

HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA

Des del segle XVII fins a l'inici
de l'època contemporània

Carlos Dorce Polo

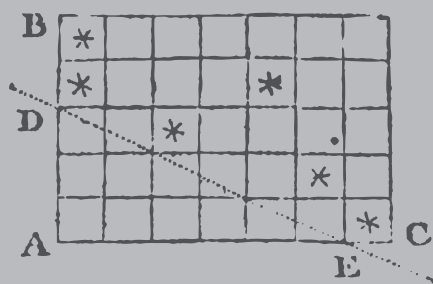
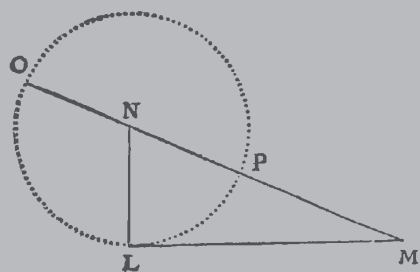
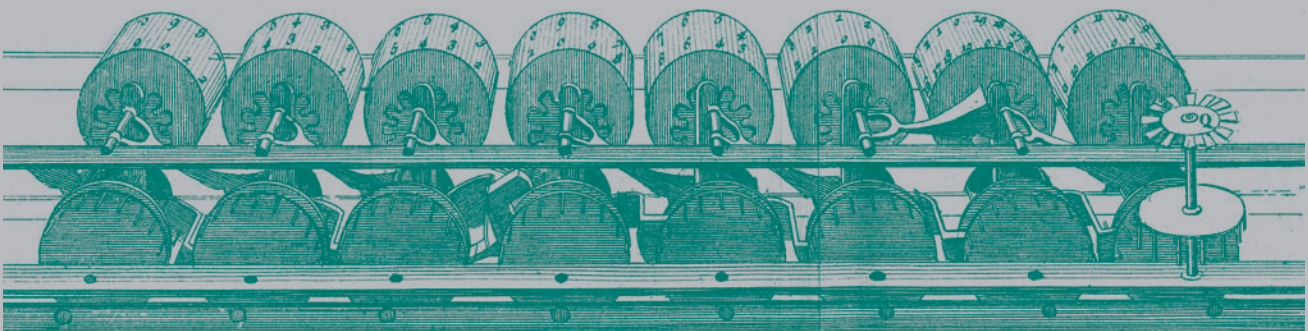


Fig. 2.



Sumari

INTRODUCCIÓ	13
DESCARTES, FERMAT, PASCAL.....	17
Introducció	17
René Descartes (1596-1650)	21
« <i>La géométrie</i> »	25
<i>El càlcul de la recta normal</i>	33
Pierre de Fermat (1601-1665).....	36
<i>El càlcul de màxims i mínims: l'«adigualtat»</i>	39
<i>El càlcul de rectes tangents</i>	42
<i>El càlcul d'àrees</i>	50
<i>La teoria de nombres</i>	52
<i>L'últim resultat de Fermat: el teorema de Fermat-Wiles</i>	57
Blaise Pascal (1623-1662)	61
<i>El teorema de Pascal</i>	66
<i>El naixement del càlcul de probabilitats</i>	68
<i>Pascal i l'anàlisi matemàtica</i>	73
Per acabar... ..	76
Lectura d'interès	77
Bibliografia essencial	79
LA RESTA DE PROTAGONISTES	81
Gilles Personne de Roberval (1602-1675)	81
<i>La quadratura de la cicloide</i>	86
Bonaventura Cavalieri (1598-1647)	91
John Wallis (1616-1703)	97
« <i>L'Arithmetica infinitorum</i> »	101

James Gregory (1638-1675)	107
Isaac Barrow (1630-1677)	110
Christiaan Huygens (1629-1695)	117
Girard Desargues (1591-1661)	124
Per acabar... ..	126
Lectura d'interès	132
Bibliografia essencial	133
 ISAAC NEWTON	 135
Els anys de joventut	135
El «De analysi per aequationes»	139
El «De methodis serierum et fluxiorum»	144
Les cartes a Oldenburg: el binomi de Newton	155
Els «Philosophiae naturalis principia mathematica»	163
La Casa de la Moneda i l'adéu d'un mite	175
Per acabar... ..	179
Lectura d'interès	181
Bibliografia essencial	183
 LEIBNIZ I LA NISSAGA BERNOULLI	 185
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)	185
<i>El triangle harmònic</i>	187
<i>El triangle diferencial</i>	191
<i>Les aportacions en matèria algebraica</i>	195
Jakob Bernoulli (1654-1705)	197
« <i>L'Ars conjectandi</i> »	200
Pierre Rémond de Montmort i Abraham De Moire	206
Johann Bernoulli (1667-1748)	213
<i>El problema de la braquistòcrona</i>	215
« <i>L'Analyse des infiniment petits</i> » (1696)	221
Daniel Bernoulli (1700-1782)	226
Tres Bernoulli més	228
Per acabar... ..	229
Lectura d'interès	232
Bibliografia essencial	234

