

31

*nou*biaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Juny 2012



Consell de Redacció:
Mequè Edo / Josep Pla i Carrera (coordinadors)
Marianna Bosch
Juanjo Cárdenas
Joan Carles Ferrer
Romà Pujol
Manuel Udina
Josep Lluís Solé
Manel Sol

© dels autors dels articles

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Pau Gargallo, 5
08028 Barcelona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat

noubiaix@gmail.com
sites.google.com/site/noubiaix



Periodicitat: semestral
Preu d'exemplar ordinari: 12 €

Fotografia de la portada:
Hexàgons de mel, de Teresa Gutiérrez

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012

Impressió: Gráficas Rey

Publicacions i Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 530
Fax: 934 035 531
comercial.edicions@ub.edu
www.publicacions.ub.edu

sumari

articles

4 El Màster de Formació del Professorat de Secundària:
especialitat Matemàtiques
Joan Miralles de Imperial Llobet i Pelegrí Viader Canals

8 Reflexions obertes d'un neòfit en Didàctica de la
Matemàtica
Josep Pla i Carrera

23 Més sobre conjectures i demostracions
George Pólya

27 Lluís Antoni Santaló i Sors (1911-2011)
Claudi Alsina

29 L'adquisició de competències matemàtiques d'alumnes de
primària en contextos de jocs de taula i resolució de
problemes
Edelmira Badillo, Mequè Edo i Jordi Deulofeu

44 La construcció del pentàgon regular de l'*Almagest*.
Un primer pas en la ruta cap a les estrelles
Carles Ignasi Gómez Ruiz

62 Intuïcions dels alumnes de secundària sobre la probabilitat.
Una recerca sobre la influència del treball empíric en el cas
d'un esdeveniment compost
Fermí Rojo Cort i Jordi Deulofeu Piquet

75 Jocs de cartes i matemàtiques
Lluís Sabater Anticó

seccions

80 Per pensar un minut

84 Sabies que...

87 Sistemes de referència
Marta Berini

89 Cròniques

91 El racó del *creamat*



articles
articles



articles

El Màster de Formació del Professorat de Secundària: especialitat Matemàtiques

Joan Miralles de Imperial Llobet

Universitat Pompeu Fabra

Pelegrí Viader Canals

Universitat Pompeu Fabra

1. Els precedents

Molts dels lectors del *Nou Biaix* són professors de secundària. Per a molts d'ells, l'accés a la professió es devia fer per una d'aquestes dues vies: a través del CAP o a través de tenir un mínim de dotze mesos d'experiència professional en algun centre de secundària reconegut.

La via del CAP era la més habitual. Molts estudiants d'últim curs de llicenciatura cursaven el CAP durant uns quants caps de setmana i feien les pràctiques preceptives en algun institut públic de secundària. El CAP l'organitzava l'ICE de les universitats. Era una activitat educativa rendible atès que requeria una estructura simple: la gran majoria de les classes teòriques eren magistrals i les pràctiques en centres educatius eren curtes i, en alguns casos, sotmeses a pocs controls. La part teòrica consistia, en moltes ocasions, en xerrades sobre la psicologia de l'aprenentatge, algunes pinzellades sobre la problemàtica de l'adolescència i sobre l'organització de centres educatius, el currículum i la normativa legal aplicable a la secundària. Sobre matemàtiques, l'ensenyament de les matemàtiques i les tècniques que cal dominar per poder exercir de professor de matemàtiques, se'n parlava més aviat poc.

La conseqüència de tot plegat era un curs força teòric, amb una càrrega important de rutina i una sensació de «tràmit» que calia superar per tal de poder apuntar-se a les llistes d'interinatge i presentar-se a oposicions. La sensació dominant era que la didàctica de les matemàtiques era una disciplina amb poca entitat pròpia i que per fer classe n'hi havia prou amb les que s'aprenien a la facultat. La resta ja vindria amb l'experiència.

De fet, per molts dels professionals que avui dia estan reconeguts com a grans professors de la secundària del nostre país, aquest va ser el seu paradigma per iniciar-se en la professió. Molts expliquen anècdotes de com els primers anys les seves classes al BUP o més tard l'ESO i el batxillerat van ser

un «desastre» des del punt de vista dels resultats d'aprenentatge dels seus estudiants. Aquests, però, almenys van saber reconèixer que la rèplica del que havien vist a les facultats de matemàtiques constituïa un error i es traduïa en uns resultats força decebedors per part del gruix dels estudiants que rebien les seves classes. Com que l'assignatura era matemàtiques i ja se sap que són difícils, ningú no protestava i qui dia passa, any empeny... No sabem quants d'aquells professors continuen, molt temps després, ensenyant de la mateixa manera sense haver copsat el fet que les generacions d'estudiants que passen per les seves aules en surten sense obtenir cap benefici pel que fa l'aprenentatge de les matemàtiques.

La realitat dels últims anys, amb la incorporació massiva de la immigració i la consciència que l'educació obligatòria ha d'aconseguir alguns resultats objectivament útils per a la societat, ha fet canviar moltes coses.

