

noubiaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Abril 2013



sumari

Consell de Redacció:

Manel Sol / Josep Pla i Carrera (coordinadors)

Marianna Bosch

Juanjo Cárdenas

Joan Carles Ferrer

Joan Miralles

Romà Pujol

Josep Lluís Solé

Manuel Udina

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)

Pau Gargallo, 5

08028 Barcelona

feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)

filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Carme, 47

08001 Barcelona

scm.iec.cat

noubiaix@gmail.com

sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral

Preu d'exemplar ordinari: 12 €

Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la portada:

Triangles especulars

Paula Beltran Lobo

IES Voltterra, Abrera

Accésit nivell ESPO (batxillerat i cicles)

ISSN: 2014-2021

Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Publicacions i Edicions
de la Universitat de Barcelona

Adolf Florensa, s/n

08028 Barcelona

Tel.: 934 034 530

Fax: 934 035 531

comercial.edicions@ub.edu

www.publicacions.ub.edu



3 Editorial

articles

6

Scratch: un recurs didàctic per a les classes de matemàtiques

Mireia López Beltran

14

El concepte de límit de Newton a Cauchy: entre la geometria i l'àlgebra i el paper dels signes [Primera part]

Gert Schubring

28

Una partida de futbolí

Catalina M. Pizà Mut

43

L'harmonia del món

Carles Perelló

44

La irresolubilitat dels problemes clàssics grecs. Recurs didàctic per a l'ensenyament i l'aprenentatge

Ana Manzanares Moreno

57

Una aproximació etimològica 4: Elements de geometria plana

Jaume Solsona Villaplana

seccions

62

Per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu

66

Saps què hi ha simbolitzat al campanar de Sant Bernabé de la Sagrada Família?

Claudi Alsina

71

Ponts entre divulgació i educació matemàtica.

Què fem des del Creatmat?

Ara fa dos anys, la revista *Biaix* inicià un nou període amb el nom de *Nou Biaix*. Fou el resultat d'una col·laboració rigorosa i seriosa entre la FEEMCAT i la SCM, societat filial e l'IEC.

L'objectiu a assolir era múltiple. Es pretenia d'ampliar el ventall de continguts que *Nou Biaix* podria oferir als lectors, cobrint totes els etapes docents i discents i, com mostren els números que ja han sortit d'aleshores ençà —30 i 31—, aquest primer objectiu s'ha assolit amb un gran èxit, atesa la qualitat dels articles publicats, cada un en el seu àmbit.

Alhora s'estenien els subscriptors i lectors i, en conseqüència, els àmbits d'influència dels seus continguts a ventalls més amplis de col·lectius dedicats a la docència de la matemàtica: de maternal a universitari.

Enllaçant amb aquest objectiu, es vol impulsar un lligam estret amb el Màster de formació del professorat, convertint *Nou Biaix* en un referent a tenir present en aquest ensenyament i incorporant, quantinguin la qualitat necessària, alguns dels treballs de fi de màster, cosa que hem iniciat en aquest número.

Un altre objectiu programàtic de la col·laboració era aconseguir l'edició de dos números anuals, un propòsit que en els dos anys precedents no s'ha assolit, però que enguany serà ja una realitat.

Tota aquesta tasca no hauria arribat a bon port sense la feina de la Mequè Edo, codirectora fins ara i que, a partir d'aquest número serà substituïda, com a representant de la FEEMCAT, per Manel Sol.

L'equip de redacció vol agrair a la Mequè la seriositat, la professionalitat i l'entusiasme que ha dedicat, primer a *Biaix*, i després a *Nou Biaix*, i l'esperit de diàleg que ha permès el trànsit, que en alguns moments no ha estat fàcil, de *Biaix* a *Nou Biaix*; i, al Manel, li vol retre un acolliment afectuós i una col·laboració sincera.

articles
articles



articles

Scratch: un recurs didàctic per a les classes de matemàtiques

Mireia López Beltran

INS Milà i Fontanals de Barcelona
mireia.lopez@gmail.com

Resum

En aquest article s'exposen diferents experiències didàctiques que s'han desenvolupat fent servir l'Scratch, per tal de crear projectes amb aquest llenguatge de programació adreçat als alumnes de primària i secundària, elaborat pel MIT (Massachusetts Institute of Technology) i de distribució gratuïta.

Abstract

This article reports educational experiences that have been developed using the Scratch, while creating projects with this programming language for primary and secondary students that has been developed by MIT (Massachusetts Institute of Technology) and that is of free distribution.

