

ALGORÍSMIA COMENTADA

Carles Franquesa i Niubò

Departament de Matemàtica Aplicada
i Anàlisi

ALGORÍSMIA COMENTADA

Carles Franquesa i Niubò

Departament de Matemàtica Aplicada
i Anàlisi



TEXTOS DOCENTS



Universitat de Barcelona

Publicacions i Edicions

Franquesa i Niubò, Carles

Algorísmia comentada. – (Textos docents ; 383)

A la portada: Departament de Matemàtica Aplicada
i Anàlisi

Bibliografia. Índexs

ISBN 978-84-475-3715-0

I. Universitat de Barcelona. Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi II. Títol III. Col·lecció: Textos docents
(Universitat de Barcelona) ; 383

1. Algorismes

© Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona

Adolf Florensa, s/n

08028 Barcelona

Tel.: 934 035 430

Fax: 934 035 531

www.publicacions.ub.edu

comercial.edicions@ub.edu

IL·LUSTRACIONS

Santamaria

ISBN

978-84-475-3715-0

DIPÒSIT LEGAL

B-17.182-2013

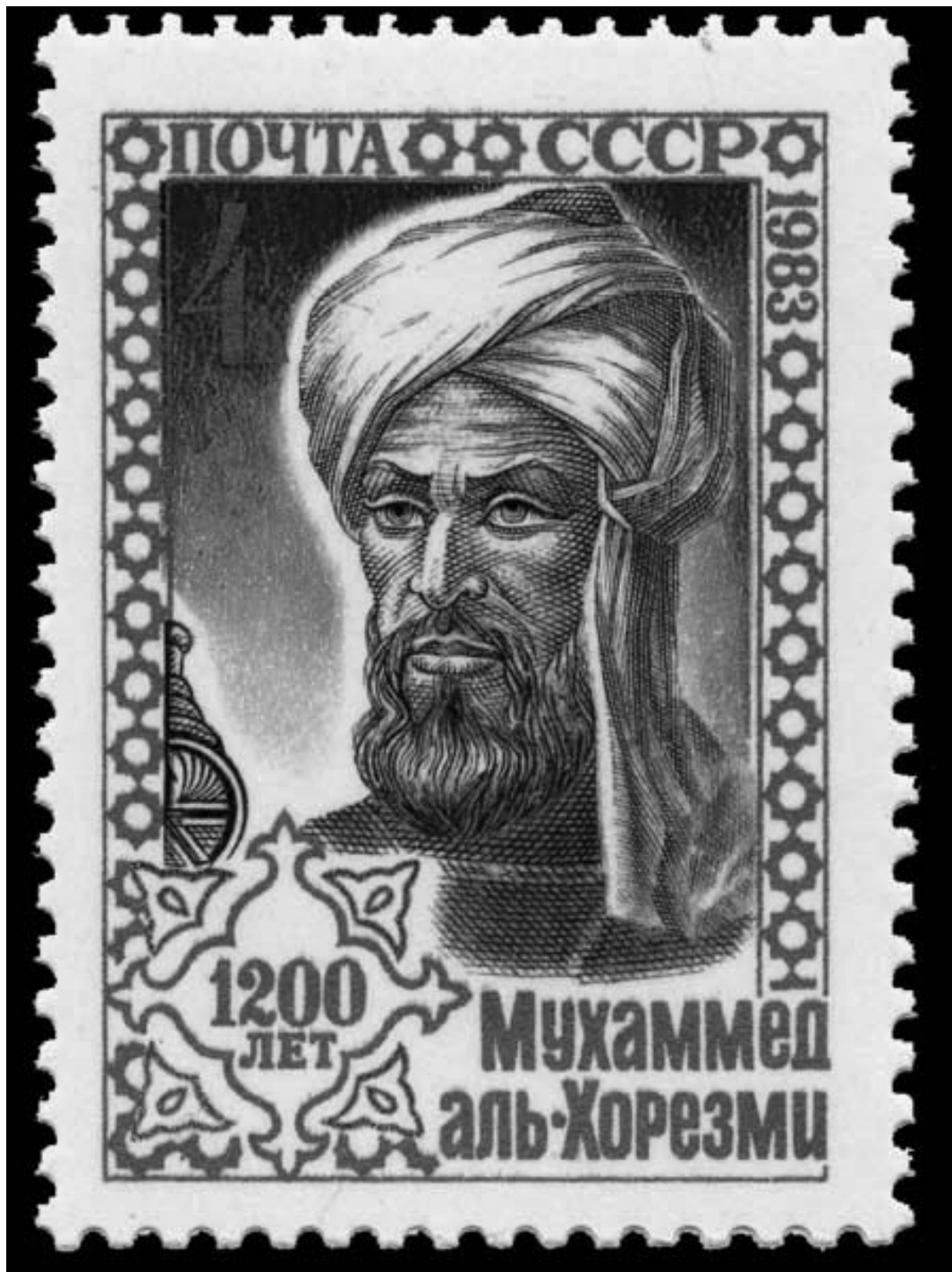
IMPRESSIÓ I REL·LIGAT

Gráficas Rey

És rigorosament prohibida la reproducció total o parcial d'aquesta obra. Cap part d'aquesta publicació, inclòs el disseny de la coberta, no pot ser reproduïda, emmagatzemada, transmesa o utilitzada per cap mitjà o sistema, sense l'autorització prèvia per escrit de l'editor.

què és a com lo que quants és a quins.

$$com = \int_{?}^{!} què(t) \, dt$$



Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi (al-Khwa-rizmi)

Pròleg

La Informàtica és una amalgama complexa de ciència i tecnologia. Dintre la seva vessant científica, l'Algorísmia, la ciència que estudia els algorismes, les seves propietats de correctesa i eficiència, ocupa un lloc d'excepció, tot i que, com la major part dels fonaments científics de la informàtica, és una gran desconeguda del públic.

L'Algorísmia es nodreix de les matemàtiques, especialment la combinatòria i la matemàtica discreta, i la lògica, i en el seu sí s'ha desenvolupat una gran varietat de tècniques, conceptes i resultats innovadors i fascinants. En molts sentits, l'Algorísmia és el cor de la Informàtica i també ha canviat profundament moltes àrees de les matemàtiques. Ha introduït com un objectiu important de tota recerca matemàtica el desenvolupament de solucions efectives i eficients: és a dir, que els problemes es puguin resoldre mecànicament, amb un ordinador, i de manera ràpida.

