

LLIÇÓ INAUGURAL
DEL CURS ACADÈMIC
2011-2012

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

Weierstrass i l'aproximació uniforme

Joan Cerdà

CATEDRÀTIC D'ANÀLISI MATEMÀTICA

Weierstrass i l'aproximació uniforme

LLIÇÓ INAUGURAL
DEL CURS ACADÈMIC
2011-2012
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

Weierstrass i l'aproximació uniforme

Joan Cerdà
CATEDRÀTIC D'ANÀLISI MATEMÀTICA

BARCELONA, 5 D'OCTUBRE DE 2011



B Universitat de Barcelona

Publicacions i Edicions

© Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n, 08028 Barcelona, tel.: 934 035 530, fax: 934 035 531,
comercial.edicions@ub.edu, www.publicacions.ub.edu

Disseny de la col·lecció: Azcunce | Ventura

Dipòsit legal: B-40540-2011

Impressió i relligat: Gráficas Rey

Karl Weierstrass

Conegut com a pare de l'anàlisi moderna, Weierstrass obtingué tests per a la convergència de sèries i contribuí a la teoria de les funcions periòdiques, les funcions de variables reals, les funcions el·líptiques, les funcions abelianes, els productes infinits convergents i el càlcul de variacions. També obtingué avenços en la teoria de les formes bilineals i quadràtiques.

Enciclopèdia britànica

Durant els seus estudis al Gymnasium catòlic de Paderborn, Karl Weierstrass (Ostenfelde, 1815 – Berlín, 1897) ja llegia regularment el *Journal de Crelle*¹ i decidí dedicar-se a les matemàtiques. Però el 1834, quan tenia dinou anys, el seu dominant pare, un inspector d'impostos, el va enviar a estudiar dret i economia a la Universitat de Bonn.

Tanmateix, a Bonn, sense interès pels estudis, a més de passar el temps en diversions, va llegir la *Mécanique céleste* de Laplace i un treball de Jacobi sobre funcions el·líptiques, que aleshores estaven de moda. Per entendre les tècniques de les funcions el·líptiques, també llegí transcripcions de cursos de qui després seria el seu director, Christoph Gudermann, antic estudiant de Gauss. Com a resultat, passats quatre anys, va deixar la universitat sense cap títol.

L'any 1839 acceptà estudiar a l'Acadèmia de Münster per ser professor de secundària. Una de les raons de la seva acceptació va ser que Gudermann n'era professor. Weierstrass va assistir a les classes de Gudermann sobre funcions el·líptiques, funcions $x = \varphi(\alpha)$ que són inverses de les integrals el·líptiques,

1. *Crelle* és el nom que rep el *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Fundat per August Crelle l'any 1826 i editat per ell mateix fins a la seva mort al 1855, és la primera revista important de matemàtiques fora de les actes d'acadèmies. Weierstrass i Kronecker en varen ser els editors de 1881 a 1888.

$$\alpha = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{P(u)}} \quad (P(u) = \sum_{k=0}^4 a_k u^k),$$

doblement periòdiques en ser esteses al pla complex. Aquestes funcions constituïren el tema del primer article de Weierstrass, un assaig escrit al 1840. El punt de partida fou l’afirmació d’Abel que les funcions el·líptiques havien de ser quocients de sèries de potències convergents.

Ja professor de secundària, totalment aïllat d’altres matemàtics, sense mitjans ni persones amb qui pogués establir intercanvis i sense accés a biblioteques de matemàtiques, Weierstrass treballà intensament en anàlisi durant catorze anys en tots els seus moments lliures i no tenia cap coneixement dels treballs de Cauchy relacionats amb el seu. Va desenvolupar la teoria de les funcions abelianes, que s’obtenen invertint les integrals abelianes

$$\alpha = \int_0^x R(u, \sqrt{f(u)}) du,$$

on $R(u, v)$ és una funció racional i f una funció d’un tipus general que inclou els polinomis, exactament igual com les funcions el·líptiques s’obtenen de les integrals el·líptiques.

