

ANÀLISI MATEMÀTICA D'UNA VARIABLE

Bruno Juliá Díaz
Montserrat Guilleumas

Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria

ANÀLISI MATEMÀTICA D'UNA VARIABLE

Bruno Juliá Díaz
Montserrat Guilleumas

Departament d'Estructura
i Constituents de la Matèria

Índex

CONSIDERACIONS PRELIMINARS	11
1. NOMBRES REALS	13
1.1. Nocions bàsiques de la teoria de conjunts	13
1.1.1. Notació i definicions bàsiques	14
1.2. Àlgebra de conjunts: unió, intersecció i complementari	15
1.3. Conjunts: numerabilitat	17
1.3.1. Relacions	17
1.3.2. Conjunts numerables i no numerables	19
1.4. Nombres reals	20
1.4.1. Introducció axiomàtica de $\mathbb{R}$	22
1.4.2. Axiomes de cos $(\mathbb{R}, +, \cdot)$	22
1.4.3. Axiomes d'ordre	23
1.4.4. Conseqüències dels axiomes d'ordre	23
1.4.5. Representació geomètrica dels nombres reals	25
1.5. Enters, $\mathbb{Z}$	26
1.5.1. Principi d'inducció matemàtica	26
1.5.2. Algunes definicions referents a $\mathbb{Z}^+$	28
1.6. Racionals, $\mathbb{Q}$	30
1.6.1. Irracionals, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	31
1.6.2. Algunes definicions	32
1.7. Axioma de completesa	33
1.7.1. Propietats dels nombres reals	33
1.7.2. Representació decimal dels nombres reals	35
1.7.3. Valor absolut	35
2. NOMBRES COMPLEXOS	39
2.1. Definicions bàsiques	39
2.1.1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	40
2.2. Unitat imaginària	41
2.3. Forma binòmica dels nombres complexos	41
2.4. Representació geomètrica dels nombres complexos	43
2.5. Forma polar dels nombres complexos	43
2.6. No ordenabilitat dels nombres complexos	44
2.7. Funcions de nombres complexos	45
2.7.1. Repàs de funcions en $\mathbb{R}$	45
2.7.2. Exponencials complexos	47
2.7.3. Potències i arrels	49
2.7.4. Logaritmes	52
2.7.5. Potències complexos de complexos	52
2.7.6. Trigonometria complexa	53
2.8. Teorema fonamental de l'àlgebra	54

3. TOPOLOGIA	57
3.1. Nocions de Topologia	57
3.1.1. Espai euclidià $\mathbb{R}^n$	57
3.1.2. Mètrica d'un espai M	58
3.2. Boles, punts interiors i conjunts oberts	59
3.2.1. Bola oberta	59
3.2.2. Punt interior	60
3.2.3. Conjunt obert	60
3.2.4. Conjunt tancat	60
3.2.5. Unió i intersecció de conjunts oberts	60
3.2.6. Conjunt fitat	61
3.3. Punts adherents i d'acumulació	61
3.3.1. Punt adherent	61
3.3.2. Punt d'acumulació	61
3.3.3. Punt aïllat	62
3.4. Teorema de Bolzano-Weierstrass	62
3.5. Recobriments, conjunts compactes i teorema de Heine-Borel	64
 4. FUNCIONS D'UNA VARIABLE	 67
4.1. Còniques	67
4.1.1. Equacions de les còniques	67
4.1.2. Seccions còniques. Definicions geomètriques	69
4.1.3. Còniques en coordenades polars	72
4.2. Límit d'una funció	75
4.2.1. Límits laterals	78
4.2.2. Funcions fitades i monòtones	78
4.3. Infinitèsims	79
4.3.1. Propietats dels infinitèsims	80
4.3.2. Comparació d'infinitèsims	81
4.4. Teoremes fonamentals sobre límits	82
4.4.1. Càlcul explícit del $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	82
4.5. Continuïtat	84
4.5.1. Discontinuitats	85
4.5.2. Funcions contínues en un interval	86
4.5.3. Propietats de les funcions contínues en un interval	86
4.6. Continuïtat uniforme	87
4.6.1. Teorema de Heine-Cantor	89
4.7. Càlcul de límits	89
4.7.1. Resolució d'indeterminacions	89
 5. DERIVADES	 93
5.1. Derivada d'una funció en un punt	93
5.2. Interpretació geomètrica de la derivada	94
5.3. Derivades de funcions elementals	95
5.4. Regla de la cadena	97
5.5. Funcions inversa i implícita. Derivades laterals i diferencial	99
5.5.1. Funció inversa i la seva derivada	99
5.5.2. Derivada de la funció implícita	100

