

33

nou**biaix**

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Octubre 2013



Consell de Redacció:
Manel Sol / Josep Pla i Carrera (coordinadors)
Marianna Bosch
Juanjo Cárdenas
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Romà Pujol
Josep Lluís Solé
Manuel Udina

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Pau Gargallo, 5
08028 Barcelona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat
noubiaix@gmail.com
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral
Preu d'exemplar ordinari: 12 €
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
© Markus Mainka
Fotolia.com

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Publicacions i Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
Fax: 934 035 531
comercial.edicions@ub.edu
www.publicacions.ub.edu

sumari

3 Editorial

articles

6 El concepte de límit de Newton a Cauchy: entre la geometria i l'àlgebra i el paper dels signes [Segona part]
Gert Schubring

22 El joc del 1089 en l'ensenyament dels nombres decimals i la introducció del llenguatge algebràic
Carles Dorce

36 Diàleg entre iguals a l'aula. Eina per a la construcció del coneixement matemàtic
Xavier Vilella Miró

49 Sobre el sentit de les matemàtiques a l'educació infantil
Àngel Alsina

63 Una aproximació etimològica 5: Elements de geometria plana (II)
Jaume Solsona Villaplana

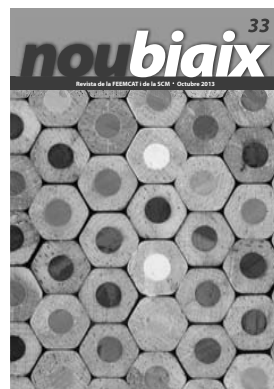
seccions

68 Per pensar d'un minut a una hora
Jordi Deulofeu

72 Sabies que... El plegat de tovallons és un art molt geomètric?
Claudi Alsina

75 Cròniques

85 El racó del *creamat*



El concepte de límit de Newton a Cauchy: entre la geometria i l'àlgebra i el paper dels signes [Segona part]

Gert Schubring

Resum

Aquesta segona part de l'article fa èmfasi en els autors que, d'alguna manera o altra, han adoptat un llenguatge més simbòlic en el tractament del concepte de límit. La presentació, com és natural, segueix l'ordre cronològic i posa l'èmfasi en aquelles parts que són deutores dels autors precedents i d'aquelles altres que són innovadores.

Abstract

This second part of the article does emphasis in the authors that, by some means or other, have adopted a more symbolic language in the treatment of the concept of limit. The presentation, how is natural, follows the chronological order and puts the emphasis in those parts that are debtors of the authors precedents and of those other that are innovative.

1. Stockler

El text de Stockler presenta el primer intent d'aproximació a una elaboració algebraica del concepte de límit i, en conseqüència, és d'un gran interès sistemàtic. Fou escrit a Portugal, a la perifèria de l'Europa matemàtica d'aquell temps. El llibre és, a més, un cas excepcional per l'efecte de mestratge especialitzat que provocà enfortint la reflexió sobre els fonaments de la matemàtica. L'autor pertanyia, de fet, a la primera promoció d'estudiants graduats d'estudis especialitzats en matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Coïmbra, que havien estat reformatos en 1772, i en fou un dels estudiants més excel·lents. Francisco Borja Gração Stockler (1759-1829) és conegut com a autor de la primera presentació de la història de la matemàtica a Portugal (1819). La importància d'aquest text encara no ha estat prou reconeguda ni apreciada.

El seu volum de cent pàgines *Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducção ao Methodo das Fluxões* fou publicat per l'Acadèmia de Ciències de Lisboa en 1794. Stockler segueix molts dels seus

predecessors en argumentar que el mètode dels límits es trobava ja a la base dels grecs, i d'una manera particular en Arquimedes. Tanmateix no l'explicitaren. Els geòmetres moderns havien generalitzat la idea de límit, però alhora havien introduït els conceptes imperfectes i repel·lents («imperfeitas, repugnantes») d'*Infinitos* i *Infinitesimos* (Stockler 1794, iv) per tal d'evitar els mètodes laboriosos dels antics. Stockler, per a establir-ne el desenvolupament, es fonamenta en sis fonts: la secció I del primer volum de *Principles of Natural Philosophy* de Newton, el text de MacLaurin, les entrades «Limite» i «Differentiel» de l'*Encyclopédie* de D'Alembert, el segon capítol del text de Cousin, la part concernent els principis del càlcul infinitesimal del text de l'abat Martin i, finalment, l'assaig premiat de L'Huilier. Això no obstant, Stockler indicava amb orgull que gairebé tots els seus resultats eren «completament nous» (ibíd., viii). Indicava també que, en el text, havia desenvolupat els fonaments que, fins aleshores, només eren implícits en les lliçons que havia donat a la Reial Acadèmia Naval de Lisboa (ibíd., ix).