Així, al 1841, dos anys abans que Laurent ho fes, Weierstrass establí en [W5] el desenvolupament de Laurent d’una funció i la integral de Cauchy en una corona circular, i en [W4] demostrà les desigualtats de Cauchy per als coeficients de les sèries de Laurent, com també el seu teorema sobre sèries dobles. Aquest article constitueix el punt de partida dels mètodes analítics de Weierstrass per a la teoria de funcions d’una o més variables, basats en les sèries de potències.

L’article [W6] de 1842, en què Weierstrass demostrava que un sistema d’equacions diferencials amb condicions inicials prefixades podia ser resolt per un sistema de sèries de potències convergents, completava aquesta recerca. Alhora, hi demostrava com continuar analíticament fora del disc una sèrie de potències convergent en un disc.

Aquests resultats, escrits quan Weierstrass encara estava sota la influència de Gudermann, que el va encoratjar en els seus estudis, varen romandre inèdits fins que al 1894 foren inclosos en el volum 1 dels seus *Mathematische Werke*. De manera que, malgrat no tenir cap influència en el

desenvolupament de les matemàtiques d'aquells anys, establí els conceptes sobre els quals va basar la seva teoria de funcions de variable complexa a partir de 1857.

El gran esforç d'estar treballant intensament en matemàtiques, que havia de compatibilitzar amb les seves tasques docents al Gymnasium, i els conflictes que patí com a estudiant, probablement foren la causa que, al voltant de 1850, Weierstrass comencés a patir migranyes molt severes i convulsions.

Weierstrass sortí de l'anonimat quan el 1854 i el 1856 publicà a *Crelle* dos articles, que més tard Hilbert (1862-1943) va considerar els més grans resultats de l'anàlisi. El primer [W1] tractava sobre funcions abelianes i el segon [W2] contenia la versió completa de la seva teoria sobre integrals hiperel·líptiques,

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{p-1} \int_0^{x_j} \frac{y^k dx}{\sqrt{P(y)}} \quad (0 \leq k < p; \text{ grau } P = 2p + 1 \text{ o } 2p + 2),$$

i resolvia de manera original el problema de Jacobi sobre la inversió d'aquestes integrals.

Va rebre diverses ofertes i el 1856 acceptà la de la Universitat de Berlín, on els seus cursos, sobre aplicacions de les sèries i integrals de Fourier a la física matemàtica (una introducció a les funcions analítiques, funcions el·líptiques i aplicacions a problemes de geometria i mecànica), van atraure estudiants de tot arreu.

A Berlín pogué relacionar-se amb dos grans matemàtics: Ernst Eduard Kummer (1810-1893) i Leopold Kronecker (1823-1891). Entre tots tres varen fer de la seva universitat el millor lloc del món on s'estudiava matemàtiques avançades.

En els seus cursos sobre Introducció a l'anàlisi de 1859-1860, presentava els fonaments d'aquesta matèria per primera vegada. Però al 1861 la seva salut tingué una forta davallada i tardà dos anys a recuperar-se. Des de llavors hagué de dictar els seus cursos assegut mentre un estudiant escrivia a la pissarra. Després les seves migranyes intenses i les convulsions van ser substituïdes per importants problemes respiratoris.

En el seu curs quadrimestral sobre Teoria general de funcions analítiques de 1863-1864 inicià la formulació de la seva teoria dels nombres

reals, definits com a sumes de sèries convergents de nombres racionals.² Fins al 1890, Weierstrass revisà i amplià aquests cursos quadrimestrals.

Veiem, doncs, que dos temes centraven l'activitat de Weierstrass: el seu programa per dotar el càlcul d'una fonamentació sòlida a partir d'un desenvolupament rigorós del sistema dels nombres reals, anomenat «aritmetització de l'anàlisi», i el seu treball en sèries de potències i de funcions analítiques.

En una carta de 1875 a Kowaleskaia deia «el que demano a un treball científic és unitat de mètode, el seguiment seqüencial d'un pla definit i l'elaboració apropiada dels detalls». Considerava bàsica l'atenció als detalls i, malgrat que preferia proves constructives, també en donà d'existència.