5.5.3.	Derivades laterals i infinites	101
5.5.4.	Diferencial d'una funció	102
5.6.	Anàlisi de la variació de funcions	103
5.6.1.	Creixement, extrems (màxim i mínim)	103
5.7.	Teoremes del valor mitjà per a derivades	104
5.7.1.	Teorema de Rolle	104
5.7.2.	Teorema del valor mitjà generalitzat, De Cauchy	105
5.8.	Regla de L'Hôpital	106
5.8.1.	Regla de L'Hôpital	106
5.9.	Fórmula de Taylor	108
5.9.1.	Fórmula de Taylor	109
5.9.2.	Teorema de Taylor	110
5.9.3.	Exemples d'ús	112
5.9.4.	Enllaços externs	115
5.9.5.	Extrems locals	116
6.	INTEGRACIÓ	119
6.1.	Integral indefnida	119
6.1.1.	Algunes integrals indefinides	120
6.1.2.	Propietats de la integral indefnida	121
6.2.	Mètodes d'integració	121
6.2.1.	Canvi de variable o substitució	121
6.2.2.	Integració per parts	122
6.2.3.	Integrals racionals	124
6.2.4.	Integrals de funcions trigonomètriques	130
6.3.	Integral definida	131
6.3.1.	Sumes inferiors i superiors	131
6.3.2.	Interpretació geomètrica	134
6.3.3.	Propietats de la integral definida	134
6.3.4.	Teorema del valor mitjà del càlcul integral	135
6.4.	Integrals i primitives	135
6.4.1.	Primer teorema fonamental del càlcul	136
6.4.2.	Segon teorema fonamental del càlcul. Regla de Barrow	137
6.4.3.	Canvi de variable en integrals definides	137
6.4.4.	Integració per parts	138
6.5.	Aplicacions geomètriques	138
6.5.1.	Àrea d'una figura plana	138
6.5.2.	Longitud d'un arc de corba a $\mathbb{R}^2$	140
6.5.3.	Volum d'un objecte de secció coneguda	141
6.5.4.	Volum d'un objecte de revolució	142
6.5.5.	Àrea d'un objecte de revolució	142
6.6.	Integrals impròpies	143
6.6.1.	Integrals impròpies de primera espècie	143
6.6.2.	Integrals impròpies de segona espècie	146
6.6.3.	Valor principal De Cauchy	148
7.	SUCCESIONS I SÈRIES	149
7.1.	Successions	149
7.1.1.	Successió	149

7.1.2.	Algunes propietats de l'àlgebra de successions	150
7.2.	Sèries	152
7.2.1.	Sèrie infinita	153
7.2.2.	Sèrie alternada	155
7.2.3.	Convergència absoluta	156
7.2.4.	Sèrie geomètrica	157
7.2.5.	Criteris de convergència	157
7.2.6.	Sèries de potències	160
	BIBLIOGRAFIA	163

Agraïments

Estem especialment agraïts a la Dra. Nuria Barberán per compartir desinteressadament els seus apunts de l'assignatura, així com pels seus comentaris i correccions a l'edició en castellà. També volem donar les gràcies al Dr. Ricardo Graciani, la Dra. Assumpta Parreño i el Dr. Martí Pi pels seus comentaris i correccions a una versió preliminar del text, els quals ens van ajudar a millorar-lo considerablement. I al Dr. Josep Maria Pons, per compartir els seus apunts de l'assignatura i per la seva predisposició a discutir-ne els continguts.