2. El nou Màster

Feia temps que molts sectors de l'ensenyament reclamaven un canvi radical en la manera d'accedir a la professió. Calia una manera d'iniciar-se a la professió que tingués en compte la realitat dels centres educatius i que dotés els futurs professors de prou eines per afrontar la complexitat d'una aula actual. Al nostre entendre, calia que aquesta iniciació la conduïssin en gran mesura els mateixos professors de secundària, i el seu èxit havia d'estar lligat directament a aquesta participació. L'objectiu declarat de la substitució del CAP pel Màster de Formació del Professorat de Secundària ha estat donar resposta als nous i als vells reptes que cal afrontar per donar un servei educatiu de qualitat.

Els alumnes del Màster tenen procedències molt variades. En les dues edicions, només un petit percentatge prové d'estudis de matemàtiques o física. La majoria dels estudiants són enginyers, de branques molt diverses; alguns són arquitectes, i un nombre important prové dels estudis d'economia i empresa. No disposem de dades concretes però, de fet, a la secundària actual la distribució del professorat de matemàtiques deu ser semblant a la que acabem d'esmentar. El context de crisi econòmica contribueix enormement al fet que molts enginyers, arquitectes o economistes sense feina en els seus camps vegin l'ensenyament a secundària com una sortida laboral. Això incrementa la dificultat de la tasca del Màster: la manca de motivació de bona part dels estudiants que hi accedeixen. El Màster ha d'aconseguir també que aquests estudiants amb una baixa motivació matemàtica, futurs professors, vegin les matemàtiques des d'una altra perspectiva i aprenguin a estimar-les i a transmetre-les de manera profitosa. No ens podem enganyar: el Màster no pot ensenyar matemàtiques a qui no en sap, però pot fer veure a gent intel·ligent i amb formació com es pot preparar per a saber què són i com s'han d'ensenyar. I un element central per donar resposta a aquests reptes és el pràcticum del Màster.

3. El paper del pràcticum

En poques paraules: una bona part de l'alumnat que s'inscriu al Màster de Formació del Professorat en l'especialitat de matemàtiques limita els seus coneixements de la matèria a allò que li van ensenyar a secundària més les pinzellades de coneixements matemàtics que pot haver adquirit en carreres en què les matemàtiques són instrumentals. A més, en la majoria dels casos aquests alumnes no han tingut cap contacte amb l'ofici de professor més enllà del punt de vista com a alumnes. Un dels pilars de la formació que s'ofereix, per tant, consisteix a posar-los en contacte amb la realitat de l'ofici de professor mitjançant el pràcticum que, d'aquesta manera, es converteix en l'eix central del Màster.

El pràcticum, juntament amb el treball final de màster que hi està íntimament relacionat, té un pes d'aproximadament (depèn de cada universitat) vint crèdits ECTS sobre el total de seixanta de què consta el Màster. Per tant, el seu pes conceptual es reflecteix en el pes de dedicació que s'hi demana. Considerem el pràcticum com el lloc on es contrasten els coneixements que s'han rebut en les matèries més teòriques, alhora que s'aprèn l'ofici de professor i es contrasta amb la visió prèvia que l'alumne podia tenir sobre el que significa aquest ofici. Amb aquesta finalitat, l'organització del Màster assigna a l'alumne un centre de secundària on realitzarà el seu pràcticum.

És des del Màster que s'escullen els centres que seran formadors dels nostres alumnes, la formació pràctica dels quals té dues figures centrals: la del coordinador de centre, que és qui organitza l'alumnat en pràctiques, i el mentor, que és el professor responsable de cada alumne concret i n'ha de fer el seguiment. Amb aquests centres es treballen prèviament, de manera conjunta, els objectius i les competències que cal que els seus futurs alumnes assoleixin. Es tracta d'un treball estructurat i aprofundit, en què cal adaptar els objectius que cal que l'alumne assoleixi a la realitat concreta de cada centre. Sobre aquesta base i segons el perfil de cada alumne, la coordinació del Màster assigna cada alumne a un centre.

Per tal d'aconseguir aquests objectius, el pràcticum s'estructura en tres fases. En la primera, la *fase d'observació*, es pretén que l'alumne conegui l'estructura d'un centre de secundària, i comenci a participar de la vida acadèmica. A més, en contacte amb el seu mentor, comença a participar en la preparació de les classes concretes i en la seva realització. En la segona fase, *d'intervenció acompanyada*, l'alumne contrasta tot allò que va aprenent en els cursos teòrics amb la realitat concreta de les aules, on col·labora amb el seu mentor en la preparació i l'execució de la seva docència. Al llarg de darrera fase, *d'intervenció autònoma*, l'alumne prepara i porta a la pràctica una unitat didàctica, sota la supervisió del seu mentor.

Hem concebut el pràcticum com una *pluja fina*: comença poc després de l'inici del màster i, quan acaba, l'alumne ja està en plena fase d'elaboració del seu treball final, que és una conseqüència directa de la feina feta durant l'estada al centre; que l'adquisició dels fonaments teòrics es contrastin simultàniament amb la pràctica és un element clau per a la formació del futur professor de secundària.