1. Siguem creatius amb l'ordinador

Actualment, la major part de la població té accés a una gran varietat de programes informàtics: jocs, animacions i altres programes interactius, però la majoria d'aquests elements són un «carrer de sentit únic»: només es pot veure i clicar allò que altres han creat, és a dir, hom no pot dissenyar i crear el seu propi programa.

Resnick (2002) ens proposa veure els ordinadors com un mitjà per «crear i expressar-se» i no posar gaire l'accent només en l'accés a la informació. Amb l'Scratch, els alumnes, en lloc de «veure, clicar i xatejar», poden «crear i controlar coses en el món *on-line*», és a dir, passen de ser consumidors a ser productors i creen les seves pròpies històries interactives, els seus propis jocs i les seves pròpies animacions i els comparteixen al web (Resnick 2007, pàg. 20).

Amb la intenció de recuperar per a la primària i la secundària l'aprenentatge a partir de la manipulació, Resnick, a través del MIT Media Lab, va crear els *manipulatives digitalis* per expandir «el rang de conceptes que els nens (i els adults) poden explorar a través de la manipulació directa d'objectes físics» (Resnick 1998, pàg. 44).

A partir d'aquests materials, Resnick va establir tres conceptes com a guia de la seva recerca. Respecte al fet de *fomentar el disseny de projectes*, l'autor ens apunta les raons per les quals el disseny de projectes pot produir oportunitats riques per aprendre:

- Els nens són «participants actius», fet que els dona un control «més gran o una més gran implicació en el procés d'aprenentatge».
- Es fomenta «el pensament plural», ja que evitem la «dicotomia cert/fals», bo i suggerint que hi ha «múltiples estratègies» i més d'una solució possible.
- Es proveeix d'un context per a la «reflexió» i així s'aconsegueix que el nen «reflexioni, revisi i fins i tot estengui» els seus models sobre el món que l'envolta.
- Es fomenta la capacitat empàtica del nen, ja que necessita pensar com els altres entendran les seves construccions (Resnick 1998, pàg. 44).

Aquest èmfasi en el disseny d'activitats forma part d'una filosofia de l'educació més àmplia coneguda com a *construccionisme* (Papert 1993). Basant-se en les teories constructivistes de Jean Piaget, argumenta que l'aprenentatge és un procés actiu en què hom construeix activament el coneixement a partir de les seves experiències en el món. La gent no rep les idees; la gent les elabora. És a dir, el construccionisme afegeix la idea que les persones construeixen nou coneixement amb una eficàcia particular quan estan compromeses en la construcció de productes amb significat personal. Això es pot produir fent castells de sorra, màquines amb peces de Lego o programes informàtics, però el que és important és que les persones estiguin compromeses en la creació d'alguna cosa significativa.

En els anys setanta del segle xx, Papert i els seus estudiants del MIT Artificial Intelligence Lab van començar a fer recerca sobre mètodes per introduir els nens en el món de la programació (McNerney 2004, pàgs. 326-327) i van crear un llenguatge de programació per a nens: el Logo.

Amb la proliferació dels ordinadors personals a finals dels setanta, la *tortuga de terra*, que a l'inici era un robot de la mida i la forma de mitja pilota de bàsquet, es va canviar per la *tortuga de pantalla*, que alguns de nosaltres (ja) recordem. En un estadi següent, la recerca sobre els *manipulatiu digital* es va focalitzar en el Lego/Logo, en què es relacionava el popular joc de construcció amb el llenguatge de programació (Resnick 1998).

2. Arribem a l'Scratch

El projecte Scratch neix per dotar d'una eina els nois que vulguin involucrar-se en una «cultura de la programació» fora de l'ambient estrictament escolar. Fora de les aules, els autors van detectar una «cultura del Photoshop», en què els nois manipulaven gràfics, animacions i fins i tot vídeos i música, però no observaren el mateix comportament envers la programació. A partir d'observar què feien els alumnes que freqüentaven els clubs socials creats en les zones més desfavorides dels Estats Units, el grup de treball del MIT Media Lab va concloure que les noves eines de *software* triomfaven, entre d'altres, si:

- Els joves veuen el valor i el potencial de l'eina immediatament quan coincideix amb els seus interessos i les seves passions.
- Els joves poden crear productes finals que poden mostrar als altres.
- L'eina suporta un ampli rang de diversos tipus d'activitats que atrauen joves de diferents edats, gènere, orígens i cultura.
- Els joves poden aprendre'n les característiques addicionals de manera gradual. (Maloney, J. et al. 2004, pàg. 3).