Del paper fonamental de l'Algorísmia en la Informàtica n'és testimoni l'enorme quantitat de llibres de text que cada any apareixen sobre algorismes i estructures de dades, i la seva inclusió en tots els currículums universitaris d'Informàtica del món des dels anys 70. Amb aquest panorama, un llibre com el que teniu a les mans podria passar desapercebut, un més de tants.

Tanmateix hi ha dos elements molt significatius que no trobareu als altres llibres de text sobre la matèria.

D'una banda, és un dels pocs llibres que s'ha escrit en la nostra llengua. Com fàcilment podreu imaginar la immensa majoria dels llibres que s'ha escrit sobre Algorísmia, ho han estat en anglès. Ocasionalment, s'ha fet traduccions de l'anglès a altres llengües majoritàries com l'alemany, el francès o l'espanyol; però no conec de cap traducció al català. Així doncs, la publicació d'un llibre de text universitari sobre Algorísmia en català és una excel·lent notícia per la qual ens hem de congratular.

L'altre element significatiu que aporta "Algorísmia Comentada" és l'enorme capacitat pedagògica i l'entusiasme desbordant d'en Carles Franquesa. Fa encara no deu anys que ens vam conèixer i durant molts anys vam coincidir com

a professors de l'assignatura "Anàlisi i Disseny d'Algorismes" de la Facultat d'Informàtica de Barcelona. La passió per l'Algorísmia ha estat sempre un nexe d'unió entre nosaltres, i hem tingut moltíssimes discussions enriquidores al llarg de tots aquests anys. Tant l'un com l'altre hem viscut i vivim una relació constant amb aquesta ciència fascinant, com a docents i també com a recercaires, doncs tots dos investiguem en temes d'Algorísmia.

Pàgina a pàgina, l'amor i l'entusiasme d'en Carles per l'Algorísmia es fan palesos. Com a llibre de text escrit per una persona que coneix la matèria, hi trobareu tot el que hom pot esperar. Com a llibre de text escrit per una persona que estima profundament la matèria, hi trobareu quelcom nou. Més que una freda i rigorosa exposició, trobareu una conversa, un diàleg, seguireu el tren de pensament de l'autor, redescobrireu de la seva mà els conceptes, les vies exitoses i els camins sense sortida, aprendreu a pensar "algorísmicament".