Donem també les gràcies al Dr. Artur Polls i a la Laura Casanellas per la lectura crítica de l'edició en castellà; als membres del nostre grup de recerca, per converses i discussions diverses sobre els temes que s'exposen en aquest llibre; i al Dr. Jordi Ortín, per facilitar-nos els seus fulls d'estil.

Després de la bona acollida del text docent en castellà (núm. 341), estem contents de publicar aquestes notes finalment en català. Volem agrair la gran tasca de traducció, l'entusiasme i la dedicació del Dr. Javier Grande, sense el qual aquest text docent en català encara no seria una realitat.

Per acabar, agraïm als alumnes de primer curs dels semestres de primavera del 2007 i el 2008 i també d'anys posteriors les seves preguntes i l'interès per l'assignatura, especialment a tots aquells que ens han ajudat a millorar aquestes notes.

BRUNO JULIÁ DÍAZ
Departament d'Estructura
i Constituents de la Matèria
Institut de Ciències Fotòniques

MONTSERRAT GUILLEUMAS
Departament d'Estructura
i Constituents de la Matèria

Consideracions preliminars

Notació i tipografia

Les definicions, els teoremes i les demostracions dels teoremes apareixen en el text amb la tipografia següent:

EXEMPLE DE TEOREMA

Teorema 0.1. *Cada enter $n > 1$ és primer o producte de primers.*

EXEMPLE DE DEMOSTRACIÓ

Demostració. Utilitzant el principi d'inducció:

- 1) Per a $n = 2$ es verifica perquè és primer.
- 2) Suposem que es verifica $\forall r \mid 1 < r < n$.
- 3) Si n no és primer, llavors admet un divisor d tal que $1 < d < n$, és a dir que $n = dc$, $1 < c < n$; però com que tant per a c com per a d se satisfà el teorema (pas 2), tenim que c i d són primers o producte de primers, de manera que n és producte de primers.

c.v.d.

EXEMPLE DE DEFINICIÓ

Definició 0.1. Producte cartesià de dos conjunts ($A \times B$). *Donats dos conjunts A i B , anomenarem producte cartesià de A i B , $A \times B$, el conjunt de tots els parells ordenats (x, y) tals que $x \in A$ i $y \in B$:*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ i } y \in B\}. \quad (0.1)$$

Símbols

- | | |
|-------------------|---------------|
| $\Rightarrow$ | implica |
| $\Leftrightarrow$ | si i només si |
| $\exists$ | existeix |
| $\forall$ | per a tot |
| $ $ | tal que |

c.v.d. 'com volíem demostrar', marca el final d'una demostració.

1. NOMBRES REALS

Existeixen diversos mètodes per a introduir els nombres reals. Un d'habitual és començar a partir dels enters positius, 1, 2, 3, ..., considerats com un conjunt no definit que fem servir com a base per a construir un sistema més ampli. El procés consta dels passos següents:

- 1) Es construeixen els nombres racionals positius, quocients d'enters positius.
- 2) S'utilitzen els nombres racionals per a construir els irracionals positius (com ara $\sqrt{2}$ o π).
- 3) S'introdueixen els nombres reals negatius i el zero. El sistema dels nombres reals es construeix com a unió dels nombres racionals i irracionals.

La part més difícil d'aquest procés és el pas dels nombres racionals als irracionals. Tot i que la necessitat de nombres irracionals ja esdevingué evident per als matemàtics de l'antiga Grècia, no es van introduir mètodes satisfactoris per a la construcció de nombres reals fins a la darrereria del segle XIX. En aquella època es perfilaren tres teories: la de Boole, la de Cantor i la de Dedekind. L'any 1889 Peano va presentar cinc axiomes per als enters positius, els quals serviren com a punt de partida per a la construcció dels nombres reals.

De tota manera, nosaltres ens interessarem més per les propietats dels nombres reals que pels mètodes emprats per a construir-los. Per tant, adoptarem un punt de vista diferent i considerarem els nombres reals com a conceptes no definits (elements primitius) que satisfan un cert nombre d'axiomes (que no es demostren). A partir d'aquests axiomes deduirem les propietats dels nombres reals. Així, doncs, establim relacions entre els nombres reals, algunes sense demostració (axiomes) i d'altres amb demostració (teoremes).