Amb aquestes idees, l'equip de Lifelong Kindergarten del MIT Media Lab, dirigit per Mitchel Resnick, va dissenyar el llenguatge de programació per a nens, que van anomenar Scratch i que presenta les següents característiques principals:

- *Programació a partir de blocs de construcció*: amb l'Scratch, les comandes i els diferents tipus de dades estan representats per blocs de diferents formes; les peces només encaixen si la sintaxi és correcta. Amb l'Scratch, l'usuari arrossega blocs d'ordres d'una paleta per crear els procediments. A més a més, es poden executar diferents processos en paral·lel.
- *Una programació rica de diferents mitjans de comunicació*: a part dels tradicionals nombres, cadenes i gràfics, amb l'Scratch també es permet manipular imatges, animacions, pel·lícules i so per poder programar activitats que estiguin amb més sintonia amb els interessos dels joves.
- *Un profund compartiment*: l'Scratch permet exportar objectes a tots els nivells: des de compartir només els personatges animats fins a tot el projecte i intercanviar-los amb els amics.
- *Integració amb el món físic*: l'Scratch també pot ser usat per controlar les seves creacions a partir de sensors físics (continuació del projecte Lego/Logo).
- *Suport a múltiples llengües* (Maloney, J. et al. 2004, pàg. 4).

El llenguatge de programació Scratch va ser presentat el 2007 junt amb l'espai web per compartir els projectes, un element que ha esdevingut clau: en els tres primers mesos s'hi van pujar més de 20.000 projectes. Però l'Scratch no és només un llenguatge que permet manipular imatges i sons, sinó que un dels seus objectius és: «fomentar el pensament creatiu» (Resnick 2007, pàg. 21), i, segons l'autor: «en el procés de programar les seves creacions amb Scratch, els alumnes aprenen importants conceptes matemàtics en un context motivador i significatiu». I posa com a exemple un alumne de 8è curs (13-14 anys) que li va demanar com podia guardar la puntuació en un joc que estava creant; Resnick li va ensenyar com crear una variable amb l'Scratch i l'alumne li va donar les gràcies molt efusivament.

En aquest article es presenten tres experiències dutes a terme amb l'Scratch: *Jocs numèrics amb l'Scratch*, *Introducció a la programació amb Scratch* i *Creem un problema amb l'Scratch*. Les dues primeres es presentaran de manera breu i la tercera amb una mica més de detall.

3. L'Scratch a l'aula de matemàtiques (I): l'alumne és usuari

En la primera experiència, l'alumne només és usuari de l'activitat creada amb l'Scratch, i, per tant, pot ser una bona manera d'introduir-lo als alumnes i motivar-los a partir del fet de mostrar allò que es pot fer en aquest entorn de programació. Els *Jocs numèrics amb l'Scratch* es poden trobar com un element de l'ARC. Aquests jocs numèrics són la versió electrònica de trenta jocs recollits per Ignasi del Blanco com a actualització de diferents jocs numèrics clàssics o originals seus i estan adreçats principalment al cicle superior de primària i a 1r i 2n d'ESO. La versió electrònica permet poder treballar amb el mateix joc amb tots els alumnes de l'aula sense necessitat de tenir 25-30 còpies físiques del mateix joc. A les sessions obertes de formació del professorat: els recursos informàtics a les classes de matemàtiques del 14 i 15 de gener de 2011 a la Universitat Pompeu Fabra, es va presentar una experiència didàctica duta a terme a partir del joc numèric número 7 amb un grup d'alumnes de diversitat de 2n d'ESO de l'INS Milà i Fontanals al Raval de Barcelona. L'activitat consistia no tan sols a buscar una solució de la situació presentada, sinó també a raonar quines eren totes les solucions d'aquest joc numèric. En el material de la jornada es pot trobar un resum de l'activitat duta a terme.

4. L'Scratch a l'aula de matemàtiques (II): l'alumne programa

La segona experiència, *Introducció a la programació amb Scratch*, s'ha dut a terme en una sessió del projecte ESTALMAT (Estímul del TALent MATemàtic). Aquest projecte reuneix en cada promoció 25 nois i noies d'entre 12 i 15 anys de tot Catalunya que durant els dissabtes de dos cursos realitzen activitats matemàtiques en sessions de tres hores. El curs 2010-2011, va ser el segon any que, juntament amb el professor Antoni Gomà, vam impartir una sessió de primer curs per introduir-los a l'Scratch. Una adaptació en versió web del material que fem el podeu trobar també com un element de l'ARC. Al llarg de les dues hores i mitja de treball efectiu de la sessió, els alumnes es van introduint a les característiques del llenguatge i de l'entorn de programació a partir de la proposta de diferents programes de dificultat creixent. Un dels primers programes que se'ls planteja és el dibuix d'un triangle equilàter; tot seguit se'ls planteja que modifiquin el programa per dibuixar un quadrat i després que pintin el polígon regular de tants costats com introdueixi l'usuari. D'aquesta manera sorgeix, en un entorn significatiu per a l'alumne, la necessitat de crear variables. Tal com indica Resnick, a partir de la situació proposada, és l'alumne qui vol fer una modificació del programa per a la qual necessita el concepte de variable i així poder ampliar-ne les funcionalitats. A continuació trobem el codi del programa realitzat per un dels alumnes d'ESTALMAT i el resultat de la seva execució per a un polígon de set costats.