Però, per sobre de tot, confio en que en Carles hagi estat capaç de transmetre-us i encomanar-vos aquest entusiasme per l'Algorísmia.

Conrado Martínez
Barcelona, 25 de gener de 2010

Índex

1	Notació Asimptòtica	5
1.1	Preliminars	6
1.1.1	Inducció	6
	Axiomes de Peano	6
	Axioma cinquè de Peano	7
1.1.2	Successions	8
	Representació gràfica d'una successió	10
1.1.3	Límits	11
	Representació gràfica del límit	13
1.1.4	Classes d'Equivalència	14
	Relacions d'equivalència	15
1.1.5	Funcions	16
1.2	Propòsit de l'Algorísmia	17
1.2.1	Eines que utilitzarem	19
	Mida de les dades	19
	Temps d'un algorisme per una entrada de mida n	20
1.3	Conjunts de la Notació Asimptòtica	22
1.3.1	Introducció	22
	El joc de l'Espai/Temps	23
1.4	Els conjunts de funcions O , Θ , i Ω	24
	La constant oculta en la definició de $\Theta(g(n))$	25
	Usos habituals dels tres conjunts	26
	Càlculs que utilitzen els conjunts de funcions amb el símbol d'igualtat inclusiu	27
	Propietats dels conjunts de funcions	27
	Funcions de referència habituals	28
1.5	Anàlisi d'Eficiència en Algorismes Iteratius	33
1.5.1	Composició seqüencial	33
1.5.2	Sentències alternatives	34
1.5.3	Estructures iteratives	35
	Algorisme iteratiu en detall	36
1.5.4	Eficiència de l'ordenació per selecció	37
1.5.5	Eficiència de l'ordenació per inserció	39
1.6	Anàlisi d'Eficiència en Algorismes Recursius	41
1.6.1	Recursivitat Substractora: Teorema Mestre I	42
1.6.2	Eficiència del càlcul del factorial	45
1.6.3	Eficiència del càlcul dels nombres de Fibonacci	46
1.6.4	Recursivitat Divisora: Teorema Mestre II	48

1.6.5	Eficiència de la cerca dicotòmica	51
2	Estructures de Dades	55
2.1	Introducció	56
2.1.1	Lògica	56
2.1.2	Coneixement	57
2.1.3	Per què ens inventem estructures de dades?	58
2.2	Diccionaris	59
2.2.1	Implementacions Senzilles	61
	Vector	62
	Llista	63
2.2.2	Taules de Dispersió: Hashing	67
	Adreçament obert	69
	Encadenament separat	73
2.2.3	Arbres Binaris de Cerca (BSTs)	75
	Implementació dels Arbres Binaris de Cerca	76
	Construcció i Destrucció	79
	Inserció	80
	Cerca	82
	Eliminació	85
	Recorregut	89
2.2.4	Arbres AVL	90
	Introducció	90
	Resoldre la degeneració	91
	Implementació dels AVLs	92
	Operacions privades per a la inserció en els arbres AVL	93
	Inserció en els arbres AVL	98
	Operacions privades per a l'eliminació en els arbres AVL	99
	Eliminació en els arbres AVL	100
2.3	Cues de Prioritat	103
2.3.1	Implementacions senzilles	104
2.3.2	Heaps	105
2.3.3	Implementació dels Heaps	108
	Construcció i Destrucció	110
	Operacions privades per a l'extracció del màxim i la inserció	110
	Promocionar	111
	Enfonsar	112
	Operacions característiques de les cues de prioritat en un heap	114
	Inserció	114
	Obtenció del màxim	115
2.3.4	Heapsort	116
2.4	Particions	119
3	Dividir i Vèncer	125
3.1	Introducció	126
3.1.1	Esquemes Algorísmics	126
3.1.2	Rekursivitat	127
3.1.3	Ineficiència	129
3.2	Esquema Algorísmic de Dividir i Vèncer	130

