > t\}$$

Nuestro grupo está formado por las tres personas x_1 , x_2 y x_3 que podemos representar gráficamente mediante un **diagrama de Venn**, y donde los conjuntos son aleatorios y están formados por los instantes en los que sobreviven cada una de las tres personas.



Las ocho regiones representadas en el diagrama reflejan los diferentes estados en los que se puede encontrar el grupo en cuanto a la supervivencia de sus miembros. Tenemos

una intersección triple, tres intersecciones dobles, tres regiones en las que solo sobrevive uno de los miembros y la región en la que no sobrevive ninguna de las tres personas. Esta última es la que se corresponde con el *conjunto vacío*, y representaría la extinción del grupo. Tomaremos como universal Ω la unión de los conjuntos y, por tanto, el correspondiente a los instantes en los que como mínimo sobrevive uno de los tres integrantes del grupo.

$$\Omega = x_1 \cup x_2 \cup x_3$$

Nuestro objetivo en este apartado es el estudio de las rentas pagaderas mientras se cumpla una determinada condición acerca de la supervivencia de los tres miembros de un grupo. Lógicamente, carece de interés para nosotros considerar el conjunto que recoge los instantes en los que no sobrevive ninguna de las personas, que hemos identificado como conjunto vacío. Es por ello que, para el estudio de estas operaciones, consideraremos el álgebra reducida de tres generadores, que simbolizaremos como A_3^* . La unión de los tres generadores $x_1 \cup x_2 \cup x_3$ coincidirá con el espacio Ω , que no es más que el conjunto de instantes en los que sobrevive al menos una de las personas.

A continuación, centremos nuestra atención en los átomos que, recordemos, son los elementos más pequeños de esta álgebra reducida, y no contienen a ningún otro elemento diferente de sí mismo y del vacío. Se obtienen realizando la intersección de r de los generadores, con $1 \leq r \leq 3$, con la intersección de los complementarios de los $3 - r$ restantes. No son más que las diferentes regiones representadas en el anterior diagrama de Venn.

Por tratarse de un álgebra reducida de tres generadores, el número de átomos se calcula de la siguiente manera:

$$2^3 - 1 = 7 \text{ átomos}$$

Si los recogemos en el siguiente cuadro resultará que:

<u>Átomos</u>
$x_1 x_2 x_3$
$x_1 x_2 x_3^c$
$x_1 x_2^c x_3$
$x_1^c x_2 x_3$
$x_1 x_2^c x_3^c$
$x_1^c x_2 x_3^c$
$x_1^c x_2^c x_3$

Considerando esta álgebra reducida de tres generadores, $x_1 x_2 x_3$, y representando por β un determinado subconjunto de Ω , tenemos que dicho subconjunto solo puede expresarse de una forma como suma de ciertos átomos del álgebra. Por tanto, tenemos que,

$$\beta \in A_3^* \Rightarrow \beta = \sum_{A_i \subset \beta} A_i$$

donde los A_i son todos los átomos contenidos en el subconjunto β del universo Ω .