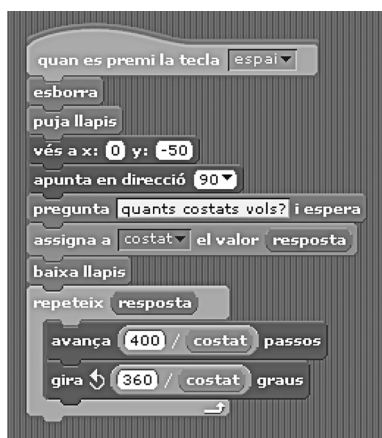


Figura 1. Codi del programa Polígon_regular.sb realitzat per un alumne de 1r d'ESTALMAT del curs 2010-2011.

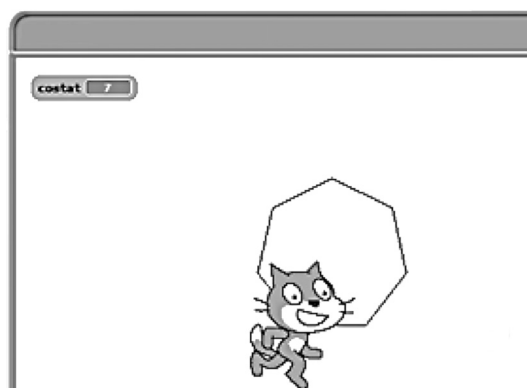


Figura 2. Execució del programa Polígon_regular.sb realitzat per un alumne de 1r d'ESTALMAT del curs 2010-2011 per a 7 costats.

5. L'Scratch a l'aula de matemàtiques (III): l'alumne crea l'entorn d'un problema

La tercera activitat, *Creem un problema amb l'Scratch*, es va dur a terme amb el mateix grup d'alumnes d'atenció a la diversitat amb què es va treballar la primera activitat, i, per tant, ja havien treballat amb l'Scratch, tot i que només a nivell d'usuari. El grup d'aquests alumnes està dins del projecte 1x1 i, per tant, disposàvem d'un ordinador per persona així com de pissarra digital a l'aula. Aquesta activitat es va emmarcar en les darreres sessions de la unitat didàctica de proporcionalitat i percentatges. En primer lloc es va dedicar una sessió a la reflexió sobre els llenguatges de programació, a la introducció de les principals característiques de l'Scratch i de l'entorn de programació. La situació introductòria

de la unitat didàctica havia estat la relació de proporcionalitat directa que ens trobem quan anem a comprar entre els quilograms de fruita i el seu preu/kg. A partir d'aquesta situació ja treballada a l'aula, es va plantejar als alumnes que elaboressin un programa (de nom mercat) que escenifiqués la situació presentada en anar a comprar. Aquesta primera activitat es va presentar de manera força pautada i en primer lloc se'ls va demanar que creessin l'escenari; per facilitar la tasca encomanada, se'ls van penjar el parell d'imatges necessàries en el *moodle* del curs i, a més a més, se'ls va mostrar un model de l'escenari que havien de realitzar (figura 3):

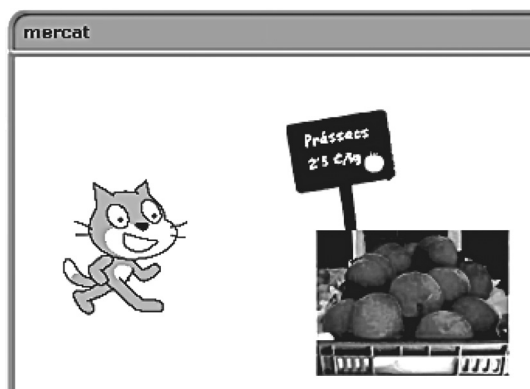


Figura 3. Escenari del programa mercat.