4. Dificultats i reptes de futur

Tot i que feia molts anys que se'n parlava, el Màster es va engegar de manera precipitada i sense haver definit tots els paràmetres necessaris per al seu funcionament. Alguns s'han pogut corregir al llarg del primer any, però encara arrosseguem algunes improvisacions. A tall d'exemple: la manca d'acord entre els departaments de la Generalitat de Catalunya responsables d'Universitats i d'Educació, sumada a l'error d'identificar les pràctiques de la Formació de Mestres amb el pràcticum del Màster, va tenir com a conseqüència la decisió de no retribuir la feina del professorat de secundària que participa en la formació del futur professorat. Si hi afegim el fet que altres comunitats autònomes sí que la retribueixen, el resultat va ser que molts professors van decidir no participar-hi, amb el consegüent empobriment de l'oferta. Des de la universitat encara no hem perdut l'esperança que es corregeixi aquesta anomalia difícilment justificable.

L'especialitat de matemàtiques té, a més, com ja s'ha indicat més amunt, un problema estructural afegit: la immensa majoria dels aspirants a professors de matemàtiques de secundària procedeixen de titulacions en què les matemàtiques són estrictament instrumentals. Enginyers, arquitectes, informàtics i llicenciats en administració i direcció d'empreses són majoria a les nostres aules, la qual cosa té

com a corol·lari la necessitat d'impartir també coneixements de matemàtiques simultàniament amb la seva didàctica. Si mirem les incorporacions de professorat de matemàtiques als centres docents durant aquests darrers anys, podem inferir que es tracta d'una tendència creixent a què haurem de fer front.

De cara al futur immediat, se'ns plantegen tres reptes. El primer és la coordinació entre els màsters de formació del professorat de matemàtiques de Catalunya. Per caminar en aquesta direcció, aquest curs hi haurà una setmana en què l'alumnat de totes les universitats assistirà cada dia a una de diferent, on s'impartiran conferències i es realitzaran tallers sobre temes específics. Esperem que aquesta intercomunicació entre l'alumnat suposarà un enriquiment per a la seva formació.

El professorat del Màster és, de manera àmpliament majoritària, professorat de secundària. Això garanteix la formació dels nostres alumnes en l'ofici de professor que, sense oblidar la teoria didàctica, és el nostre objectiu central. Tanmateix tenim el repte de millorar la implicació del professorat mentor, que ja col·labora en el pràcticum, en l'elaboració per part de l'alumnat del treball final de màster. Aquest treball no ha de ser una tesina, sinó el desenvolupament d'aspectes didàctics concrets que posin de manifest allò que s'ha après al llarg del curs.

El tercer repte és més difícil d'assolir, però d'això dependrà en bona part la possible millora que ha de suposar el màster en la formació del professorat. En el futur immediat el professorat de matemàtiques de secundària estarà format per persones que hauran rebut, majoritàriament, una formació matemàtica universitària altament deficient. A més d'ensenyar-los l'ofici de professor, el nostre repte consistirà a transmetre'ls l'amor per les matemàtiques i la seva bellesa. Només superant aquest repte podrem afirmar que formem persones que compleixen el doble objectiu de ser professors de secundària i de transmetre unes matemàtiques útils i interessants als seus alumnes.

.....

Reflexions obertes d'un neòfit en Didàctica de la Matemàtica

Josep Pla i Carrera

Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística
Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona

Resum

La idea principal d'aquestes línies és reflexionar sobre la importància de la *història de la matemàtica* en la formació dels docents d'ensenyament preuniversitari i en l'adquisició d'una cultura totalment irrenunciable en aquesta formació.

Abstract

The main idea of these lines is to reflect on the importance of the history of mathematics in teacher training of pre-university education and also in the culture's acquisition culture completely essential in this training.

En aquest complicat edifici construït pels mestres de la ciència matemàtica, no n'hi ha prou amb afirmar la solidesa de cada part de l'edifici i admirar la feina del constructor; hem de comprendre'n també el pla arquitectònic.

Ara bé, per comprendre el pla s'han de veure de cop totes les parts, i només la intuïció ens proporciona els mitjans per copsar, de cop, la totalitat.

HENRI POINCARÉ¹

En aquesta nova etapa de la revista *Nou Biaix* —abans *Biaix*— m'ha semblat oportú fer una reflexió personal del *valor docent de la història de la matemàtica* que, al meu entendre, és indiscutible i indefugible. I ho vull fer defensant alhora el gran *valor cultural* d'aquest coneixement entès com a formació.

Entenc per «valor cultural» el *pòsit* que queda quan d'alguna manera el foc més viu s'ha apavaigat. Recordem les paraules de Johann Heinrich Pestalozzi:

1. Vegeu Poincaré (1900, p. 125).

La cultura té el poder d'unir els homes com a individus, independents i lliures, a través de la llei i de l'art. Les civilitzacions, desproveïdes de cultura, els uneixen, amb la coerció, en una massa sense cap consideració per la independència, la llibertat, la llei i l'art.²

Aquest valor cultural —complementari del valor professional— és un dels grans oblidats a casa nostra i en la nostra llengua —el català— quan es tracta de la ciència i de la tecnologia. A més, en la matemàtica, a diferència de les ciències positives, els resultats establerts en el passat gairebé mai no esdevenen obsolets. Ben al contrari, són un terreny adobat per a la docència i per a l'aprenentatge perquè aporten idees, problemes, conjectures, demostracions, suggeriments, possibilitats de generalitzacions, etc., de nou encuny. La matemàtica és, d'alguna manera, una disciplina històrica —una disciplina amb història— viva en el sentit que mai no esdevé caduca. Aquesta vivesa, juntament amb el procés històric, proporciona moltes eines d'un enorme valor didàctic i —com veurem— són una font indiscutible per enriquir-nos.