3.3	Ordenació Ràpida <i>quicksort</i>	131
3.3.1	Essència	132
3.3.2	Algorisme	133
3.3.3	Eficiència	135
3.3.4	Variants	136
3.3.5	Selecció Ràpida <i>quickselect</i>	137
3.4	Ordenació per Fusió <i>mergesort</i>	138
3.4.1	Essència	139
3.4.2	Algorisme	140
3.4.3	Eficiència	142
3.4.4	Variants	142
3.5	Algorismes Històrics	143
3.5.1	Algorisme de Karatsuba	143
3.5.2	Algorisme d'Strassen	147
4	Grafs	151
4.1	Definició	152
4.1.1	Grafs No Dirigits	153
4.1.2	Grafs Dirigits	154
4.1.3	Ordre, Mida, i Altra Terminologia	155
4.1.4	Teoremes	157
4.2	Representació	158
4.2.1	Matriu d'Adjacències	160
4.2.2	Llistes d'Adjacència	163
4.3	Recorreguts i Exploracions	167
4.3.1	Recorregut en Amplada <i>BFS</i>	171
4.3.2	Recorregut en Profunditat <i>DFS</i>	178
4.4	Grafs amb Pesos	186
4.4.1	Definició	186
4.4.2	Representació	187
5	Algorismes Voràços	193
5.1	Problemes d'Optimització Combinatòria	194
5.1.1	Factibilitat	196
5.1.2	Principi d'Optimalitat	198
5.2	Esquema Algorísmic d'Algorismes Voràços	199
5.3	Problema de la Motxilla	201
5.4	L'Exemple de les Benzineres	203
5.5	Camins Mínims	205
5.5.1	Algorisme de Dijkstra	205
	Pesos Negatius	209
5.6	Arbres d'Expansió Mínima	211
5.6.1	Algorisme de Kruskal	212
5.6.2	Algorisme de Jarník, o Prim	217
6	Programació Dinàmica	223
6.1	Introducció	225
6.2	Vectors Dinàmics i Matrius Dinàmiques	226
6.3	Recurrències	229
6.3.1	Fibonacci	230

6.4	Esquema Algorísmic de Programació Dinàmica	232
6.5	Alguns Problemes	234
6.5.1	Número de Subconjunts	234
6.5.2	El Problema de Tornar Canvi	240
6.5.3	Problema de la Motxilla	244
6.5.4	Algorisme de Floyd	247
	Pesos Negatius	252
7	Cerca Exhaustiva	255
7.1	Preliminars	257
7.1.1	Comportament Recursiu	257
	Arquitectura	259
7.1.2	Jugar Escacs	260
7.2	Tornada Enrera	262
7.2.1	Esquema Algorísmic de Tornada Enrera	263
	Marcatges	264
	Eficiència	265
7.2.2	El Problema de les Vuit Reines	265
	El Problema de les n Reines	269
7.2.3	El Laberint	271
7.3	Ramificació i Poda. Optimització	274
7.3.1	Càlcul de Fites	276
	Relaxacions	276
7.3.2	Esquema Algorísmic de Ramificació i Poda	277
7.3.3	El Problema de l'Assignació	278
7.3.4	El Problema del Viatjant	288
	La classe <i>viatjant</i>	289
7.3.5	Models Polièdrics	295
	El Polítop del TSP	296
8	Complexitat Algorísmica	301
8.1	Problemes Computacionals i Decisionals	302
8.1.1	Versions Decisionals de Problemes Computacionals	303
8.2	Algorismes Polinòmics	304
8.3	$\mathcal{P}$ i $\mathcal{NP}$	304
8.4	Reduccions Polinòmiques	307
8.5	Problemes $\mathcal{NP}$ -durs i $\mathcal{NP}$ -complets	309
8.6	Teorema de Cook	311
8.7	Algunes Reduccions	313
8.7.1	Reducció de 3SATa CONJUNT INDEPENDENT	313
8.7.2	Reducció de CONJUNT INDEPENDENTa RECOBRIMENT PER NODES	316
8.7.3	Reducció de 3SATa PROGRAMACIÓ LINEAL ENTERA	317

Preàmbul

Buscant l'origen de la paraula, l'etimologia, en el Diccionari de l'Enciclopèdia Catalana [9] ens trobem la definició...

***algorísmia** f MAT Ciència del càlcul algèbric.*

D'algèbric hi ha dues accepcions...