Després se'ls va proposar que creessin el codi que calculés el preu en cas de comprar dos quilograms de préssecs. Tot aquest procés el van anar fent en grup classe i la pissarra digital va ser de gran ajuda, ja que per programar amb l'Scratch cal, essencialment, «arrossegar i deixar anar» (*drag&drop*). El fet que les comandes estiguin agrupades per colors també facilita en gran mesura la seva localització per part dels alumnes. A partir d'aquest programa inicial se'ls va plantejar que el modifiquessin perquè demanés a l'usuari quants quilograms de fruita volia i que a partir de la resposta del comprador aleshores calculés i digués el preu que s'havia de pagar. Aprofitant la funció de pantalla completa es va poder mostrar als alumnes què havia de fer el programa sense necessitat de mostrar-los el codi. Així, també en aquest cas, a partir de la situació plantejada va sorgir la necessitat del concepte de variable (amb aquests alumnes encara no s'havia introduït el llenguatge algebraic) i se'ls va mostrar com crear variables amb l'Scratch.

La majoria dels alumnes van acabar creant un programa com el següent:

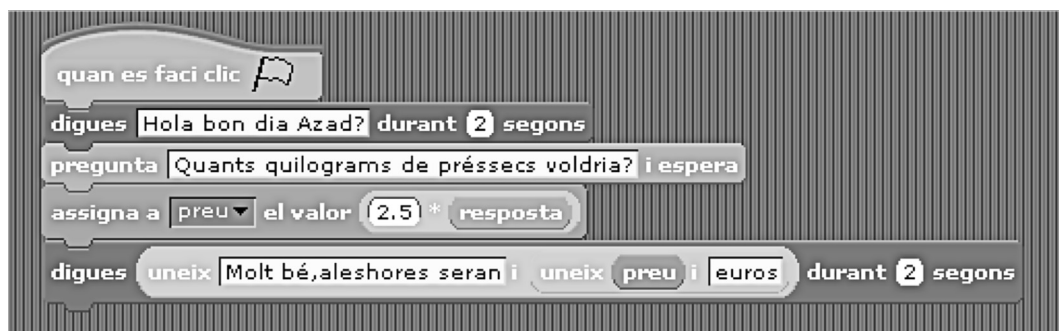


Figura 4. Codi mercat.sb realitzat per un alumne.

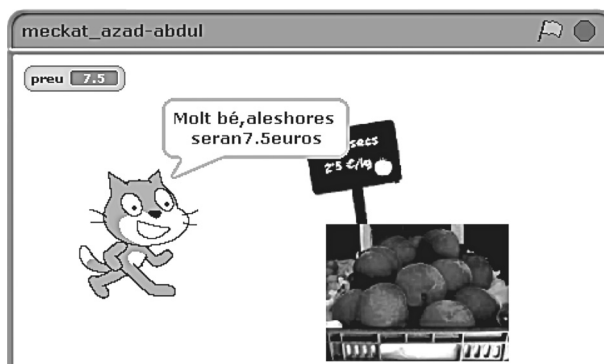


Figura 5. Execució del programa mercat.sb realitzat per un alumne per a 3 quilograms de préssecs.

A partir d'aquest programa se'ls van proposar dues activitats:

- *Activitat 1:* modificar el programa del mercat per tal que hi hagués dos productes: pomes i préssecs. El comprador havia de donar els quilograms de cadascun dels dos productes i aleshores calcular i donar el preu final.
- *Activitat 2:* com a activitat de síntesi, pensar un problema que involucrés alguns dels conceptes treballats al llarg de la unitat (proporcionalitat directa o percentatges) i que el programessin amb l'Scratch.

Els resultats de les activitats proposades han estat irregulars. La primera activitat va ser relativament assequible per als alumnes, malgrat les dificultats mostrades per gestionar la descàrrega de les imatges, la creació de noves variables, la introducció de les variacions en el programa i finalment el procés de penjar la nova versió del programa a la corresponent tasca del *moodle*. Es van observar força dificultats amb el maneig de l'ordinador i en tasques que suposadament havien de dominar, com trobar els fitxers que havien estat prèviament descarregats i guardats per ells. Lluny de trobar unes destreses àmplies i generalitzades, tal com es pregona sota l'etiqueta de *nadius digitals* de Prensky, la realitat va ser més en la línia de Bennett, Marton i Kervin (2008). Segons aquests autors, sota l'expressió *nadius digitals* es recull l'assumpció que «els joves de la generació de nadius digitals posseeixen uns coneixements i unes habilitats sofisticades sobre les tecnologies de la informació» (pàg. 777), i, en canvi, els pocs estudis empírics que hi ha no mostren resultats que englobin tota una generació de la mateixa manera sota el comú denominador de tenir molta destresa en el maneig de les noves tecnologies, sinó que més aviat els resultats suggereixen que la freqüència i la natura en l'ús d'internet «difereix entre els grups d'edat i l'entorn socioeconòmic» (pàg. 778).