Però aquests fets s'han oblidat, massa sovint, tant en el bagatge cultural català com en els currículums i programes docents de tots els graus i categories. Sortosament, molts docents —i, en particular, els que «saben» matemàtica perquè l'han apresat amb seriositat— han aconseguit pal·liar l'efecte de les polítiques formatives i educatives de la matemàtica tan erràtiques i errònies.³

1. Dels docents matemàtics

En aquest context, doncs, vull posar en relleu, amb consideracions adients, la *necessitat* que els *docents de matemàtica* de tots els nivells —però d'una manera molt particular en els nivells d'ESO i Batxillerat que precedeixen els estudis universitaris— *tenen* o haurien de tenir del *coneixement de la història de la matemàtica* i d'alguns del seus textos més paradigmàtics.

El fet central i nuclear per ser un bon docent d'una matèria —sigui la que sigui— és *estar ben format en allò que s'ha d'ensenyar*, és a dir, conèixer-ne una part important i de forma sòlida. És completament impossible —per més esforços addicionals de formació en la línia metodològica i pedagògica que després es facin— ensenyar allò que hom no sap i que no estima, perquè ho ensenyarà *sense passió*, que és el tret més important dels ingredients que fan que un docent esdevingui un mestre, en el sentit més noble del terme.⁴ Els esforços que es facin per suplir la mancança de coneixements resultaran tan sols pal·liatius —i, en molts casos, inútils o poc fructuosos i, en conseqüència, molt cars.⁵ Són esforços per apuntalar quelcom que s'ha construït en un terreny ben pantanós i gens segur. Si no s'accepta aquesta premissa —com ja he dit, totalment personal—, l'anàlisi que faig en

2. Citat per Jung (1945, volum 16, paràgraf 227, n. 10).

3. És realment incomprensible des d'un punt de vista acadèmic —novament les qüestions polítiques s'imposen per damunt de les qüestions acadèmiques— que els que cursen els màsters específics —de les àrees de biologia, filosofia, física, geologia, història, història de l'art, llengua, matemàtica, química, etc.— no tinguin cap possibilitat d'accedir a la docència pública de l'ESO i del Batxillerat. Els cal fer el mateix «màster formatiu» que qualsevol altre graduat el grau de base del qual no sigui l'específic de la matèria que ha d'ensenyar. I hi ha qui després se sorprèn d'un cert «fracàs escolar». Els dos ingredients bàsics del docent són el coneixement de la matèria que explica —essencial per ser docent— i la passió que aquest coneixement li desperta —essencial per ser professor o *magister*—. Parlo de la passió que, de jove, l'ha dut precisament a triar aquell grau específic a fi d'aconseguir-ne els coneixements necessaris.

4. Consulteu-ne l'accepció 2.1 del *Diccionari de la llengua catalana* (edició del 2007, pàg. 1102): «Persona que, d'una ciència, d'un art, etc., en sap per a ensenyar-ne, per a ésser pres com a model».

5. El polític haurien de tenir sempre molt clara la qüestió relativa a la dualitat cost/benefici. I, en particular, encara que sembli paradoxal, en les èpoques de bonança, perquè les decisions es poden prendre amb molta més tranquil·litat sense els xantatges provinents de la situació de precarietat que es dona en els moments de crisi econòmica. Curiosament aquesta és una lliçó que els nostres polítics, en particular, i la societat, en general, no ha après i molt em sembla que no vol aprendre.

aquest article pot ser discutible i, fins i tot, arbitrària. Això no obstant pot servir, almenys, per repensar la validesa, o no, de la premissa. Faré, doncs, una anàlisi de la importància i de la conveniència de conèixer —juntament amb els continguts més tècnics— la història de la matemàtica i, per tant, implícitament defensaré la necessitat d'incloure-la en els currículums formatius dels nostres docents de matemàtica.

2. Anàlisi d'aspectes metodològics i conceptuals lligats a la història de la matemàtica: una reflexió general

Cal tenir present, i és una raó sobre la qual cal reflexionar i aprofundir, que en la civilització occidental, l'antiguitat de les reflexions sobre la matemàtica —que es remunta a l'època de l'Acadèmia de Plató— i el fet que matemàtics d'una gran vàlua —Jules Henri Poincaré, David Hilbert, Jacques Salomon Hadamard, George Pólya, Paul Erdős, Paul Richard Halmos, etc.—⁶ hagin dedicat una part no gens menyspreable del seu temps a la presentació, l'anàlisi i l'aprofundiment epistemològic i heurístic d'aquesta disciplina.

L'existència d'excel·lents textos d'història de la matemàtica i els esforços realitzats per les societats i les institucions de docents que hi estan relacionades d'arreu en la difusió de la història de la matemàtica com una font de riquesa formativa i conceptual és un altre aspecte que no podem obviar.

I finalment, l'interès per disposar de reculls de textos originals «rellevants» d'història de la matemàtica per poder-los llegir, comprendre, interpretar i situar en el context i llenguatge del moment en què foren produïts n'és encara una tercera.