Suposarem, per tant, que existeixen els nombres reals i que satisfan deu axiomes (els quals enumerarem més endavant). Els axiomes es classifiquen de manera natural en tres grups:

- 1) Axiomes de cos
- 2) Axiomes d'ordre
- 3) Axioma de completesa

1.1. Nocions bàsiques de la teoria de conjunts

La teoria de conjunts desenvolupada per Boole i Cantor a la darrereria del segle XIX va tenir una gran influència en el desenvolupament de les matemàtiques del segle XX, ja que va ajudar a unificar idees aparentment inconnexes i a reduir molts conceptes als seus fonaments lògics d'una manera elegant i metòdica.

Definició 1.1. Conjunt. *Col·lecció d'objectes considerats com una sola entitat. Els objectes de la col·lecció s'anomenen **elements** o **membres del conjunt** i direm que pertanyen al conjunt o que hi estan continguts. El conjunt conté els seus elements o està format per ells.*

La major part de la teoria de conjunts no depèn de la naturalesa dels elements individuals de la col·lecció. Nosaltres estudiarem conjunts d'objectes d'indole matemàtica: conjunts de nombres, punts, funcions, etc.

1.1.1. Notació i definicions bàsiques

- Conjunts: $A, B, C, \dots$, designats amb majúscules.
- Elements: $a, b, c, \dots$, designats amb minúscules.
- $x \in S$ significa que x és un element de S ; es diu que x pertany al conjunt S .
- $x \notin S$ significa que x no és un element de S o, equivalentment, que x no pertany al conjunt S .

Podem descriure un conjunt escrivint els elements entre claus:

$$\left. \begin{array}{ll} A = \{2, 4, 6, 8\} & \text{conjunt finit} \\ B = \{1, 2, 3, \dots\} & \text{conjunt infinit} \end{array} \right\} \text{explícits} \quad (1.1)$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}\} \text{ implícit, } x \text{ variable muda} \quad (1.2)$$

A partir d'un conjunt podem formar-ne de nous, anomenats **subconjunts**, agafant elements del conjunt de partida:

- A és **subconjunt** de B , $A \subseteq B$, si cada element de A també pertany a B : $a \in A \Rightarrow a \in B$.
- A és **subconjunt propi** de B , $A \subset B$, si $A \subseteq B$ i $A \neq B$.
- El **conjunt buit**, $\emptyset$, no conté cap element: $\emptyset \subseteq A \quad \forall A$.
- El **conjunt universal**, E , conté tots els elements: $A \subseteq E \quad \forall A$.
- La **igualtat** és $A = B \Leftrightarrow a \in A \Rightarrow a \in B$ i $a \in B \Rightarrow a \in A$.

Exemple 1.1:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{2, 4, 6, 8\} \\ B = \{4, 6, 2, 8\} \\ C = \{2, 4, 2, 6, 4, 8\} \end{array} \right\} A = B = C \quad (1.3)$$

A, B són idèntics ($A = B$) i contenen els mateixos elements. Si un dels conjunts contingués algun element que no pertanyés a l'altre, llavors els conjunts serien diferents i escriuríem $A \neq B$.

- La notació $\{x \mid x \in S \text{ i satisfà } \mathcal{P}\}$ es fa servir per a designar el conjunt de tots els elements de S que satisfan $\mathcal{P}$. Els conjunts representats d'aquesta manera es caracteritzen per una propietat definitòria.

Exemple 1.2. El conjunt de tots els nombres reals positius es denota per $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ i } x > 0\}$ o simplement $\{x \mid x > 0\}$, en què se sobreentén que el conjunt universal és el conjunt dels nombres reals.

- Cal distingir entre l'element x i el conjunt $\{x\}$, l'únic element del qual és x .
- Conjunt de conjunts: $F = \{A, B, C\}$. Els elements de F són A, B i C . Per tant els elements de A no són elements de F .