La segona activitat proposada era la que tenia més interès, sobretot des del punt de vista competencial, perquè suposava la realització d'una creació pròpia que no tan sols involucrava posar en context continguts matemàtics, sinó també el treball de la competència lingüística per escenificar la situació que volguessin plantejar (en aquest grup de diversitat hi ha alumnes de segon any d'aula d'acollida de llengües no romàniques i per això és un grup reduït de 15-20 alumnes). Malauradament, aquesta segona activitat només la van completar dos dels quinze alumnes del grup, tot i que la majoria dels alumnes van treballar en la proposta.

6. Conclusions

A partir de les diferents experiències en la introducció del llenguatge de programació Scratch a l'aula de matemàtiques amb diferents grups d'alumnes de 1r i 2n d'ESO, es fan les observacions següents:

No es pot donar per suposat que tots els alumnes tenen grans destreses en el domini de les TIC pel seu any de naixement, com ens poden suggerir expressions com *nadius digitals*, sinó que, seguint Bennett, Marton i Kervin (2008), la situació és força més complexa i, tot i haver-hi pocs estudis empírics, aquests mostren una realitat amb alumnes amb diferents nivells de destresa segons múltiples factors.

Aquestes possibles dificultats han de ser previstes i tingudes en compte a l'hora de dissenyar l'activitat, perquè no suposin un escull insalvable que impedeixi resoldre la tasca encomanada a l'alumne.

En les diferents experiències dutes a terme, els alumnes de 1r i 2n d'ESO s'han adaptat amb rapidesa al maneig de l'Scratch com a eina per programar gràcies a estratègies com l'agrupació de les comandes per colors que facilita en gran mesura la seva localització.

Plantejar la programació de problemes matemàtics amb l'Scratch pot ser una bona oportunitat per introduir l'ús de les variables a 1r o 2n d'ESO en un context significatiu i amb una eina concebuda especialment per a alumnes d'aquestes edats, tal com ens exposa Resnick (2007).

A partir de les activitats proposades, hi ha encara molt de potencial de l'eina explorar, com per exemple treballar l'escenificació amb l'Scratch de situacions de la vida real que impliquin matemàtiques tant a l'aula de matemàtiques com a altres aules (aules de llengües, incloent-hi l'aula d'acollida).

Agraïments

Agraeixo la inestimable col·laboració d'Antoni Gomà tant en la realització de les diferents experiències exposades com en les seves aportacions i els seus comentaris a aquest article.

Bibliografia

Bennett, S., Maton, K. i Kervin, L. (2008). The «digital natives» debate: A critical review of the evidence. *British Journal of Educational Technology*, 39(5), 775-786.

[URL: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1467-8535.2007.00793.x/pdf>]
(consultat 27/06/2011)

Maloney, J. et al. (2004). Scratch: A Sneak Preview. Second International. Dins *Conference on Creating, Connecting, and Collaborating through Computing*. Kyoto, Japan, 104-109.

McNerney, T. S. (2004). From turtles to Tangible Programming Bricks: explorations in physical language design. *Personal and Ubiquitous Computing*, 8(5), 326-337.

Papert, S. (1993). *The Children's Machine: Rethinking School in the Age of the Computer*. New York: Basic Books.

Resnick, M. (2007). Sowing the seeds for a more creative society. *Learning and Leading with Technology*, 35(4), 18-22.

[URL: <http://web.media.mit.edu/~mres/papers/Learning-Leading-final.pdf>] (consultat 27/06/2011)

Resnick, M. (2002). Rethinking Learning in the Digital Age. In The Global Information Technology. Dins G. Kirkman (ed.). *Report: Readiness for the Networked World*. Oxford: Oxford University Press.

Resnick, M. (1998). Technologies for Lifelong Kindergarten. *Educational Technology Research and Development*, 46(4).

Recursos web

Arc. Aplicació de Recobriment Curricular:

<http://apliense.xtec.cat/arc/> (consultat 27/06/2011)

Lifelong Kindergarten: relació d'articles del grup.

<http://llk.media.mit.edu/papers.php> (consultat 27/06/2011)



El concepte de límit de Newton a Cauchy: entre la geometria i l'àlgebra i el paper dels signes [Primera part]

Gert Schubring

Resum

El concepte de límit és constitutiu per al càlcul diferencial i integral. Això no obstant, la seva aparició històrica no s'ha estudiat prou acuradament. Newton fou el primer que l'introduí com una alternativa a les aproximacions infinitesimals, però sense reflexions conceptuais i sense cap tècnica operacional es mantingué vinculat als contextos geometricocinètics.