Són tres raons, doncs, que suggereixen i exigeixen una anàlisi més detallada i pregona de la qüestió.

La necessitat de l'anàlisi l'efectuarem, doncs, tot desenvolupant mitja dotzena d'ítems que cal exemplificar amb casos concrets —els exemples concrets, qüestions de logística numèrica, vinculades a l'escriptura i als algorismes de càlcul d'altres civilitzacions; de geometria, vinculades a *l'Elements*; d'àlgebra, amb la matemàtica mesopotàmica, xinesa, àrab i renaixentista; de trigonometria, lligada a qüestions d'astronomia grega i índia; de càlcul, vinculades a problemes senzills de física dels segles *xvi* i *xvii*; de geometria cartesina, vinculades a l'obra de René Descartes i Pierre de Fermat, etc., s'han d'adequar als interessos i continguts del moment del procés formatiu en el qual es presenten. El fet d'esmentar aquests ítems —que poden ser uns altres— té la intenció d'explicitar de forma més clara i entenedora les idees que proposo i defenso. Moltes de les qüestions han estat exposades i defensades amb molta habilitat per estudiosos de la història de la matemàtica que n'han analitzat amb rigor els lligams amb l'ensenyament i amb la comprensió global de la matemàtica, com ara Avital (1995), Calinger (1996), Katz (2000), Grattan-Guinness (2004) i Grattan-Guinness (2009), per esmentar autors ben actuals. El professor no ho hauria d'oblidar mai —quelcom que succeix amb massa freqüència— i les hauria de tenir sempre ben presents per tal de poder prendre, quan ho cregués convenient, la decisió d'aproximar-hi l'alumne.⁷

6. I, malgrat del que n'opinava, Hardy. Vegeu Hardy (1940, edició catalana, pàg. 13-72).

7. Una riquesa molt important d'aquesta aproximació és que no cal que estigui ni totalment regulada ni reglada. L'elecció queda a l'arbitri del mestre. De fet, adequar el programa a les capacitats i especificitats concretes dels alumnes i a les situacions reals de l'aula, en l'ús de la «llibertat docent» —quelcom que actualment també tendim a limitar excessivament—, és precisament una —si no la més important— de les funcions de l'autèntic mestre.

2.1. La història com a referent del grau de dificultat intel·lectual

No hi ha dubte que el procés d'evolució de la matemàtica —engloba en aquest nom, com es fa avui, totes les branques— ha estat força interessant i, malgrat la unitat de resultats, a voltes, en cultures diverses, es presenta també de forma diversa en la metodologia.

L'evolució conceptual és una evolució que va dels conceptes més *elementals* —en el sentit de més intuïtius— cap a conceptes més abstractes i evolucionats intel·lectualment. Un bon coneixement de la història de la matemàtica permet, doncs, al docent —quan és un bon professor—⁸ fer una presentació de certes qüestions d'una manera metodològica —i, per tant, més entenedora— força més apropiada al nivell de l'alumne que el docent té al davant.⁹ Pensem que un mateix resultat es pot —i s'ha de— reveure en estadis formatius força allunyats en el temps. De fet, en l'acte docent dels nostres dies aquestes presentacions es fan en el si d'un context que no sempre és el més natural des del punt de vista intuïtiu, ni d'aquell on van aparèixer inicialment de forma natural.

2.2. La presentació dels conceptes matemàtics a partir d'un problema concret

S'ha parlat moltíssim, en els cercles especialitzats en *didàctica de la matemàtica*, del mètode del «solving problems» de George Pólya. Tanmateix, però, no m'estic pas referint a aquest aspecte de presentació del fet matemàtic —de fet, prou conegut i divulgat [vegeu la secció §2.4]— encara que naturalment ambdues situacions estan molt travades. Em refereixo a la necessitat de recórrer, de tant en tant però tan sovint com calgui, a algun problema concret idoni que ajudi a suggerir els conceptes, les metodologies, les tècniques, els algorismes i àdhuc les teories matemàtiques que tenim entre mans i que volem transmetre.

Això forma part del treball personal de preparació de l'acte formatiu que és la classe entesa, no com una unitat diària, sinò com un *projecte* d'ensenyament i d'aprenentatge global estès en el temps formatiu.¹⁰

M'atreviria a dir que un docent esdevé un «mestre» —en el sentit més digne del terme, explicitat a la nota 4— quan aconsegueix que la presentació d'allò que ensenya estigui ben falcada en *problemes* concrets, interessants i entenedors, suggeridors i capaços d'obrir la porta als resultats generals.

2.3. Globalment l'aprenentatge de la matemàtica és un conte

Independentment del tros que toqui a cada docent, a cada franja d'edat, a cada etapa del procés educatiu, al final del procés formatiu l'alumne hauria de ser capaç de refer parts importants de la matemàtica com un conte en el qual hi ha un o diversos personatges protagonistes que tenen unes aventures que, per a uns, seran apassionants i, per a d'altres, no tindran cap mena d'interès —com

8. Uso el terme «professor» com a sinònim de «mestre».

9. D'aquí la necessitat de deixar a les seves mans —com deia abans— la tria concreta dels exemples que cal emprar en cada situació concreta del procés docent.