Exemple 1.3. Els elements de $F = \{\{1, 2\}, \{3\}, 4\}$ són $\{1, 2\}$, $\{3\}$ i 4 . En canvi, $1 \notin F$, $2 \notin F$, $3 \notin F$. Un altre exemple: el conjunt buit $\emptyset$ no conté cap element, però el conjunt $G = \{\emptyset\}$ conté un element, $\emptyset \in G$.

Definició 1.2. Es defineix el **conjunt de parts de** A , $\mathcal{P}(A)$, com el conjunt de tots els possibles subconjunts de A .

Exemple 1.4. Donat $A = \{a, b, c\}$, el conjunt de parts de A , $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, conté un subconjunt de A de zero elements, tres d'un element, tres de dos elements i un de tres elements. En el cas general d'un conjunt A amb n elements, $\mathcal{P}(A)$ tindrà 2^n elements:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad (1.4)$$

en què

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad (1.5)$$

és el nombre de possibles subconjunts de A amb k elements. La relació (1.4) es pot obtenir a partir de l'expressió del binomi de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n, \quad (1.6)$$

amb $x = y = 1$.

Exemple 1.5. Alguns conjunts importants són:

- Conjunt buit: $\emptyset$
- Conjunt universal: E
- Nombres naturals: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Nombres enters: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Nombres racionals: $\mathbb{Q}$ (fraccions)
- Nombres reals: $\mathbb{R}$
- Nombres complexos: $\mathbb{C}$

1.2. Àlgebra de conjunts: unió, intersecció i complementari

Donats dos conjunts A i B , podem construir els conjunts següents:

- a)** $A \cup B$, **unió** de A i B , es defineix com el conjunt d'elements que pertanyen a A , a B o a ambdós (vegeu la figura 1.1(a)). És a dir, $A \cup B$ és el conjunt de tots els elements que pertanyen almenys a un dels conjunts A i B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}. \quad (1.7)$$

b) $A \cap B$, intersecció de A i B , es defineix com el conjunt d'elements comuns a A i B (figura 1.1(b)):

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{i} \quad x \in B\}. \quad (1.8)$$

Dos conjunts es diuen **disjunts** si $A \cap B = \emptyset$.

c) $B - A$: complementari de A respecte de B , es defineix com el conjunt d'elements de B que no pertanyen a A (figura 1.1(c)):

$$B - A = \{x \mid x \in B \quad \text{i} \quad x \notin A\}. \quad (1.9)$$

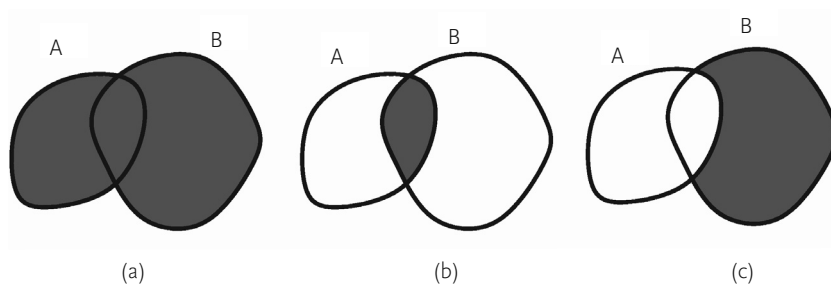


Figura 1.1. La regió ombrejada representa: (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $B - A$.

Les operacions d'unió i intersecció tenen moltes analogies formals amb la suma i la multiplicació de nombres reals. A partir de les definicions que acabem de veure, podem comprovar les propietats següents:

1) Commutativa:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A. \end{aligned}$$

2) Associativa:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

3) Distributiva (que involucra totes dues operacions):

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Les operacions d'unió i intersecció es poden estendre de forma senzilla a col·leccions finites i infinites de conjunts. Sigui F una col·lecció no buida de conjunts,¹

$$\begin{aligned} F &= \{A_1, A_2, \dots, A_n\} && \text{(col·lecció finita)} \\ F &= \{A_1, A_2, \dots\} && \text{(col·lecció infinita numerable)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

¹ Vegeu la secció 1.3.2 per a la definició de *conjunt infinit numerable*.