LEONHARD EULER	237
Uns apunts biogràfics	237
L'aportació en àlgebra i aritmètica	243
<i>La contribució en teoria de nombres</i>	249
La teoria de grafs	255
L'anàlisi matemàtica i les sèries infinites	258
<i>Equacions diferencials</i>	276
<i>El càlcul de variacions</i>	283
Les aportacions en geometria	287
Els quadrats màgics	294
Per acabar... ..	299
Lectura d'interès	301
Bibliografia essencial	304
 LA REVOLUCIÓ FRANCESA	 307
Introducció	307
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	308
Nicolas de Condorcet (1743-1794)	322
Gaspard Monge (1746-1818)	325
Lazare Nicolas Carnot (1753-1823)	331
Adrien-Marie Legendre (1752-1833)	337
Pierre-Simon Laplace (1749-1827)	353
Per acabar... ..	364
Lectura d'interès	370
Bibliografia essencial	373
 LA PRIMERA MEITAT DEL SEGLE XIX	 377
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)	377
<i>El «Cours d'Analyse» de 1821</i>	380
<i>Les funcions de variable complexa</i>	386
Karl Weierstrass (1815-1897)	392
Bernhard Bolzano (1781-1848)	395
Joseph Fourier (1768-1830)	397
Niels Henrik Abel (1802-1829)	400
<i>La no-resolubilitat de la quintica</i>	404

<i>Un apunt sobre integrals el·líptiques</i>	409
Paolo Ruffini (1765-1822)	412
Évariste Galois (1811-1832)	417
<i>La teoria de Galois</i>	422
Per acabar... ..	427
Lectura d'interès	430
Bibliografia essencial	431
 CARL FRIEDRICH GAUSS	 433
Els primers anys d'un geni	433
El teorema fonamental de l'àlgebra	436
Les «Disquisitiones arithmeticae»	440
Gauss, astrònom i físic	446
La geometria no euclidiana	449
<i>János Bolyai i Nikolai Lobatxevski</i>	454
Els últims anys	461
Els quaternions de Hamilton	462
La segona meitat del segle XIX	468
Per acabar... ..	471
Lectura d'interès	481
Bibliografia essencial	483
 ÍNDEX ANALÍTIC	 485

Leonhard Euler

«Donat que la textura de l'univers és la més perfecta
i obra d'un creador molt savi, res passa en l'univers
sense seguir alguna norma de màxims o mínims.»

LEONHARD EULER

UNS APUNTS BIOGRÀFICS

Leonhard Euler va néixer el divendres 15 d'abril de 1707 en alguna de les cases que hi havia al voltant de l'església de Saint-Martin, al centre de Basilea, el mateix temple on va ser batejat dos dies després. El seu pare, Paul Euler, era pastor protestant i havia estudiat a la Universitat de Basilea, on va matricular-se quan va complir quinze anys (1685) i s'hi va estar fins al 1693, moment en què va doctorar-se en teologia. La seva tesi va ser dirigida per Jakob Bernoulli, qui el va allotjar a casa seva durant els anys en què van treballar junts i s'ha d'assenyalar que va coincidir amb el gran Johann a la residència Bernoulli. Per la seva banda, la seva mare, Margaretha Brucker, era filla d'un altre pastor protestant i provenia d'una família noble amb diversos humanistes i artistes entre els seus membres.

Euler només va viure a Basilea durant el primer any de la seva vida, ja que Paul Euler va ser nomenat pastor de l'església de la veïna localitat de Riehen i allí es va traslladar la família el mes de novembre de 1708. S'hi van instal·lar i en poc més de quatre anys van haver de reformar la casa per encabir els nous fills Anna Marie (1708), Marie Magdalena (1711), Johann Heinrich (1719) i l'àvia paterna, que va morir el 1712. Euler va rebre la seva primera formació gràcies als seus pares. Mentre Margaretha li ensenyava els textos clàssics, el llatí i el grec, Paul va introduir-lo en les matemàtiques a través dels llibres



Retrat d'Euler pintat
per J. E. Handman en 1753

d'àlgebra de Christoph Rudolff (Jawor, 1499-Viena, 1543) i Michael Stifel (Esslingen, 1487-Jena, 19 d'abril de 1567). Per ell mateix sabem que va ser capaç de resoldre els 434 problemes sobre equacions de primer i segon grau del *Die Coss* de Rudolff i ho va fer abans de 1715. Abans de complir els deu anys, va ingressar al *Gymnasium* de Basilea, on el seu pare va contractar el teòleg Johann Burckhardt perquè li fes de tutor. Burckhardt era amic de Johann Bernoulli i va seguir ensenyant matemàtiques al jove Euler.