10. Vull emfasitzar el fet que el procés docent no comença avui i acaba avui —i molt menys encara a la meua aula i amb la meua lliçó concreta o amb el meu curs— sinò que és quelcom que s'esdevé en el temps i, en el cas de la matemàtica, es produeix per mitjà d'un desenvolupament en espiral. Ho he defensat a bastament a Pla i Carrera (2006).

passa també amb les novel·les, les pel·lícules, els còmics, etc. Això tanmateix no fa pas que el conte no existeixi i tingui el seu argument.¹¹

Ara bé, per poder explicar-ne un capítol o una de les aventures, cal tenir un coneixement del conte en la seva totalitat.¹² Aquí —a banda d'una formació sòlida en matemàtica, quelcom que, com ja he dit abans, dono per descomptat en tot docent de la matemàtica tant si ja està format i es troba en actiu com si encara està en procés de formació— hi ajuda moltíssim una bona formació en la història de la matemàtica, entesa com l'evolució conceptual en si mateixa.¹³

Val a dir que, entesa d'aquesta manera, esdevé també ofici de matemàtic —i de matemàtic global, encara que la globalitat sigui només d'una part de l'univers matemàtic. Sense una formació i coneixements matemàtics profunds i arrelats és impossible oferir-ne una visió històrica coherent, evolutiva i generalitzadora en el sentit que va del particular al que és més general i, si convé, crítica. Cal tenir les idees molt ben assentades per poder entendre com van néixer els problemes i els conceptes matemàtics, què els va motivar, per què van evolucionar d'aquesta manera en un moment del procés de desenvolupament, i d'aquesta altra, en un altre, etc.

2.4. Els problemes, la plausibilitat i la conjectura

A la secció §2.2, parlava de la conveniència d'usar problemes per tal d'introduir un concepte. Ara, en canvi, m'agradaria parlar —en la línia de Pólya— de la necessitat d'usar els problemes a fi d'aconseguir un coneixement real i personalitzat de la matemàtica. La matemàtica, com les arts, no en té prou amb la teoria; precisa de la pràctica, una pràctica personal, individual, íntima; cal «fer dits», «esborrany», «copiar dels mestres», etc. I això s'aconsegueix resolent problemes o, en qualsevol cas, plantejant-se problemes i mirant de resoldre'ls.

Aquesta pràctica —que he qualificat de *necessària*— té una deriva importantíssima i metodològicament vital. Permet distingir l'*anàlisi* de la *síntesi*, enteses en el sentit clàssic grec del terme i reformulades a finals del segle XVI i consolidades al XVII.¹⁴ I, dins l'anàlisi, la constatació de la plausibilitat.

M'atreviria a dir que una anàlisi matemàtica no és una anàlisi autèntica si deixa de banda la qüestió de la plausibilitat.¹⁵

11. Vegeu Pla i Carrera (2009).

12. Recordo —record fugisser— l'experiència de la novel·la policíaca individual-col·lectiva, *The floating amiral* (1931), dels autors G. K. Chesterton, Canon Victor L. Whitechurch, G. D. H., M. Cole, Henry Wade, Agatha Christie, John Rhode, Milward Kennedy, Dorothy L. Sayers, Ronald A. Knox, Freeman Wills Crofts, Edgar Jepson, Clemence Dane i Anthony Berkeley. Es donaven per endavant dos capítols inicials d'una trama policíaca. Llavors un tercer autor escrivia un tercer capítol i seguia la novel·la fins al final. Els tres primers capítols passaven a un quart autor que procedia de forma anàloga. El que fa curiosa l'experiència és que cada autor, a partir del que rep com a previ, confegeix una novel·la diferent. Això no tindria sentit —o potser sí?— en el fet educatiu de la formació matemàtica.

13. En aquest sentit val la pena consultar, per exemple, Schubring 2005. Però els textos que resulten realment paradigmàtics són els de Marcus de Sautoy (Sautoy, 2004, 2008).

14. Un qüestió que ens remet a la geometria grega, en particular, a Pappos, i alhora a l'àlgebra de Viète i Descartes.

15. Una manera de començar a comprendre un resultat matemàtic és convèncer-se que és plausible que sigui precisament aquell i no un altre. És plausible que «les tres alçades d'un triangle *arbitrari* es tallen sempre en un punt»; que «els nombres $2^k + 1$ siguin primers quan k pren els valors $0, 1, 2, 3, \dots$ »; que «les arrels x_1, x_2 de l'equació de segon grau $X^2 - bX + c = 0$, satisfacin $x_1 + x_2 = b$, $x_1 \cdot x_2 = c$ », etc. Novament necessitem un autèntic mestre i d'un coneixement molt acurat dels conceptes i dels problemes.

Però el plantejament i l'anàlisi de la plausibilitat permeten encara un altra qüestió —tan natural en la història de la matemàtica i tan oblidada en la docència: la *conjectura*. Pensar un possible resultat —propri o aliè— i conjecturar-ne la possible validesa. Com en som de mals mestres en aquest aspecte! Qui, de nosaltres, planteja la necessitat de fer conjectures i de respondre-les?