***algèbric** [del fr. algébrique, íd.] adj MAT 1 Relatiu o pertanyent a l'àlgebra. 2 Que solament conté operacions d'àlgebra en nombre finit. Equació algèbrica. Funció algèbrica. Ciència del càlcul algèbric.*

És clar que un concepte que solament conté operacions d'àlgebra en nombre finit és un concepte relatiu o pertanyent a l'àlgebra. De manera que d'aquestes dues accepcions, la primera inclou la segona, cosa que fa tremolar. No sembla convenient que un diccionari manifesti palmària ignorància de la teoria de conjunts. Una definició més acurada podria ser "Relatiu o pertanyent a l'àlgebra. En particular, que solament conté operacions d'àlgebra en nombre finit." A més, sospitosament, el tercer exemple (ciència del càlcul algèbric) és la mateixa definició que ens ha portat aquí. No sembla que n'haguem de treure l'entrallat. Per qui tingui curiositat, si ho mireu a la wikipèdia us trobareu amb un matemàtic, físic, astrònom i cartògraf persa de fa mil dos cents anys conegut pel nom Al-Khwa-rizmi. Tot apunta a que aquest senyor tan savi va escriure el primer text d'àlgebra. Sembla que l'única imatge que en tenim és aquest segell rus que hi ha just abans del pròleg del Professor Conrado Martínez. El segell és de 1983 commemorant el seu 1200è aniversari, com diu imprès.

Bé, tornant a les definicions, potser no anàvem massa desencaminats. Ubicar l'algorísmia dins l'àlgebra resulta prou raonable. De tota manera, sembla massa complicat per l'enfoc que es vol donar aquí. Per això, orientem el discurs prenent de referència una altre terme de la mateixa rel.

***algorisme** m LÒG/MAT Procediment de càlcul que consisteix a accomplir un seguit ordenat i finit d'instruccions que conduïx, un cop especificades les dades, a la solució que el problema genèric en qüestió té per a les dades considerades.*

Definitivament, partirem d'aquesta definició. Llavors, definim aquí l'algorísmia com la ciència que estudia els algorismes. Per ciència entenem tota disciplina que utilitza els models matemàtics per aconseguir els seus propòsits.

Anem a fer una ullada a un tema força interessant. Deixant a part la imensa majoria dels problemes que tenim, n'hi ha alguns que pretenem estudiar en aquest llibre. Els hi diem problemes *computacionals*, caracteritzant amb aquest adjectiu tots aquells que poden ser resolts mitjançant una màquina computadora. Aquesta és una referència clau que caldria no perdre de vista al llarg d'aquest viatge. Anem a estudiar problemes. Problemes computacionals.

Observeu que en la definició hi ha, entre comes, *un cop especificades les dades*. Aquí considerarem un problema com quelcom independent de les dades que el materialitzen. Ens disposem a treballar amb els problemes sense tenir en compte les dades que requereixin per poder ser completament formalitzats.

En certa manera és una mica contradictori. Sembla que no es pot ignorar una part tan essencial d'un concepte quan ens disposem a estudiar el seu tot.

Tanmateix, per altra banda, resulta comprensible parlar de problemes sense plantejar-ne cap exemple concret. I és per aquest camí cap on sembla convenient arrencar el nostre estudi, ja que si pretenguéssim tenir en compte el conjunt de totes les dades possibles, per cada problema, mai podríem donar el primer pas per estudiar la seva complexitat.

Com sempre es fa en els estudis analítics, quan un factor decisiu té un ampli marge de variabilitat i es pretén ignorar, cal recórrer a l'estadística. Per seguir aquest llibre no us cal gran coneixement estadístic. Hi ha alguna referència a distribucions de probabilitat uniformes, però res més. El que més s'utilitzarà són els conceptes *cas pitjor*, *cas mig* i, no tan sovint, *cas millor*.

En la definició d'algorisme també hi ha l'expressió *problema genèric*. Sempre en el benentès que ens referim exclusivament als problemes computacionals, en aquestes pàgines direm *problema*, així sense cap adjectiu, al que allà diu *problema genèric*. No hi ha cap mala intenció en el fet de canviar d'òptica, sinó una adequació dels termes a la freqüència amb què seran utilitzades. Si cada cop que volguéssim fer referència al concepte de problema utilitzéssim l'adjectiu genèric, la lectura es faria tediosa quan no insuportable.