A tretze anys, la Facultat de Filosofia de la Universitat de Basilea li va obrir les portes i, malgrat que va decidir saltar-se les classes introductòries a les matemàtiques de Johann Bernoulli, el 1721 va impartir una lectura sobre geometria titulada *Declamatio: De Aritmetica et Geometria*. El 1722 va obtenir el títol de batxiller, havent demostrat una memòria prodigiosa en totes les matèries, i el 1723 el títol de Mestre en Arts. El mes d'octubre, Euler va seguir els desitjos del seu pare i va començar a preparar-se per a la carrera de pastor protestant, estudiant teologia, grec, hebreu i humanitats. Tot i així, va poder continuar els estudis de matemàtiques i va aconseguir que Johann Bernoulli el tutoritzés. És probable que els grans progressos que va anar aconseguint es deguessin a aquest fet i a les classes particulars que Johann Bernoulli li va impartir. El talent mostrat pel jove Euler va fer que Johann es desplaçés fins a Riehen per demanar a Paul que permetés al seu fill dedicar-se exclusivament a les matemàtiques.

El 1725, Euler ja tenia una formació matemàtica prou bona per pensar a buscar feina. Els germans Nicolaus i Daniel Bernoulli havien acceptat treballar a Sant Petersburg i la precipitada mort de Nicolaus, el 1726, li va obrir la porta de la prestigiosa acadèmia russa. Tanmateix Euler va esperar a Basilea aspirant a ocupar la vacant de física de la universitat. Mentrestant, el 1727 va presentar-se al premi anual de l'Acadèmia Reial de Ciències amb un treball sobre la col·locació dels pals en un vaixell i... va guanyar una menció d'honor. Aquest premi el va fer mereixedor d'una certa reputació, i més si es té en compte que mai no havia vist el mar i tampoc cap gran vaixell.

Finalment, el 5 d'abril d'aquell any, Euler va abandonar Basilea i va començar el seu camí cap a Sant Petersburg. Allà va ser destinat a la secció de matemàtiques gràcies a la influència de Daniel Bernoulli i Christian Goldbach (Königsberg, 18 de març de 1690-Moscú, 1 de desembre de 1764). Malauradament, no va arribar a Rússia en el seu millor moment, ja que l'emperadriu Caterina I, gran impulsora de l'Acadèmia, havia mort dues setmanes abans i el nou Govern veia aquesta institució com un centre aglutinador d'influència estrangera dins de l'Imperi. En aquest període d'incertesa política, l'Acadèmia va deixar de ser subvencionada per l'Estat i fins a l'arribada al tron d'Anna Ivà-

novna el 1730, Euler va acceptar una plaça com a metge de l'exèrcit rus. Amb la restitució de l'Acadèmia, Daniel Bernoulli va succeir Jakob Hermann com a professor de matemàtiques i Euler va aconseguir la plaça de professor de física. Ell i Daniel van arribar a viure junts a casa de Bernoulli i, quan aquest se'n va tornar a Basilea, Euler el va succeir a la plaça de matemàtiques.

Set anys després de la seva arribada a Rússia, Euler va casar-se amb Katharina Gsell i el matrimoni va traslladar-se a una casa de fusta a l'illa Vasilyevski. Van tenir tretze fills, dels quals només van sobreviure tres nens i dues nenes. Aquest inici de la dècada dels trenta també va ser força important en la seva carrera científica. Entre moltes altres matèries, Euler va començar a escriure les bases de la seva futura *Introductio in analysin infinitorum* (*Introducció a l'anàlisi infinita*), que va publicar el 1748. El nombre *e*, l'estudi dels logaritmes, les funcions, les sèries infinites, la trigonometria... van passar a ser el seu estudi habitual i va començar a fer importants aportacions en tots els camps de totes les àrees matemàtiques. Fins i tot, davant d'un problema recreatiu que se li va plantejar el 1736, Euler va ser capaç d'iniciar el que ara es coneix com a teoria de grafs. No obstant això, la fama absoluta va arribar-li el mes de desembre de 1734, moment en el qual va ser capaç de donar resposta a un dels problemes oberts més importants de l'època:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

En 1736 va publicar els seus *Comentarii* (*Comentaris*), obra que va ampliar amb els dos volums de la seva *Mechanica* en 1738. Definitivament, Euler estava obrint-se pas en el camí de la fama: tots els físics i matemàtics d'arreu d'Europa es van treure el barret davant de l'ús que va fer de les equacions diferencials per resoldre els problemes de física. Fins i tot Johann Bernoulli va escriure en les *Mémoires de Trevoux*, publicades a París el 1740, que Euler havia creat la mecànica moderna, en aconseguir resoldre computacionalment els moviments dels cossos rígids fluids, elàstics i flexibles. Va escriure també sobre música i sobre ciència naval: la seva *Tentamen novae theoriae musicae* (*Introducció a la nova teoria musical*), escrita el 1731, va ser publicada el 1739, i la *Scientia navalis* (*Ciència naval*), que va acabar el 1738, no es va publicar fins al 1749, un cop Euler ja treballava a Berlín. També va col·laborar en la construcció de màquines hidràuliques, va participar en la comissió de mesures i pesos, va col·laborar en l'expedició russa a Kamtxatka (1734-1743), va participar en l'elaboració del primer mapa general de Rússia i va ser membre del comitè avaluador del Gymnazium, entre altres assumptes i treballs. El 1735, va ocupar