La història de la matemàtica és una font inesgotable d'aquestes tres eines i tècniques. Tot docent s'hi hauria d'haver apropiat durant el procés d'aprenentatge fins a arribar a considerar-les quelcom natural en les seves presentacions a l'aula.¹⁶

2.5. Conèixer les crisis epistemològiques

Ara bé, a voltes, hi ha hagut *trencaments de la plausibilitat*: els exemples són in comptables (geometries no euclidianes, existència de l'infinit actual, existència matemàtica contra calculabilitat, trencament aparent del concepte de dimensió, aproximació al concepte de funció, determinisme i caos, etc.).¹⁷

Entendre la naturalesa i profunditat d'aquesta mena de trencaments és l'objectiu del que s'anomena, de forma genèrica, la *fonamentació de la matemàtica*, que és una lectura filosòfica —de fet, ontològica, epistemològica i heurística, fonamentalment— de la pròpia història de la matemàtica. En constitueix un exemple paradigmàtic el controvertit text de Kline (1980) i, més tècnic, l'esmentat de Schubring (2005).

16. Avui dia en què el valor intel·lectual intrínsec del procés formatiu de la matemàtica se substitueix cada cop més pels valors lúdic i d'aplicabilitat, és bo de recordar que el procés històric de creació de la matemàtica proporciona totes tres vessants: la intel·lectual, la lúdica i la modelitzadora i ho fa lligant-les entre si amb tota naturalitat. Vegeu Pla i Carrera (2007). No n'hauríem d'oblidar cap!

17. Cal tenir present que la taxonomia o classificació en tota mena d'exposició argumentativa és quelcom que ve obligat per un intent de precisió i claredat. Però, en la majoria dels casos — i, en particular, pel que fa referència a les qüestions metodològiques de la matemàtica— és un artifici expositiu. Tot està barrejat perquè són cares d'un mateix diamant, o reflexos d'una mateixa cara i, de fet, són indestruïbles. S'escau, potser, recordar el *conte budista* —una adaptació lliure d'un conte que vaig llegir una vegada en un d'aquests llibres sobre el coneixement de la mentalitat budista i del qual no en recordo les dades bibliogràfiques:

Un deixeble li pregunta al mestre:

— Mestre, què és un cigró?

El mestre, decidit, li respon:

— Un cigró és una gramínia...

Però el vailet el talla incisivament a l'inici mateix de la resposta i li diu:

— Mestre!, no vull saber la classificació o caracterització botànica que n'han fet els naturalistes. Simplement vull saber què és un cigró.

— Bé —diu el mestre—, un cigró és un compost orgànic...

Però el noi, tossut, sense deixar-lo acabar, li diu de bell nou:

— No vull pas saber-ne la composició química. Vull saber què és un cigró.

El mestre, cansat de respondre d'acord amb els seus múltiples coneixements parcials sense aconseguir, però, de satisfer la curiositat febril i profunda del deixeble, agafa un cigró i, tot mostrant-li-ho, li diu:

— Això és un cigró.

Aleshores el marrec diu amb estranyesa:

— Si, de fet, no saps què és un cigró, com saps que aquest objecte que m'estàs ensenyant és un cigró?

El mestre, en un intent desesperat per salvaguardar la seva autoritat, li diu:

— Sé que hi ha acord entre el signe vocàlic 'cigró' i l'objecte que t'estic mostrant ara mateix.

El vailet no se'n sap avenir i pregunta de bell nou:

— Bé, mestre, però el que jo et demano és precisament: «Què és aquest objecte al qual apliquem el signe vocàlic de 'cigró'?»

I així, després d'intentar de respondre una pregunta genèrica amb tantes respostes *concretes*, resulta que mestre i deixeble es troben altre cop al començament de la qüestió sense haver avançat gaire en el coneixement intrínsec.

2.6. Els algorismes i la introducció a la informàtica

La història de la matemàtica és també la història del desenvolupament d'algorismes de càlcul de tota mena i, en particular, d'*algorismes recurrents*. Molts d'aquests algorismes els aprenem de ben menuts, quelcom que, al meu entendre, caldria mantenir encara que avui es disposi de ginyes de càlcul immediat.¹⁸

El coneixement històric d'aquests algorismes ens proporcionen models per poder realitzar *programes* —i, de retruc, *models*— i així començar a aprendre l'ús de les calculadores tot fabricant estratègies i programes que els executin.

Aquest és també un camp de trobada —però molt més recent— entre l'ensenyament de la matemàtica i l'aprenentatge dels algorismes: la seva classificació i evolució, quelcom que no ha passat desapercebut com palesen, per exemple, el text coral de Chabert (1994) i Kao (2008).

2.7. La lectura dels textos clàssics

Ningú no discuteix que és formatiu llegir fragments de literatura dels autors i no recórrer sempre a aquells que els expliquen o els critiquen —sense que això signifiqui que no puguin ajudar a una millor comprensió.¹⁹ Però prèviament cal haver estat protagonista en l'acte d'apropament al text.

També apropem els estudiants a l'art a través de les obres concretes, quelcom que caldria estendre amb molta més convicció, decisió i fermesa a la música, parenta pobra del procés cultural bàsic.