No fou el primer a voler rigoritzar el càlcul. Bolzano, ja al 1817, i Cauchy tenien definicions clares dels conceptes de «límit», «suma de sèries», «funció contínua», «derivada», etc., però les seves definicions eren poc útils en les demostracions.

Per exemple, Cauchy definia «límit» de la manera següent: «Quan els valors atribuïts successivament a una variable s'acosten indefinidament a un valor fixat, de manera que arriben a diferir d'ell tan poc com vulguem, aquest últim s'anomena "límit dels altres"». A partir d'aquesta definició del seu *Cours d'analyse* de 1821, Cauchy donà la famosa prova incorrecta que, segons ell, tota funció límit puntual de funcions contínues havia de ser contínua.

La diferència entre les definicions de Bolzano i Cauchy amb les de Weierstrass són ben significatives. Devem a Weierstrass la nostra definició $\varepsilon - \delta$ usual de límit i de funció contínua. El seu rigor, amb definicions precises dels conceptes bàsics en termes de desigualtats que permetien demostracions rigoroses, i el seu treball varen fer que els matemàtics fossin més curosos amb les subtilitats de l'anàlisi i afectaren definitivament l'evolució de les matemàtiques.

Però els seus mètodes i resultats no van ser fàcilment acceptats per tota la comunitat matemàtica. Els seus arguments subtils, que incloïen proves per contradicció i d'existència, foren motiu de controvèrsia. Weierstrass

2. En aquest curs demostrà que els nombres complexos formaven l'única extensió algebraica commutativa dels reals. Al 1831 Gauss n'havia promès una demostració que mai va arribar a donar.

adoptà la teoria de Cantor, usada per exemple per demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass sobre l'existència d'un punt d'acumulació per als subconjunts infinits acotats de $\mathbb{R}$. Al 1877, Kronecker, un seu amic molt proper durant vint anys, criticà obertament Weierstrass i Cantor davant dels estudiants, renegant de l'infinit actual, fet que comportà el seu distanciament definitiu.

Sobre el tema de les sèries, el mateix Weierstrass deia que el seu treball en anàlisi «no era res més que sèries de potències». A [Bi] s'inclou una visió general de l'obra de Weierstrass sobre funcions analítiques.

Weierstrass i Riemann

L'estudi de Weierstrass de les funcions el·líptiques i abelianes, guiat pel desig de completar el treball iniciat per Abel i Jacobi, estudi que motivà el de la seva teoria de funcions analítiques, es va mantenir com a tema predilecte al llarg de la seva vida i com a leitmotiv de molts dels resultats que va presentar en els seus cursos.

Al 1856 Weierstrass no va poder demostrar que tota funció abeliana era quocient de dues sumes de sèries de potències: «Aquí trobem un problema que, pel que jo sé, encara no s'ha estudiat de manera general, però que tanmateix té una importància particular en la teoria de funcions».

En lloc d'això, al 1857 Bernhard Riemann va publicar un nou tractament de les integrals abelianes en el quart i darrer article [Ri] d'una mateixa sèrie en el volum 54 de *Crelle*,³ en els quals va incloure un resum del seu punt de vista geomètric en la teoria de funcions de variable complexa contingut en la tesi. Amb l'objectiu de tractar-hi funcions multiformes i les seves inte-

3. Bernhard Riemann (1826-1866), molt tímid i amb pànic de parlar en públic, mostrà grans habilitats matemàtiques des de molt jove. A dinou anys inicià estudis per a sacerdot com el seu pare, qui el mateix any va permetre que estudiés matemàtiques i l'envià a Göttingen, on Riemann tingué Gauss de professor en un curs elemental.

Però Göttingen no era encara el millor lloc per fer matemàtiques i al 1847 Riemann passà a la Universitat de Berlín per estudiar amb Steiner, Jacobi, Dirichlet i Eisenstein. Dirichlet fou el que més l'influencià perquè elaborava les seves idees sobre bases intuïtives, per extreure'n anàlisis lògiques molt fines, tot evitant els càlculs llargs tant com li