Llavors podem definir:

a) Unió de tots els conjunts de F , $\cup_i A_i$:

$$\cup_i A_i = \begin{cases} \cup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n & (\text{collecció finita}) \\ \cup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots & (\text{collecció infinita numerable}) \end{cases} \quad (1.11)$$

b) Intersecció de tots els conjunts de F , $\cap_i A_i$:

$$\cap_i A_i = \begin{cases} \cap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n & (\text{collecció finita}) \\ \cap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots & (\text{collecció infinita numerable}) \end{cases} \quad (1.12)$$

1.3. Conjunts: numerabilitat

1.3.1. Relacions

Donats dos conjunts A i B , podem establir relacions, f , entre els seus elements:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y = f(x). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Definició 1.3. S'anomena **parell ordenat** (x, y) el conjunt d'elements x i y ordenats:²

- x és el primer element ($x \in A$)
- y és el segon element ($y \in B$)

Definició 1.4. **Producte cartesià de dos conjunts** $(A \times B)$. Donats dos conjunts A i B , anomenarem producte cartesià de A i B , $A \times B$, el conjunt de tots els parells ordenats (x, y) tals que $x \in A$ i $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \quad \text{i} \quad y \in B\}. \quad (1.14)$$

Definició 1.5. S'anomena **relació**, S , entre els conjunts A i B , tot subconjunt de $A \times B$,

$$S \subset A \times B. \quad (1.15)$$

Per tant, si $A = B = \mathbb{R}$, una relació és un subconjunt del pla xy ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$). Per exemple: $C_1 = \{(x, y) \mid xy = 1\}$, $C_2 = \{(x, y) \mid x - y = 3\}$.

També pot haver-hi una relació formada només per un conjunt discret de parells ordenats, per exemple: $D = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\} \subset A \times B$, $A = B = \{0, 1, 2\}$.

Definició 1.6. S'anomena **gràfica de la relació** el conjunt de punts del pla que resulten d'associar-ne un a cada parell ordenat de la relació. En la figura 1.2 es mostren les gràfiques de dues relacions.

² Noteu que quan parlem de *conjunts* l'ordre no és important, per tant $\{x, y\} = \{y, x\}$. En canvi, en els *parells ordenats* l'ordre sí que importa i $(x, y) \neq (y, x)$ (si $x \neq y$).

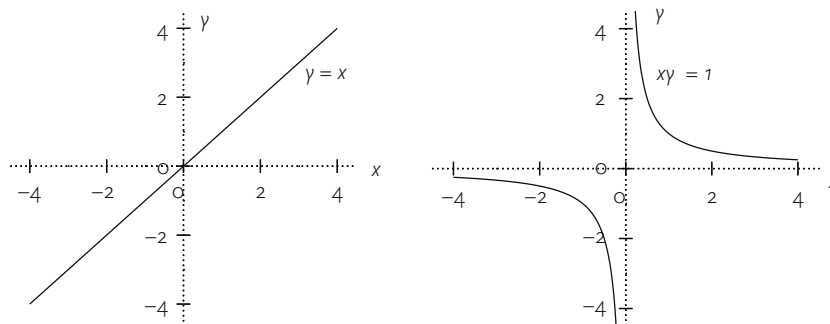


Figura 1.2. Gràfiques de les relacions: $y = x$ i $xy = 1$.

Definició 1.7. El **domini** de S , $D(S)$, és el conjunt dels elements x , és a dir, dels primers elements dels parells ordenats de la relació S .

Definició 1.8. El **recorregut** de S , $R(S)$, és el conjunt dels elements y , és a dir, dels segons elements dels parells ordenats de la relació S .

Definició 1.9. S'anomena **funció**, f , un conjunt de parells ordenats (x, y) tals que cap d'ells no té el mateix primer element. Per tant:

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } (x, y) \in f \\ \text{i } (x, z) \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y = z. \quad (1.16)$$

La definició de funció requereix que a cada x del domini de f li correspongui exactament un y tal que $(x, y) \in f$. Es diu que y és la imatge de x per f . Normalment, per a indicar que el parell (x, y) pertany a la funció f , direm simplement que y és el valor de la funció f en x , $y = f(x)$.