En definitiva estudiarem problemes. Ara bé, per disposar d'uns continguts més o menys arreglats (de regla), cal comprendre l'estreta relació que hi ha entre estudiar i prendre mesures.

La finalitat de l'algorísmia consisteix a mesurar la dificultat que representa solucionar problemes.

Normalment utilitzarem el vocable *complexitat* per referir-nos a dificultat.

És qüestió de conveni. Històricament hi ha hagut el consens de parlar de complexitat que certament sembla un mot més rigorós que dificultat, que té connotacions més subjectives. I és clar que si la nostra voluntat és de prendre mesures d'alguna cosa, en cap cas ens convindrà introduir cap mena de subjectivitat.

Al mateix concepte de *complexitat* també ens hi podem referir amb un altre terme que té una connotació diametralment antagònica, *eficiència*.

A veure si ho endevineu... Quan ens hi referirem d'una manera i quan de l'altra?. La resposta esta perduda pel llibre...

La fórmula que obre aquest text,

$$com = \int_?^! què(t) dt$$

es refereix a com es fan les coses, i què es fa en cada instant. Es pronuncia dient *com és igual a la integral, des de l'instant interrogant fins a l'admiració, de què de té diferencial de té*, i significa que la manera de fer una cosa, el com, és una suma d'infinites coses que cal fer des del moment en que comencem fins que acabem.

Per exemple, com es fa un truita de patates comença agafant les patates. Agafar les patates és el què es fa. I després, en el següent diferencial de temps, el què es fa és pelar-les. I després... En fi, que què es fa en cada moment explica com es fa la cosa. El temps vé afitat des del començament, indicat per l'interrogant d'aconseguir l'objectiu, fins l'admiració, quan s'ha complert.

Es curiós pensar que després de tot, en alguna dimensió per sobre, fer la truita de patates també pot ser considerat com un sol què. Què has fet per dinar? Truita de patates. I també cap a l'altra direcció, és clar. Llavors anem a parar en alguna dimensió inferior. Un què d'abans, agafar les patates, es pot transformar en un com agafar les patates. I llavors, aquest com té altres quès més petits, per exemple, obrir la bossa on són.

De tot plegat, és ben clar que l'analogia entre el llenguatge verbal i els llenguatges informàtics és estreta. Què és una crida a una rutina. Com és la implementació del cos de la rutina.

Aquest llibre segueix el temari que he impartit en la matèria d'Anàlisi i Disseny d'Algorismes, a la Facultat d'Informàtica de Barcelona, de la Universitat Politècnica de Catalunya, durant uns quants anys. Així doncs, es tracta en última instància d'un llibre acadèmic, i se suposa al lector certs coneixements de programació de computadores.

Va dirigit a estudiants universitaris de carreres tècniques, estudiants de graus en informàtica, matemàtiques, i enginyeries en general.

Els fragments de codi que hi ha al llarg de tot el text sota el títol genèric d'*Algorisme*, es troben també en forma d'arxius de codi font. L'autor es compromet a enviar un arxiu comprimit amb aquest contingut a tot aquell qui ho demani, per correu electrònic a l'adreça que s'indica en les referències d'aquest llibre. Hi ha un programa principal per cada capítol del llibre. El llenguatge de programació utilitzat és C++, amb la llibreria *std*. Tot i així, d'aquesta llibreria tan sols s'utilitza la serialització amb *cin* » i *cout* « en els programes principals. És a dir, els tipus de les dades que es manegen són tipus primitius del llenguatge C, encara que hi ha implementacions que utilitzen classes. Per això, es recorda que una classe és una estructura que, a més de variables i funcions membres, defineix espais de visibilitat. En general s'utilitza el concepte d'estructura per les classes petites. La diferència entre estructura i classe és que les estructures ho tenen tot públic, en canvi les classes poden tenir variables i funcions privades. En definitiva, s'espera del lector que conegui algunes instruccions de gestió de memòria (*new*, *delete*, *memset* o *memcpy*), la funció *sizeof*, algunes funcions bàsiques de vectors de caràcters, com *strlen*, *strcpy* i poca cosa més. En els darrers capítols s'utilitza plantilles per definir les estructures dinàmiques.