Però els coneixements precisos que Stockler té de la literatura internacional no sols són remarcables, sinó que també confirmen que el text de Martin de 1781 no fou solament significatiu en el seu país, sinó que havia estat reconegut en l'àmbit internacional. A més, la percepció de Martin constitueix una de les bases més importants de Stockler. Tanmateix Stockler sobrepassa àmpliament les seves bases en separar el concepte de límit del concepte geomètric i algebritzar-lo com una explicació operativa per a les variables, i finalment també per a funcions. I ultra tot això, hi trobem l'inici d'operacions amb desigualtats. Basant-se en els conceptes de Martin, Stockler adopta la diferenciació de L'Huilier en límits per la dreta i per l'esquerra introduint-hi, a més —per l'estatus excepcional característic del zero—, una diferenciació ulterior, que porta pràcticament la successió nul·la a l'estatus de concepte bàsic de la teoria dels límits.

Stockler inicia la presentació com gairebé tots als autors que l'han precedit, introduint els conceptes de constant i de variable, però, com Martin, fent servir el concepte de valor: les constants són ens que solament accepten un únic valor, mentre que les variables poden assumir-ne diversos (ibíd., 1). Igual que tots els autors del segle divuit, no n'explicita el recorregut. Aleshores Stockler, amb una coincidència molt gran amb Martin, defineix el concepte general de límit, formulant l'aproximació arbitrària de forma idèntica a la de Martin:

Una quantitat constant s'anomena «Límit» d'una variable si la darrera és capaç de créixer, resp. de decreixer —àdhuc si el valor de la variable no esdevé mai igual al de la constant— de manera que s'apropa tant a la constant que la diferència esdevé més petita que qualsevol quantitat donada per endavant, per petita que s'hagi agafat (ibíd., 2).

Stockler gairebé no empra el concepte de límit en la seva forma general, sinó en formes específiques que al començament, com L'Huilier, distingia entre límits per la dreta i per l'esquerra perquè no disposava del concepte de valor absolut. Allò que L'Huilier anomenava *limite en grandeur*, Stockler ho anomena *limite em augmento*, i el *limite en petitesse* de L'Huilier esdevé en Stockler *limite em diminuição* (ibíd., 2). La innovació conceptual que depassa Martin consisteix en el fet que Stockler oposa a aquests dos conceptes de límit el que aparentment semblen conceptes complementaris d'il·limitat: les variables que, quan decreixen, no tenen límit («que não tem limite em diminuição»), respectivament, tampoc no en tenen quan augmenten («que não tem limite em augmento»).

De fet, només les variables sense límit quan augmenten se'ns mostren com a il·limitades i per consegüent, en general, no són aplicables operativament. Contràriament, en canvi, les variables que quan disminueixen no tenen límit constitueixen, a despit del nom, no sols una quantitat limitada, sinó també un concepte bàsic nou de la teoria dels límits. La raó d'aquest fet és l'estatus excepcional del zero. Com hem vist abans, Martin no reconeixia el zero com una quantitat, ni tampoc com a valor possible per a les variables. Per aquest motiu, havia introduït els *infiniment petits* com una variable especial que

finalment s'esvaeix. Malgrat que Stockler no comenta explícitament aquesta qüestió, el zero té també una posició excepcional: tota la seva pràctica palesa clarament que el zero mai no es pot assolir com un límit. Stockler definia el concepte de límit d'una manera diferent: com el d'una variable que disminueix sense límit. Això no significa una variable que cau en l'«infinit» negatiu, sinó més aviat una variable que s'apropa al zero com si fos una barrera, quelcom que mostra no sols la limitació factual d'aquesta variable, sinó també el caràcter excepcional del zero. La inconsistència de la concepció de Stockler és el fet d'haver-se abstingut de discutir la possibilitat dels límits negatius.