Es poden classificar en:

- Funció **injectiva**, si $(x, y) = (z, y) \Rightarrow x = z$, és a dir, $\forall x \neq z \Rightarrow f(x) \neq f(z)$.
- Funció **exhaustiva**, si $y \in B \Rightarrow \exists x \in D(f) \mid (x, y) \in f \rightarrow B = R(f)$.
- Funció **bijectiva**, si és injectiva i exhaustiva simultàniament.
- Funció **un a un (biunívoca)** de A a B , si $A = D(f)$ i f és bijectiva.

A la figura 1.3 s'exemplifiquen diversos tipus de relacions.

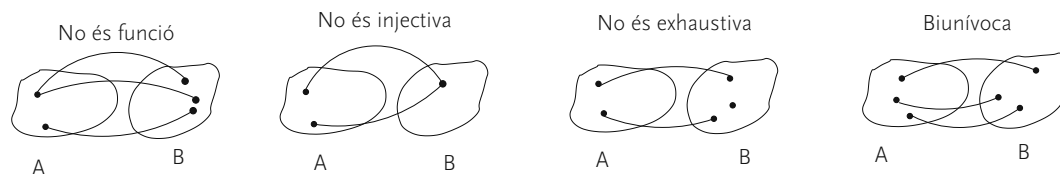


Figura 1.3. Alguns exemples de relacions.

Definició 1.10. Conjunts coordinables o equipotents. Dos conjunts A i B són coordinables i s'escriu $A \sim B$ si i només si existeix una funció f un a un entre els conjunts A i B :

$$A \sim B \quad \text{si} \quad \exists f \text{ injectiva} \mid D(f) = A \text{ i } R(f) = B. \quad (1.17)$$

Es diu també que f estableix una correspondència un a un entre els conjunts A i B . En particular, qualsevol conjunt és coordinable amb si mateix.

1.3.2. Conjunts numerables i no numerables

Definició 1.11. Un conjunt S és **finit** si es pot establir una correspondència biunívoca (un a un) entre els elements del conjunt S i el conjunt $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, on n és el nombre d'elements del conjunt S , també anomenat **cardinal** de S .

Definició 1.12. Els conjunts no finits són **conjunts infinits**. Els conjunts infinits tenen un nombre infinit d'elements.

Definició 1.13. Un conjunt S és **numerable** si es pot establir una correspondència biunívoca amb un subconjunt dels nombres naturals:

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (1.18)$$

En particular, un conjunt S amb un nombre infinit d'elements és **infinit numerable** si és coordinable amb el conjunt de tots els enters positius, és a dir, si:

$$S \sim \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+. \quad (1.19)$$

Existeix, per tant, una funció f que estableix una correspondència un a un entre els enters positius i els elements de S , amb la qual es pot descriure el conjunt S com:

$$S = \{f(1), f(2), f(3), \dots\} \equiv \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad (1.20)$$

on hem fet servir una notació amb subíndexs, $a_k \equiv f(k)$, que permet utilitzar els enters positius com a etiquetes dels elements de S .

PROPIETATS

- Els conjunts finits, per definició, són numerables.
- Els conjunts infinits poden ser o no numerables.
Exemple: $S = \{x^{2n} \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ (amb x , un nombre real fix) és numerable.

En resum, un conjunt és numerable quan els seus elements es poden numerar (etiquetar). És a dir, quan el conjunt es pot expressar de la forma: $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

- Tot subconjunt d'un conjunt numerable és numerable (la demostració es pot trobar, per exemple, a la pàgina 47 del llibre d'Apostol, vol. 1).
- La unió de dos conjunts numerables és numerable.
- La unió d'una col·lecció numerable de conjunts numerables és numerable.
- $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ són numerables ($\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$, unió de conjunts numerables, vegeu l'apartat 1.5).