també la direcció de la secció de geografia de l'Acadèmia i va treballar juntament amb l'astrònom Joseph-Nicolas Delisle (París, 4 d'abril de 1688-París, 11 de setembre de 1768) en el càlcul d'efemèrides planetàries.

Queda clar, doncs, el talent d'Euler en totes les àrees científiques del moment. Però si encara no en teníem prou, va aconseguir també que tots els matemàtics i físics europeus comencessin a lloar la seva persona després de guanyar en 1738, 1739 i 1740 el premi de l'Acadèmia Reial de Ciències, amb temes tan diversos com les marees o la naturalesa del foc. Així, doncs, la dècada 1730-1740 va ser força prolífica per al genial Euler, malgrat la mort de tres de les seves filles i alguns problemes de salut destacables com la infecció i la febre de l'estiu de 1738, que li va produir un abscess a l'ull dret. A partir d'aquella malaltia, va perdre part de la visió en l'ull afectat i va començar a perdre-la també en l'esquerre.

La dècada de 1740 va començar amb el naixement del seu segon fill, Karl Johann, el mes de juliol (Johann Albrecht, el seu primer fill, havia nascut el novembre de 1734) i la multiplicació de la feina que tenia assignada. Amb la vista absolutament minvada, Delisle va unir-se a la segona expedició russa a Kamtxatka i això va significar-li haver de fer-se càrrec de tots els seus projectes. En el terreny polític, la mort de l'emperadriu el 1740 va tornar la inestabilitat a Rússia i Euler va tornar a sentir-se com un estranger, rebutjat pel nou Govern. Afortunadament, l'emperador Frederic II, des de Berlín, volia regenerar la nova Acadèmia Reial de Brandenburg, dirigida aleshores per Abraham Wolff (Frankfurt, 1710-Berlín, 4 de novembre de 1795) i Pierre Louis Moreau de Maupertuis (Saint-Jouan-des-Guérets, 28 de setembre de 1698-Basilea, 27 de juliol de 1759), i va decidir que Euler podia ser una de les seves grans figures. Després de regatejar el salari (1.600 Reichsthaler anuals), Euler va aconseguir que se li igualés la retribució que tenia a Sant Petersburg, ciutat que va abandonar el mes de juny de 1741 per traslladar-se a Berlín.

Els Euler van arribar a la capital el 25 de juliol i van traslladar-se a una casa propera a la cèntrica Unter den Linden berlinesa. En aquells moments, Frederic II estava embarcat en la Guerra de Silèsia i Euler va haver de viure a crèdit fins a la tornada de l'emperador a finals d'any. A mitjan 1743 van traslladar-se al número 21 de la Behrenstrasse, on es van estar durant vint-i-tres anys. Allà van néixer els seus fills Katharina Helene (1741), Christoph (1743) i Charlotte (1743), i també dos fills més (1747 i 1750) i dues bessones (1749), cap dels quals no va arribar a complir l'any. Sembla que Euler va ser un bon pare i que es dedicava a jugar amb els seus fills, portar-los al zoo i llegir-los contes i relats abans de dormir. En el terreny personal, va començar a fumar en pipa, a compondre música i a jugar a escacs.

De seguida, Euler va veure la necessitat de fundar una nova Acadèmia que reemplaçés la de Brandenburg i, malgrat que l'emperador no volia ni sentir-ne a parlar, un dels seus favorits, el comte Samuel von Schmettau, va fundar la Nouvelle Société Littéraire el 1743 com a base d'aquesta futura nova Acadèmia. Euler va començar a anar a les seves sessions, però va refusar ser el director de la secció matemàtica fins que aquesta institució i la de Brandenburg van fusionar-se en el que era el desig inicial. La cerimònia d'unió va tenir lloc el mes de gener de 1744, coincidint amb l'aniversari de l'emperador. L'Acadèmia de Berlín va iniciar-se amb quatre seccions sobre filologia, filosofia especulativa, física (anomenada filosofia experimental) i matemàtiques, i Frederic va posar-hi al capdavant quatre directors escollits, dins de la noblesa, de la seva confiança. Conseqüentment, Euler no va ser l'escollit per dirigir la branca matemàtica i se li va encomanar la traducció del *The New Principles of Gunnery* (*Nous principes d'artilleria*) de Benjamin Robins (Bath, 1707-Madràs, 20 de juliol de 1751).