Fins i tot el primer ús que fa del concepte de «variable sense límit de disminució» mostra que l'entén com si fossin variables que aquí podríem designar simplement com a successions nul·les. El primer teorema relatiu a aquestes quantitats estableix que la suma d'un nombre arbitrari de variables d'aquesta mena és també una variable d'aquesta mena. La demostració d'aquest fet mostra que l'operació d'aquestes variables pot esdevenir més petita que qualsevol quantitat per minsa que l'agafem —Stockler no suposa que aquesta quantitat hagi de ser positiva; en ell, és típic un ús consistent d'una certa àlgebra de les desigualtats que, segons Grabiner, constitueix una innovació que comparteix amb Cauchy:

Sigui n el nombre de variables z, y, x , etc. i k una quantitat tan petita com puguem imaginar. Aleshores, hom pot suposar que

$$z < \frac{k}{n}, \quad y < \frac{k}{n}, \quad x < \frac{k}{n},$$

i igualment per a totes les altres variables, i hom obté que $z + y + x + \text{etc.} < k$. QED.
(Stockler 1794, 4).

Una altra proposició, el tercer teorema de Stockler, il·lustra la característica bàsica d'aquest concepte de límit —aparentment il·limitat— com una successió nul·la. Si dues variables diferents x i y tenen el mateix límit a , la seva diferència $x - y$ no té límit de disminució (ibíd., 7).

El desenvolupament posterior de les propietats d'aquestes successions nul·les porta eventualment Stockler a la formulació del *Principio Fundamental* de la teoria dels límits, que mostra que les successions nul·les poden esdevenir el concepte realment bàsic d'aquesta teoria. Una variable que posseeixi un límit pot ser considerada com una suma, respectivament com una diferència, d'una constant —i.e., el límit— i d'una successió nul·la:

Tota quantitat capaç de límit és necessàriament, amb el grau de precisió que sigui, igual al seu límit més o menys una quantitat variable que no té límit de disminució (ibíd., VI).

Amb aquests conceptes fundacionals, Stockler desenvolupa una concepció totalment algebraica de les operacions amb límits. En contrast amb els seus predecessors que havien focalitzat el seu treball operant amb raons geomètriques, Stockler concep el comportament del límit algebraicament i ens presenta, de forma sistemàtica, la seva operativitat: per a cada una de les operacions aplicables com ara l'addició, la subtracció, la multiplicació, la divisió i l'obtenció d'una potència —i també per a lligams d'aquesta mena entre dues o més variables, entre una constant i una variable, etc. Les demostracions dels teoremes individuals s'ofereixen, d'una manera consistent, mitjançant operacions algebraiques amb desigualtats. Com a exemple, citarem alguns d'aquests teoremes:

Si dues variables són successions nul·les, la suma, la diferència i el producte, també; resultats anàlegs valen per al producte d'una variable i una constant, i per a la divisió d'una variable per una constant. Tota quantitat capaç de límit és necessàriament, amb el grau de precisió que sigui, igual al seu límit més o menys una quantitat variable que no té límit de disminució (ibíd., 3-10).

Una potència a^x , on $a < 1$ és una constant i x una variable amb valors positius sense límit d'augment, proporciona una successió nul·la (ibíd., 22).

El límit, tant *em augmento* com *em diminuçaõ*, de la suma —resp. la diferència, resp. el producte— d'una constant a i una variable x amb límit b és igual a la suma/diferència/producte de a per b . Demostra els anàlegs per a dos o més variables (ibíd., 28 i s.).

Aquests teoremes condueixen immediatament a proposicions d'intercanviabilitat de límits, i addicionalment foren suportats i generalitzats amb la creació d'un signe per al concepte de límit. A més, els acompanyà immediatament, en la secció esmentada relativa als dos conceptes de límit que succeeixen adequadament la presentació del principi fonamental (vegeu el paràgraf anterior), de l'exposició dels convenis que concerneixen el signe per als límits —que contenien «lim», un símbol que ja havia esdevingut estàndard; tanmateix Stockler, en l'ús d'aquest signe, s'absté de diferenciar els límits per la dreta i per l'esquerra:

Si en un càlcul desitgem expressar el límit d'una variable i no hem establert encara una lletra de l'alfabet per a designar-lo, escriurem les tres primeres lletres *lim* de la paraula *límit* abans del terme o de l'expressió que representa la variable. Per a expressar el límit de x , escriurem $\lim x$; per a expressar el límit de xy , escriurem $\lim(xy)$; per a expressar el límit de y^x , escriurem $\lim(y^x)$; i així anàlogament (ibíd., 28 i s.).