Ara bé, quan es tracta de ciència i, en particular, de matemàtica, sembla talment que aquesta activitat perd tot el seu bagatge formatiu. Es tendeix a creure que la lectura d'un text clàssic pot arribar a dificultar la comprensió d'allò que cal aprendre, com si l'autor clàssic no fos capaç de transmetre l'acte iniciàtic de creació o d'exposar l'evolució conceptual.²⁰

És una discussió d'un gran abast que s'escapa de l'àmbit d'aquestes notes de reflexió metodològica. Ara bé, el que no s'escapa, en absolut, a aquesta reflexió col·lectiva és que els docents en ciència, en general, i en matemàtica, en particular, haurien d'haver-se apropiat als textos més rellevants dels prohoms de la seva disciplina. Això forma part consubstancial de la formació que s'ha de transmetre en un curs d'història de la matemàtica ben confegit. Apropar-se als mestres —als clàssics— i, després, amb l'ajuda i la col·laboració del professor d'història i dels professors de les disciplines específiques, analitzar textos concrets, adequats a cada moment formatiu, perquè aquest acte cultural —quan esdevé un acte formatiu— ajuda a comprendre'n el context, el llenguatge, la motivació, la novetat, les dificultats, l'evolució conceptual, l'evolució... en resum, el procés creatiu.

18. Caldria una revisió acurada del diàleg que s'hauria d'establir —i mantenir— entre «algorisme manual» i «ús de les eines de càlcul informàtiques».

19. Sempre recordaré amb molt d'afecte el curs sobre literatura catalana de Maria Aurèlia Capmany al qual vaig tenir l'encert d'assitir, a la Universitat Catalana d'Estiu de Prada, al Conflent, on jo mateix feia de professor, un agost d'ara fa ja quaranta anys.

20. En moltes ocasions he repetit que una diferència entre el que anomenem «les humanitats» i «les ciències» és la manera com, les unes i les altres, tracten els clàssics respectius. És clar que, avui, en la ciència positiva, l'avenç és molt ràpid —gairebé vertiginós— i l'única manera de mantenir-se al dia és la lectura i comprensió dels resultats més recents. Però això no ha d'impedir conèixer els clàssics, autèntica font de cultura.

2.8. La matemàtica és un llenguatge

A més, com ja deia abans de passada, apropar-nos als clàssics ens permet apropar-nos al llenguatge matemàtic. Potser val la pena recordar, un cop més, el text paradigmàtic de Galileo Galilei:

La filosofia està escrita en aquest llibre tan gran que tenim obert davant dels ulls, l'univers. No és possible d'entendre'l si abans no s'aprèn a entendre el llenguatge, a conèixer-ne els caràcters amb què s'ha escrit. Està escrit en llenguatge matemàtic i els seus caràcters són triangles, cercles i d'altres figures geomètriques. Sense ells és del tot impossible entendre'n una sola paraula. Sense ells ens trobaríem voltant vanament en un laberint fosc.²¹

I el professor Michael Atiyah, en el discurs que pronuncià el dia 25 d'abril de 2008 en l'acte en el qual fou investit doctor honoris causa de la FME de la UPC, digué:

Què són les matemàtiques?

[...] La meua resposta és que les matemàtiques són un llenguatge, un mitjà específic de comunicació que es pot comparar profitosament amb els llenguatges naturals, com ara l'anglès o el català. Són *constructes culturals* que han evolucionat durant milers d'anys i que forneixen el marc de la civilització.

[...] A més de comparar l'evolució històrica de les matemàtiques i del llenguatge natural, també podem comparar-ne les funcions, descrivint-ne els diversos usos.

[...] Així, el llenguatge té un ús pràctic per als afers diaris, un ús literari per transmetre idees més abstractes i un ús poètic per expressar les emocions. Hi ha una divisió similar en la matemàtica entre utilitat, que mena a la matemàtica aplicada, i la matemàtica pura, més enfocada a idees abstractes.²²

Aquesta part essencial de la matemàtica —un dels llenguatges elaborats pel pensament humà— també ha de formar part essencial de l'autèntic aprenentatge —en l'específic i en el cultural— i, per tant, de l'ensenyament.²³

I encara hi ha una altra qüestió molt interessant —com hi és en totes les expressions humanes: pintura, escultura, música, literatura, etc.—, i és que cada cultura —i, dins de cadascuna, cada autor— té un estil propi personal, com va posar de manifest en un llibre excel·lent —la lectura del qual recomano— ja fa uns quants anys el matemàtic i filòsof castellà Javier de Lorenzo.²⁴

3. De l'interès suscitat per la història de la matemàtica

Ara tractaré de reflexionar més acuradament sobre els ítems que he assenyalat amb la confiança que siguin d'utilitat per a una bona comprensió de les idees matemàtiques i la seva evolució. Espero que sintetitzin de forma clara i positiva —aquest és l'esperit amb el qual he escrit aquest text— els conceptes epistemològics que hauríem de trobar en els currículums de l'ensenyament de la matemàtica i en els de formació dels docents de matemàtica. En definitiva, es tracta de formar professors

21. Vegeu Galilei (1623, edició castellana, p. 61).

22. Vegeu <http://www.upc.edu/saladeprensa/al-dia/mes-noticies/el-matematic-michael-atiyahinvestit-doctor/441>. En recomano la lectura. L'èmfasi és meu.

23. He intentat recollir el llenguatge matemàtic, la seva evolució, a Pla i Carrera (2006).

24. Vegeu Lorenzo (1971).