Aquest article estudia el desenvolupament lent del concepte durant el segle divuit, i en particular les primeres definicions i el seus passos graduals vers l'algebraització. Gràcies a l'apropament a una recerca de les aportacions al si de les comunitats matemàtiques en general, ens revela que autors aparentment marginals han fet avenços considerables cap a una teoria operacional algebraitzada dels límits. Tanmateix, aquest procés mostra que no és, en absolut, continu i que depèn d'epistemologies que difereixen d'un país — i d'una comunitat — a un altre. L'anàlisi finalitza contrastant dues aproximacions del 1820 que revelen aquestes visions diferents: Cauchy a França i Dirksen a Alemanya.

Aquesta primera part de l'article presenta el marc conceptual del que es coneix com a procés d'algebraització i s'hi analitza de quina manera Newton presenta el procés en el concepte de límit — com l'usa Maclaurin com a resposta a Berkeley i d'Alembert a l'*Encyclopédie* — per endinsar-se després en el límit com a aproximació i es tanca amb els inicis de l'algebraització d'aquest nou concepte: el límit. Obre la porta a la segona part que publicarem en el proper número.

Abstract

The concept of limit is constitutive for the differential and integral calculus. Yet, its historical emergence has not been closely studied. As an alternative to infinitesimal approaches, it had first been introduced by Newton, but without conceptual reflections and without an operational technique; it remained tied to geometrical-kinematical contexts. The paper studies the slow development of the concept during the eighteenth century, and in particular the first definitions and their gradual steps towards algebraization. Thanks to the approach to investigate the contributions within the contemporaneous mathematical communities at large, apparently marginal authors reveal to achieve considerable steps towards an algebraized operational theory of limits. Yet, this process proves not to be a continuous one and depending on epistemologies differing over various countries and communities. The analysis finalizes in contrasting two approaches of the 1820s revealing such differing visions: Cauchy in France and Dirksen in Germany.

*This first part of the paper presents the conceptual frame of that known as the algebraization process and analyzes which way Newton presents this process in the concept of limit — how to uses Maclaurin in response to Berkeley and d'Alembert in the *Encyclopédie* — to enter after in the limit as approach. It closes with the start of the algebraization of this new concept: the limit. It opens the door to the second part which will publish them in the next issue.*

En la historiografia de la matemàtica hi va haver un període en el qual tots els descobriments matemàtics essencials s'atribuïen als grecs de la Grècia clàssica. Evidentment, el càlcul diferencial i integral plantejava un problema a aquesta aproximació ahistòrica, produïda per l'admiració a l'antiguitat clàssica. S'intentava de presentar el mètode d'exhaustió com quelcom equivalent.

De fet, aquest mètode només és un procediment de demostració i no proporciona cap marc conceptual per estudiar el procés de pas al límit, cosa que involucra l'infinit. Una de les formulacions clàssiques la dona Euclides en la proposició x, 1:

Donades dues magnituds desiguals, si de la major traiem més de la meitat, i del que en queda més de la meitat, i si aquest procés el repetim contínuament, assolirem una magnitud més petita que la menor de les dues magnituds donades (citat a Edwards 1979, pàg. 16).

Aquests mètodes per calcular límits eren rigorosos, però els matemàtics que els usaven, com ara Euclides, Arquimedes i altres matemàtics grecs, evitaven, en general, processos infinits, i en cap cas no imaginaven el pas al límit com una cosa que s'acomplís actualment. Aleshores, per tal d'evitar l'ús i l'acceptació de l'infinit, tendien a desenvolupar elements crucials d'una certa àlgebra de les desigualtats.

Avui estem convençuts que la primera conceptualització rigorosa i extensa del límit ha estat elaborada per Cauchy. Encara que s'admeti que matemàtics diversos del segle XVIII van efectuar algunes reflexions i aplicacions a la noció de límit, els resultats exitosos assolits per Cauchy s'han presentat com una innovació fonamental i com una contribució personal (Grabiner 1981, pàg. 9). Hom considera que la clau característica d'aquesta conceptualització rigorosa és l'algebraització dels conceptes subjacents, fet que es detecta, en particular, per l'ús d'una certa àlgebra de les desigualtats.

Tanmateix, de fet, mai no s'explica què significa, en aquest camp conceptual, el terme *algebraització*. Desitjaria, doncs, reflexionar sobre l'algebraització com a procés i analitzar les contribucions fetes pels matemàtics del segle XVIII d'acord amb aquesta categoria. El paper dels símbols, dels signes, se'ns mostrarà com el pivot de tot el procés del desenvolupament d'algebraització. A més, se'ns farà palès, amb tota claredat, que el desenvolupament conceptual no s'esdevingué ni d'una manera contínua ni tampoc unidireccional.