Tanmateix, el 1746, Frederic II va nomenar Maupertuis director de l'Acadèmia de per vida per tal que la convertís en quelcom semblant al que era l'Acadèmia Reial de Ciències de París i els seus membres van escollir Euler com a director de les classes de matemàtiques també de per vida. A més a més, Euler va ser nomenat president del comitè atorgador del nou premi anual de l'Acadèmia creat el mateix any 1746, que va ser guanyat per Jean-Baptiste le Rond D'Alembert (París, 16 de novembre de 1717-París, 29 d'octubre de 1783) per un treball amb equacions diferencials sobre el moviment del vent. També com a part de la seva feina, li va ser encomanada la tasca de supervisar les obres del nou observatori, dirigir el comitè editorial i substituir Maupertuis en els períodes en què la seva pobra salut l'obligava a estar absent del seu càrrec.

En 1746, l'Acadèmia de Sant Petersburg li va oferir la possibilitat de tornar a la ciutat russa i a la mort de Johann Bernoulli, el 1748, la Universitat de Basilea li va oferir la Càtedra de Matemàtiques. Euler va refusar ambdues ofertes per continuar a Berlín, des d'on va aconseguir ser nomenat *fellow* de la Royal Society de Londres el 1747. Fins al 1766, Euler va escriure poc menys de quatre-cents treballs i va aconseguir que Frederic II, malgrat la seva desconfiança inicial, li fes un lloc entre les persones que mereixien l'honor de conversar amb ell. De fet, en una carta a Voltaire, va reconèixer que «tenim aquí el gran Ciclop de la geometria» i que era un «calculador molt potent [...] molt important per a la república de les ciències».

Euler va iniciar els seus estudis en magnetisme i electricitat i va seguir amb l'òptica, l'artilleria, la mecànica, l'astronomia... i les matemàtiques com a base de la seva recerca. A més a més, el 1743 va publicar el *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (*Mètode per trobar corbes*

que tenen algunes propietats de màxims i mínims), acabat a Sant Petersburg dos anys abans i que representa l'inici del càlcul de variacions.

Euler va assumir la presidència de l'Acadèmia de Berlín després de la mort de Maupertuis el 1759. Per fi tenia el que volia, malgrat que sempre va haver d'aguantar les interferències de Frederic II, que fins i tot va arribar a oferir la presidència a D'Alembert el 1763. En aquests anys, Euler va assumir la tutoria de la jove princesa Frederica Carlota von Brandenburg-Schwedt, neboda de l'emperador, a qui va escriure més de 230 cartes a principi de la dècada de 1760. Tota aquesta correspondència va publicar-se després a Sant Petersburg en les *Lettres à une princesse d'Allemagne* (*Cartes a una princesa d'Alemanya*) en tres volums (el primer i el segon el 1768 i el tercer el 1772). En aquestes cartes, Euler li explicava de manera molt didàctica diversos temes filosòfics, físics i matemàtics i els tres llibres van ser molt ben acollits pel públic en general i van arribar a ser el que avui dia considerem un *best-seller*, tant als Estats Units com a Europa.

La situació entre Euler i Frederic II va anar-se complicant cada cop més i, el 1766, l'emperador començava a veure el suís com un problema dins de la seva cort. Lluny d'assemblar-se a Voltaire, Euler era un home poc sofisticat i que no compensava amb la seva genialitat la imatge que es volia donar a l'Acadèmia. Finalment, i després de diversos estira-i-arrotonsa, Euler va abandonar Berlín el 9 de juny de 1766, i, després de passar deu dies a Varsòvia, va traslladar-se definitivament a Sant Petersburg, on va arribar el 28 de juliol. Els Euler van instal·lar-se en una casa propera a l'Acadèmia i tant Johann Albrecht com Christoph van aconseguir fer carrera en el seu nou país. El primer va ser nomenat catedràtic de Física a l'Acadèmia i secretari permanent tres anys més tard, mentre que el segon va fer carrera militar en l'artilleria russa. A més a més, ambdós nois, juntament amb diversos col·laboradors dels quals es van rodejar, van assistir-lo en el moment en què es va anar quedant gairebé cec. Afortunadament, la seva prodigiosa memòria fotogràfica va fer que la seva producció científica no se'n veiés gaire ressentida, ja que es dedicava a anar dictant als seus deixebles tots els seus pensaments. D'aquesta manera, Euler va dictar a un jove col·laborador el text de la seva *Vollständige Anleitung zur Algebra* (*Guia completa d'àlgebra*), publicada a Sant Petersburg el 1770 en alemany després de ser traduïda de l'edició russa de dos volums, de 1768 i 1769, respectivament.