Tant pel fet d'introduir signes com d'usar-los, novament és més explícit i precís que els seus predecessors. Si bé formula les proposicions («theorems») sense utilitzar el signe de límit, sempre l'usa, de forma operativa, en les demostracions. Aquest ús mostra alhora la intercanviabilitat de l'operació algebraica i el procés de determinació del límit. Aleshores, el resultat de $\lim x = a$ i $\lim y = b$ és que $a + b = \lim(x + y)$, i $ab = \lim(xy)$ (ibíd., 30 i s.).

Stockler estableix la intercanviabilitat també per a funcions transcendents, en particular per al logaritme: Per a $b = \lim x$ i a constant, tenim que $\lim(a^x) = a^b$, i anàlogament $\lim(y^x) = b^a$ (ibíd., 55 i s.).

Un fet nou en l'aproximació de Stockler és que no limita els límits a les variables, sinó que introdueix explícitament i discuteix els límits de funcions (ibíd., 66 i s.). En particular, com a teorema XIII, estableix explícitament la substituibilitat del procés dels límits per a funcions: «El límit d'una funció Fx d'una variable x que admet un límit és igual a la funció homòloga del límit» (ibíd., 68). En la forma amb signes, Stockler expressa aquest teorema d'aquesta manera: Per a $a = \lim x$, s'obté $\lim Fx = Fa$.

En les condicions d'aquest teorema, introdueix, en el cas de les proposicions generals, la condició que la(les) variable(s) admeti(n) límit(s): «capaz de limite» (ibíd., 11 i s.). Tanmateix no considera aquesta condició com un element de la pròpia teoria pel que fa a l'estudi del comportament de les funcions.

2. Carnot

Lazare Carnot (1753-1823) va escriure tres versions diferents del famós text *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*, en 1784, 1797 i 1813. No és gaire conegut que l'aproximació passa d'un mètode basat en el límit a un que el menysprea i, en canvi, emfasitza els infinitesimals com a superiors. Per tant, l'obra de Carnot és un dels casos rars d'un accés immediat a canvis epistemològics.

La primera versió fou escrita en 1784 per ser presentada en concurs a l'Acadèmia de Ciències de Berlín. Mentre que l'Acadèmia havia descrit el concepte de l'infinit com a «contradictori», Carnot —en una nota a peu de pàgina introductòria— assigna aquest caràcter únicament a les idees primeren-

ques imprecises dels novells. «En realitat», continua, «res no és més simple que un concepte exacte de l'infinit» (ibíd., 174).¹ Justifica aquesta asserció —que era totalment contrària a la tradició— afirmant que el concepte d'infinit està directament relacionat amb el límit o amb les raons primeres i darreres de Newton, que mai ningú no havia refusat i que, a més, generalment romanen indefinides per mor de la seva intel·ligibilitat (ibíd.).

És astorador que la literatura que existeix sobre que la memòria de Berlín de Carnot no discuteixi fins a quin punt contradiu obertament el concepte fonamental de la qüestió del premi. Usant la mateixa terminologia amb la qual l'Acadèmia havia fet una crida per tal que hom substituís l'infinit, Carnot exposa que en pot proporcionar un concepte precís, exacte i clar —si bé, admetent-lo al si de la teoria dels límits—: «Per tant, suposant el concepte de límit, hi ha una solució precisa, exacta i clara» (ibíd., 174).

El que és decisiu és que Carnot no veu res de contradictori en el concepte d'infinit, sempre que se'l concebi dins el marc de la teoria dels límits:

Per tant, les quantitats infinitesimals no són ens imaginaris, sinó simples quantitats variables caracteritzades per la naturalesa dels seus límits (ibíd., n. 13, 182).