Per tal d'analitzar millor el procés d'algebraització del naixement de l'àlgebra, recordaré breument els tres estadis-model de Nesselmann relatius a l'evolució de l'algebraització. Amb tota seguretat, aquest model, proposat l'any 1842, no és un model generalment vàlid, però és una eina tan útil com heurística:

- L'estadi primer i inferior s'anomena àlgebra *retòrica*: el procés matemàtic sencer, amb totes les seves operacions, s'expressa amb paraules. És a dir, ni s'han introduït ni tampoc no s'empren símbols. Són les paraules del llenguatge propi les que serveixen per expressar el significat matemàtic.
- En el segon estadi, hi ha l'àlgebra *sincopada*: la presentació dels resultats matemàtics és també bàsicament retòrica, però, ara, s'introdueix, per als conceptes i les operacions que s'usen amb freqüència, sempre la mateixa abreviació —en lloc de les paraules senceres. Tanmateix, s'hauria de ser prou hàbil per retornar, en qualsevol moment, de l'abreviació al terme complet original.
- El tercer estadi, el de l'àlgebra *simbòlica*, representa totes les formes i expressions amb un llenguatge de símbols, constituït independentment del llenguatge normal. Pràcticament no hi ha retorn de les operacions fetes amb símbols al text retòric (Nesselmann 1842, pàg. 302).

1. Newton

El primer ús del concepte de límit per al càlcul es troba en l'obra de Newton. De fet, com és ben conegut, Newton emprà diversos mètodes com a fonaments del càlcul nou. La noció de límit apareix en la seva aproximació via el que s'ha anomenat raons primera i darrera.

L'avantatge i l'atractiu d'aquest mètode era, con accentuà Newton, que usava només quantitats finites, i així aconseguia un acord amb la metodologia geomètrica dels grecs, la qual cosa el salvava de la crítica.

Amb quantitats finites [...] instituir l'anàlisi d'aquesta manera i investigar les raons primeres i darreres de les quantitats finites ixents i evanescents està en harmonia amb la geometria dels antics, i volia mostrar, a més, que, en el mètode de les fluxions, no hi ha cap mena de necessitat d'introduir, al si de la geometria, figures infinitament petites (Newton 1969, 1929).

Newton, en el seu *Principia Mathematica* (1687), reflectia explícitament la idea continguda en el concepte de les *raons primeres i darreres* per determinar, en el cas de les variables depenents del temps, el límit al qual les variables s'aproximen en un cert instant —i que, des del seu punt de vista, aconseguen d'assolir— com un estudi dels límits, i, per això, introduïa el terme de *limes*.

Newton introduïa aquest mètode com una alternativa als mètodes geomètrics grecs, amb el propòsit d'evitar les llargues demostracions *ad absurdum*, i com una alternativa al mètode dels indivisibles: la hipòtesi dels indivisibles semblava massa ofensiva («*durior*»), deia, i el mètode li semblava que no era suficientment geomètric. L'alternativa era determinar les sumes últimes, respectivament raons, de quantitats evanescents, respectivament de les primeres quantitats generades, i això consistia precisament a determinar els límits de les sumes respectivament de les raons:

Això és, [reduir] els límits a aquelles sumes i raons (Newton 1969, pàg. 38; org. 1972, pàg. 87).

I emfasitzà el seu propi concepte de continuïtat afirmant que no comprenia els indivisibles, sinó que concebia quantitats evanescents divisibles; cosa que no significa pas l'existència de les parts últimes, sinó:

[no] indivisibles, sinó quantitats divisibles evanescents; no les sumes i les raons de determinades parts, sinó sempre els límits de les sumes i les raons (*ibid.*).

Aquí Newton posà cura a emfasitzar que la seva pròpia expressió *raons últimes* significava efectivament *límits*, els quals eren aproximats més i més per les raons:

Aquestes raons últimes a les quals les quantitats s'esvaeixen no són pas, de fet, les raons de les quantitats últimes, sinó els límits als quals les raons de les quantitats s'apropen més que qualsevol diferència donada (*ibid.*, pàg. 39; org. pàg. 88).

Simultàniament, Newton declara, doncs, que els límits existeixen, i que examinar aquests valors constitueix una tasca genuïnament geomètrica perquè els límits estan fixats i determinats:

I com que aquests límits són certs i definits, determinar-los és un problema estrictament geomètric (*ibid.*, pàg. 39; org. pàg. 87f.).

Finalment, Newton dóna ja una pista del concepte del procés de matematització del límit que més endavant va ser formalitzat dient que les quantitats infinitament petites són variables especials; és a