Aquesta segona etapa a Rússia pot ser equiparable a l'etapa a Berlín, ja que Euler no deixava de dictar i discutir amb els seus secretaris. Per exemple, el 1776 va redactar més de mil pàgines sobre diversos temes i va publicar, entre d'altres, la *Theoria motuum lunae, nova methodo pertractata* (*Nou mètode per al tractament del moviment de la Lluna*) el 1772; tres volums d'una *Dioptrica*

els anys 1769, 1770 i 1771, respectivament; l'*Institutiones calculi integralis* (*Institució del càlcul integral*) també en tres volums els anys 1768, 1769 i 1770, respectivament; una edició abreujada de la *Scientia navalis* que va tenir molt d'èxit i que va ser traduïda de seguida a l'anglès, l'italià i el rus i per la qual va rebre grans quantitats de diners, *Éclaircissemens sur les établissemens publics* (*Aclariments sobre les institucions públiques*) el 1776... Euler i Johann Albrecht van continuar a l'Acadèmia fins que les diferències d'opinió amb el seu director van fer que renunciessin als seus càrrecs el 1774. Tres anys abans, un incendi a Sant Petersburg li havia destruït la casa i tots els seus escrits i va ser un dels seus secretaris qui el va ajudar a salvar la vida. Ni això ni la mort de la seva dona, el 1773, li van fer disminuir la seva tasca científica i va seguir dictant els seus pensaments i reescriuint totes les obres cremades.

El 1776, Euler va tornar-se a casar amb una germanastra de la seva primera dona i, a partir dels setanta anys, va començar a enfilar el final de la seva vida. Rodejat de la seva família, donant classes als seus néts i seguint formulant teories sobre diverses matèries científiques, el 18 de setembre de 1783 una hemorràgia cerebral va acabar amb la seva vida. El cos d'Euler està enterrat al cementiri del Laura Alexander Nevsky, un important monestir ortodox fundat per Pere el Gran de Rússia a Sant Petersburg el 1710. Sense cap mena de dubte, si un té la sort de poder visitar aquesta magnífica ciutat no ha de deixar d'acostar-se a la tomba del matemàtic més prolífic que ha donat la història. Segur que Txaikovski i Dostoievski estan encantats de compartir espai al costat d'aquesta figura tan important dins del món de la ciència.

L'APORTACIÓ EN ÀLGEBRA I ARITMÈTICA

Ja hem vist al primer capítol que, a la tercera part de la *Géométrie*, Descartes havia imaginat com un polinomi de grau n podia tenir «tantes arrels com el grau del polinomi», encara que aquestes fossin imaginàries. Però Descartes no va ser el primer a intuir-ho, ja que sembla que Peter Rothe ja va publicar-ho en la seva *Arithmetica Philosophica* (1609). Del principi del segle XVII també és la formulació del teorema fonamental de l'àlgebra que trobem en l'*Invention nouvelle en l'Algebre* (*Nova invenció en l'àlgebra*) que Albert Girard (Saint-Mihiel, 1595-Leiden, 8 de desembre de 1632) va publicar el 1629. Aquesta obra està basada en l'*Arithmétique* (1585) de Simon Stevin, que contenia la resolució de les equacions cúbiques i quàrtiques, malgrat que és força més curta i que conté força resultats nous com la consideració seriosa de les arrels complexes de les equacions polinòmiques.

Tant Rothe com Girard i Descartes van limitar-se a formular el teorema i, arribats al segle XVIII, encara estava pendent trobar-hi la demostració. El primer intent de provar-lo va ser a càrrec de D'Alembert en les seves *Reserches sur le calcul intégral* (*Recerques sobre el càlcul integral*) de 1746, malgrat que el seu procediment té diverses llacunes i no es pot considerar complet. Als mateixos anys, Euler també va començar la cerca d'una demostració del teorema probablement influït pels càlculs que havien fet Leibniz i Johann Bernoulli sobre el tema. En les *Reserches sur les racines imaginaires des équations* (*Recerca sobre les arrels imaginàries de les equacions*) de 1749, Euler va demostrar que, si $a + b\sqrt{-1}$ és l'arrel d'un polinomi qualsevol, $a - b\sqrt{-1}$ també ho és, i, per tant, el polinomi ha de tenir un divisor de la forma $x^2 + px + q$. Aleshores, Euler descompon tota equació quàrtica en producte de dues quadràtiques. En primer lloc, converteix l'expressió general de la quàrtica en una de la forma $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$, mitjançant els canvis de variable habituals i l'iguala al producte dels dos factors:

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha) \cdot (x^2 - ux + \beta) = 0,$$

de la qual obté, $C = (\beta - \alpha) u$ i $D = \alpha\beta$. Per tant:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= B + u^2 \quad \text{i} \quad \beta - \alpha = \frac{C}{u} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 2\alpha &= u^2 + B - \frac{C}{u} \quad \text{i} \quad 2\beta = u^2 + B + \frac{C}{u}. \end{aligned}$$

Però, com que $4\alpha\beta = 4D$, multiplicant obté la nova equació de sisè grau:

$$u^4 + 2Bu^2 + B^2 - \frac{C^2}{u^2} = 4D \quad \Rightarrow \quad u^6 + 2Bu^4 + (B^2 - 4D)u^2 - C^2 = 0,$$

de la qual es pot trobar la seva solució u . En un resultat previ, Euler havia demostrat que un polinomi de grau parell amb terme independent negatiu sempre té dues arrels reals, una de positiva i una de negativa. Per tant, hi ha dos possibles valors reals per a u , a partir dels quals podran ser trobades α i β . O sigui, que tota quàrtica pot ser descomposta en un producte de dos factors quadràtics.