Aquesta notable independència de Carnot es palesa també en la seva distància de D'Alembert, el qual desijava, a l'*Encyclopédie*, excloure completament els *infiniment petits* del discurs matemàtic legítim. L'aspecte productiu és que Carnot, no solament introdueix un signe límit equivalent al de L'Huilier, sinó que l'aplica també operativament, entre d'altres, per a expressar la propietat d'esdevenir infinitament proper. La introducció del signe no es fa d'una manera encoberta, sinó explícita:

Poso de manifest que etiqueto el límit o el valor darrer d'una quantitat arbitrària usant la mateixa quantitat precedida del signe $\mathcal{L}$ (ibíd., n. 36, 199).

Aleshores és hàbil per a formular la propietat anterior en la forma breu $\mathcal{L}_B^A = 1$ (ibíd., n. 51, 241). Carnot aplica aquest signe del límit d'una forma extensa, en particular en les demostracions (vegeu ibíd.). També l'usa en la demostració del seu teorema que —seguint l'obra de Martin— actualment forma part del repertori estàndard de la teoria dels límits, a saber, la intercanviabilitat dels límits en les operacions matemàtiques, en el cas de la formació dels quocients:

La raó darrera de dues quantitats arbitràries és sempre igual a la raó dels seus valors darrers o, el que és el mateix, el límit de la raó de dues quantitats arbitràries és igual a la raó dels seus límits (ibíd., n. 88, 242).

La universalitat de la proposició per a quantitats *quelquonques*, la retrobem en endavant, durant molt de temps, en els autors posteriors. Carnot expressa també aquesta proposició amb símbols:

Per consegüent, $\mathcal{L}_Z^Y = 1$ és el mateix que $\frac{\mathcal{L}^Y}{\mathcal{L}^Z} = 1$ (ibíd.).

Encara que aquesta sembla que és la seva conclusió respecte dels mètodes del càlcul infinitesimal, i encara que ambdós, el singular i el combinat, es basin en el concepte de límit, Carnot discuteix —inicialment molt sorprenentment— un *méthode des limites* separat, «vertader», que aleshores prova que és el mètode general superior.

1. Podríem considerar, potser, aquesta acceptació de l'infinit com una raó per la qual l'Acadèmia no concedí el primer premi a aquest tractat de Carnot.

Com a mètode independent, Carnot presenta la determinació del límit per als quocients de diferències:

$$\mathcal{L} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \mathcal{L} \frac{\Delta z}{\Delta x}, \mathcal{L} \frac{\Delta y}{\Delta z} \text{ (ibíd., n. 84, 239 i s.)}$$

Per a Carnot, forjar un lligam entre la determinació dels diferencials i dels quocients de diferencials no és matemàticament trivial. Per això posa l'accent en el fet que les quantitats diferencials no s'esdevenen de forma separada en el mètode actual dels límits. Considera aquest vincle inherent una «dificultat» que no es troba en el que s'anomena l'*analyse infinitésimale* normal: no es poden separar les variables i executar individualment les operacions de transformació:

Aquí s'esdevé que no es pot, com succeïa en el mètode anterior, separar les quantitats infinitament petites les unes de les altres; sempre s'han de presentar de forma conjunta, la qual cosa prevé les equacions allà on es troben de veure's sotmeses a totes les transformacions que servien per a eliminar-les (ibíd., n. 85, 2241).

Aquesta «dificultat» confirma una vegada més, tant pel costat matematicoconceptual com pel matematicooperacional, que el concepte bàsic en l'anàlisi de Carnot és encara el geomètric de corba i no pas el de funció.

És només quan assolix aquesta forma del mètode del límit que Carnot emfasitza que opera solament amb quantitats finites i, per tant, es restringeix als mitjans de l'àlgebra normal. Això converteix el càlcul infinitesimal en «una aplicació simple del càlcul algebraic ordinari». Com a càlcul algebraic pur amb quantitats finites «perceptibles», no es passeja per la «terra dels errors»; aquest mètode dels límits és clarament el que és general i el que s'ha de preferir.