Seguidament, Euler demostra que tot polinomi de vuitè grau amb coeficients reals pot descompondre's en un producte de dos factors quàrtics, i, en diversos corol·laris, descompon en factors lineals i quadràtics els polinomis de graus 5, 6, 7 i 9. Aleshores, generalitza el seu raonament:

Tota equació el grau de la qual és [una potència de 2] com 2^n amb $n > 1$, pot ser resolta en dos factors de grau 2^{n-1} .

[...] Així, tenim aquí una demostració completa de la proposició que és habitualment pressuposada en l'anàlisi, especialment en el càlcul integral i que diu que tota funció de variable x com:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.},$$

pot ser sempre resolta en factors reals, tant simples de la forma $x + p$ com dobles de la forma $x^2 + px + q$.

La demostració del cas general és molt superficial i això va fer que Lagrange la criticqués el 1772. En la descomposició

$$\begin{aligned} & x^{2m} + Ax^{2m-2} + Bx^{2m-3} + \dots = \\ &= (x^m + tx^{m-1} + gx^{m-2} + \dots) \cdot (x^m - tx^{m-1} + hx^{m-2} + \dots), \end{aligned}$$

Euler havia determinat que els coeficients $t, g, h \dots$ havien de ser funcions racionals dels $A, B \dots$ tal com havia passat en el cas $m = 2$. Aleshores, què passava si s'obtenia $\frac{0}{0}$? Lagrange va aportar la seva pròpia demostració del teorema i també va fer-ho Pierre-Simon Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 de març de 1749-París, 5 de març de 1827), però tant l'un com l'altre van caure en el mateix parany en què havia caigut Euler: pressuposar que l'equació polinòmica de grau n tenia n solucions. Així, l'honor de donar la primera prova satisfactòria del teorema fonamental de l'àlgebra va ser per a Gauss, que en la seva tesi doctoral de 1799 va posar punt final al tema.

Euler també va escriure uns *Elements d'àlgebra* que van ser publicats en alemany el 1770 i que van ser traduïts a diversos idiomes com el francès i l'anglès. Aquest tractat pot considerar-se una de les primeres obres de l'àlgebra moderna i comença amb una discussió sobre la naturalesa dels nombres, com se sumen, resten, multipliquen i divideixen, com s'expressen les diferents operacions en llenguatge algebraic, la classificació en nombres primers i compostos, parells i senars... També fa una explicació de les fraccions i de les seves propietats i operacions elementals i, quan comença a parlar de les arrels quadrades, llegim:

[...] L'arrel quadrada d'un nombre negatiu no és ni positiva ni negativa, ja que els quadrats dels nombres negatius porten també el signe +: consegüentment, l'arrel en qüestió ha de pertànyer a una espècie de nombres completament diferent, ja que no pot ser classificada ni entre els nombres positius ni entre els negatius.

[...] Totes les expressions com $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ etc. són consegüentment impossibles, o nombres imaginaris, ja que representen les arrels dels nombres negatius.

El llibre continua amb l'explicació de les potències d'exponent enter i del càlcul de logaritmes, temes que tanquen la secció I de la primera part.

La seccions II i III tracten, respectivament, sobre «els diferents mètodes de calcular quantitats compostes» i «les raons i les proporcions» i són un autèntic tractat sobre llenguatge algebraic, ja que explica com operar amb expressions algebraiques i no s'atura davant de l'aparició de sèries infinites en dividir-les o calcular-ne l'arrel quadrada (igual que va fer Newton). Apareix també el desenvolupament del binomi de Newton, les progressions aritmètiques i geomètriques i la seva suma, els nombres figurats, el càlcul del màxim comú divisor, les regles de tres simples i compostes, l'equivalència entre fraccions i nombres decimals i el càlcul de l'interès.

L'última de les seccions d'aquesta part està dedicada a les «equacions algebraiques i la resolució d'aquestes equacions». Euler comença resolent problemes i equacions de primer grau, sistemes lineals i equacions quadràtiques. Per a les equacions cúbiques, observa que:

$$\begin{aligned}(x-p)(x-q)(x-r) &= x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+pr+qr)x - pqr = \\ &= x^3 + ax^2 + bx + c,\end{aligned}$$

a partir de la qual intenta donar condicions per a les solucions p , q i r en casos concrets. Explica també la «regla de Cardano o de Scipione del Ferro» i, ja en el capítol XIII, «sobre la resolució d'equacions de quart grau», Euler exposa la seva separació en termes quadràtics, la regla de Ferrari i un mètode «nou» de resolució dels que s'havien donat fins aleshores. Euler suposa que l'equació $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$ té solució $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, on p , q i r han de ser determinades en termes dels coeficients a , b i c . Comença elevant al quadrat:

$$x^2 - (p+q+r) = 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}).$$

Elevant novament al quadrat:

$$\begin{aligned}x^4 - 2(p+q+r)x^2 + (p+q+r)^2 &= \\ &= 4(pq+pr+qr) + 8(\sqrt{p^2qr} + \sqrt{pq^2r} + \sqrt{pqr^2}) = \\ &= 4(pq+pr+qr) + 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}) = \\ &= 4(pq+pr+qr) + 8\sqrt{pqr}x.\end{aligned}$$

Aleshores, Euler introdueix tres variables auxiliars: $f = p + q + r$, $g = pq + pr + qr$ i $h = pqr$. Per tant, l'equació anterior pot ser expressada com:

$$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h}x - (4g - f^2) = 0.$$

Ara, comparant aquesta última equació amb l'original amb coeficients a , b i c , Euler obté:

$$2f = a \Rightarrow f = \frac{a}{2},$$

$$8\sqrt{h} = b \Rightarrow h = \frac{b^2}{64},$$

$$4g - f^2 = c \Rightarrow g = \frac{4c + a^2}{16}.$$

Com que p , q i z són les arrels de l'equació $(z - p)(z - q)(z - r) = z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, usant la regla de Cardano, Euler troba p , q i r , i, a partir d'elles, troba la solució $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ inicial. Per exemple, Euler resol $y^4 - 8y^3 + 14y^2 + 4y - 8 = 0$, a la qual, fent-li el canvi $y = x + 2$, obté $x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$. Per tant, $f = \frac{1}{2}a = 5$, $g = \frac{1}{16}(4c + a^2) = \frac{17}{4}$ i $h = \frac{1}{64}b^2 = \frac{1}{4}$. Consegüentment, p , q i r són les solucions de la cúbica $z^3 - 5z^2 + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, que esdevé $u^3 - 10u^2 + 17u - 2 = 0$, fent el canvi $u = 2z$. Euler veu que $u = 2$ és una solució evident, i, fent la divisió i resolent l'equació quadràtica, obté $u = 2$, $u = 4 + \sqrt{15}$ i $u = 4 - \sqrt{15}$. Com que $u = 2z$, les solucions de la cúbica són:

$$p = 1, \quad q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2} \quad \text{i} \quad r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}.$$

Per tant:

$$\sqrt{p} = \pm 1, \quad \sqrt{q} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \quad \text{i} \quad \sqrt{r} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}.$$

Euler ja tenia la solució, però encara es podia millorar i així ho va fer! En adonar-se que $8 + 2\sqrt{15} = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ i que $8 - 2\sqrt{15} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$, va obtenir:

$$\sqrt{p} = \pm 1, \quad \sqrt{q} = \pm \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad \sqrt{r} = \pm \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}.$$

Com que $b = 4 > 0 \Rightarrow 8\sqrt{b} > 0 \Rightarrow \sqrt{b} = \sqrt{pqr} = \sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r} > 0$, els signes de les tres solucions han de ser agafats de tal manera que compleixin la condició que el seu producte sigui positiu. Per tant:

$$x_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5},$$

$$x_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5},$$

$$x_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3},$$

$$x_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Refent el canvi de variable $y = x + 2$, les solucions de l'equació original són iguals a $y = 3 \pm \sqrt{5}$ i $y = 1 \pm \sqrt{3}$.

Al capítol següent, Euler proposa el càlcul de solucions aproximades d'equacions. Explica el mètode exposat per Newton en el *De analysi* i en el *De methodis* i un altre ideat per Daniel Bernoulli consistent a trobar una sèrie de nombres $p, q, r, s, t, \dots$ tals que cadascun dels seus termes dividit per l'anterior s'acosti a la solució de l'equació. Per exemple, per resoldre $x^2 = x + 1$, suposa que ha trobat la sèrie i que

$$x = \frac{q}{p} = \frac{r}{q} \Rightarrow x^2 = \frac{r}{p}.$$

Per tant, s'obté la nova equació:

$$\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1 \Rightarrow q + p = r.$$

De la mateixa manera, $r + q = s$, $s + r = t, \dots$ Consegüentment, cada terme és la suma dels dos anteriors, i, escollint els dos primers termes «com es vulgui», s'obté la sèrie desitjada. Per exemple, fent 0 i 1, la sèrie serà 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8... i la solució x de l'equació inicial s'aproximarà per la sèrie de quocients:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34} \dots$$