Tanmateix, per mor de les dificultats que descriu en separar variables, Carnot no desitja atorgar-li aquest estatus de forma general. Després de desenvolupar diversos teoremes sobre límits —i, en particular, sobre substitucions (vegeu el paràgraf anterior)—, proporciona un camí per defugir aquesta dificultat: canviar la base de la diferencial. La reproducció, a la figura, d'aquesta línia de pensament presenta l'aplicació operativa del símbol de límit $\mathcal{L}$.

90. en effet, la difficulté de la méthode des limites consiste (85) en ce qu'on ne peut y séparer les quantités différentielles, or les remarques précédentes, fournissent le moyen de faire aisément cette séparation. car soit par exemple $\mathcal{L} \frac{dy}{dx}$, pour séparer dy de dx , je commence par diviser l'une et l'autre par la base infinitésimale c'est-à-dire, que je mets la quantité précédente sous cette forme $\mathcal{L} \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{dx}\right)}$ en prenant dx pour base. or cette expression est évidemment équivalente à la première et d'un autre côté (88) elle équivaut à $\frac{\mathcal{L} \left(\frac{dy}{dx}\right)}{\mathcal{L} \left(\frac{dx}{dx}\right)}$ expression dans laquelle le numérateur et le dénominateur sont des quantités finies, et où dy et dx se trouvent séparées.

3. Desenvolupament de conceptes ulteriors: Garnier, Lacroix i Ampère

Retornem ara a les contribucions d'altres matemàtics pel que fa al desenvolupament de conceptes bàsics posteriors de l'anàlisi al si de l'École Polytechnique.

3.1. Garnier

Un personatge notable en aquesta contribució fou J. G. Garnier. Va ser el primer —immediatament després d'haver ensenyat el seu curs normal d'anàlisi— a imprimir les pròpies versions abreujades de lliçons adreçades als estudiants. L'arxiu de l'École Polytechnique conté diversos textos d'aquest caire que evidentment foren editats com a simples materials de curs i no per a una distribució àmplia. Un d'aquests textos, titulat *Leçons d'Analyse algébrique, Différentielle et Intégrale*,² per a la primera admissió d'alumnes de l'any 1800-1801, conté també una versió abreujada d'una classe encapçalada per *Course d'Analyse Différentielle, fait l'an 9*. Després d'introduir els termes conceptuals i de presentar els fonaments del càlcul diferencial, Garnier, a la secció tercera, tracta explícitament de la transició de les diferències als diferencials i aplica el *méthode des limites* com a mitjà per a fer-ho. Era la primera vegada que una aproximació d'aquesta mena tenia lloc a l'École Polytechnique, on el càlcul diferencial s'havia basat sempre en el càlcul de diferències. La secció és encapçalada per *Notions de la limite et passage du calcul aux différences finies au calcul différentiel*.

L'extensió de Garnier del concepte de límit no era un esdeveniment isolat, sinó que ja formava part dels exàmens finals. Es conserva un document de 1799 en el qual Garnier anotà les parts importants del seu programa sobre càlcul diferencial i integral com a guió per a dos examinadors: Laplace i Bonne. Aquest text revela que un dels tòpics de l'examen era que no tota funció posseeix un límit arreu. Dels dinou tòpics sobre els fonaments del càlcul diferencial, els tres primers van adreçats a la introducció del concepte de funció. I alguns dels tòpics següents tracten del concepte de límit. En són exemples:

4. Què s'entén com a límit d'una funció d'una variable.

5. No totes les funcions admeten límit.

[...]

7. Assigna els límits de les raons o les raons darreres de

$$\frac{\text{corde}}{\text{sinus}}, \frac{\sin}{\cos}, \frac{\sin}{\sin \text{ vers}}, \frac{\text{tang}}{\sin}, \frac{\text{tang}}{\text{corde}}, \frac{\text{Arc}}{\sin}, \frac{\text{Arc}}{\text{corde}}.$$

[...]

12. Els límits de les raons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \dots, \frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}}, \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

i les notacions d'aquests límits.³

2. Archives de l'École Polytechnique, Bibliothèque, A III a 51. Les llacunes de la paginació posen també de manifest que aquestes impressions solament eren d'ús intern.

3. AEP, Bibliothèque, III 3b, J. G. Garnier, Programm de Calcul Intégral et de Calcul différentiel, remis le 16 fructidor aux c. en LaPlace et Bonne pour servir aux examens ouverts le 12 Complémentaire, an 7.