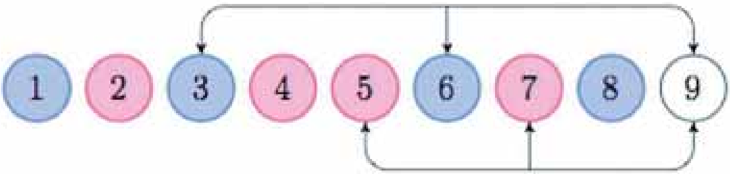
UNIVERSITAT DE BARCELONA

# PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES DE TOTS COLORS

**Ignasi Mundet i Riera**
Professor titular d'universitat de Geometria i Topologia




Lliçó inaugural del curs acadèmic 2010-2011
Facultat de Matemàtiques

# PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES DE TOTS COLORS

**Ignasi Mundet i Riera**
Professor titular d'universitat de Geometria i Topologia

Lliçó inaugural del curs acadèmic 2010·2011

Facultat de Matemàtiques

Barcelona, 22 de setembre de 2010

UNIVERSITAT DE BARCELONA

## 1. Progressions aritmètiques

Per a nosaltres els nombres naturals seran els enters més grans que el 0 (és a dir, el 0 no ho serà). Totes les progressions aritmètiques que considerarem estaran formades per nombres naturals i seran de longitud finita. Per tant, donat un nombre natural $n$, anomenarem *progressió aritmètica de longitud* $n$ qualsevol conjunt de nombres naturals amb la propietat que, si escrivim els seus elements en ordre creixent:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

aleshores se satisfà

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1}.$$

En altres paraules, les distàncies entre elements consecutius del conjunt són totes iguals i els nombres $\{x_1, \ldots, x_n\}$ estan en progressió aritmètica.

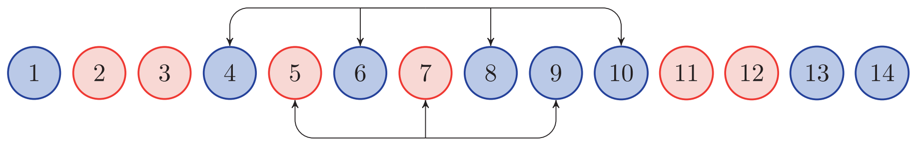
Per exemple, això és una progressió aritmètica de longitud 4:


Com que en tota la lliçó únicament parlarem de progressions aritmètiques, de vegades, per fer-ho més passador, ens hi referirem anomenant-les senzillament *progressions*.

## 2. Progressions de longitud 3 monocolors

Sigui $S$ un conjunt qualsevol de nombres naturals. Triem un nombre natural $k$ i agafem un conjunt $C$ de $k$ colors diferents. Suposem que hem pintat els elements de $S$ usant els colors de $C$ (en altres paraules, suposem que hem triat una aplicació qualsevol $f : S \to C$). Llavors direm que hem especificat una *$k$-coloració* de $S$. Direm que una progressió aritmètica dins de $S$ és *monocolor* si tots els seus elements estan pintats d'un mateix color.

**Exemple.** En el diagrama següent especifiquem una coloració de $S = \{1, \ldots, 14\}$ usant com a colors $C = \{$blau, vermell$\}$; els elements indicats per les fletxes de dalt formen una progressió aritmètica de longitud 4 monocolor, però els indicats per les fletxes de sota formen una progressió aritmètica que no és monocolor:

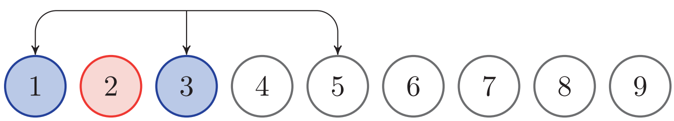



Comencem plantejant-nos el problema següent:

**Problema.** *Hi ha alguna 2-coloració de* $\mathrm{S} = \{1,\ldots,9\}$ *per a la qual no hi hagi cap progressió aritmètica monocolor de longitud 3 dins de* $\mathrm{S}$*?*

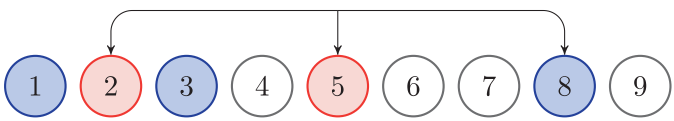
Mirarem de donar una resposta per tempteig. Colorarem els elements de $S$ començant pels més baixos, anant amb compte, cada vegada que triem un color, de no generar progressions monocolors. Com abans, farem servir el blau i el vermell. A l'hora de triar els colors dels tres primers elements, l'únic que cal és no pintar-los tots tres del mateix color. Per exemple, podem fer-ho així:


Ara, si volem evitar progressions monocolors, la casella 5 no es pot pintar de blau:



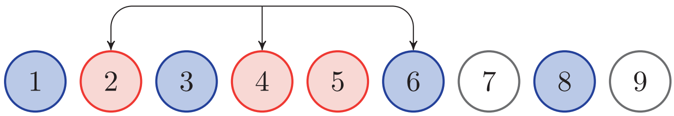

Per tant, pintem la casella 5 de color vermell:


Per la mateixa raó d'abans, la casella 8 no es pot pintar de color vermell, així doncs la pintarem de color blau:

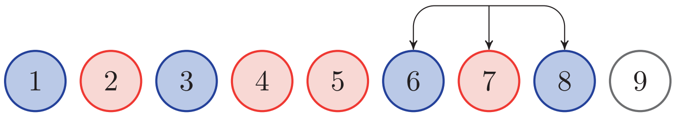


Podem pintar la casella 4 de qualsevol color sense por de crear cap progressió monocolor. La pintem, per exemple, de color vermell:

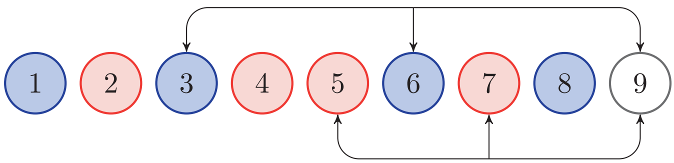

Ara la casella 6 ja no és lliure. Cal pintar-la de color blau:




I hem de pintar la casella 7 de color vermell:




Arribats a aquest punt, és impossible pintar la casella 9 sense crear una progressió de longitud 3 monocromàtica:




No hem estat capaços de trobar una coloració que evités progressions monocolors. Ara bé, com que a l'hora de pintar algunes de les caselles hem tingut llibertat per triar els colors (concretament, a les caselles 1, 2, 3, 4), podríem pensar que si haguéssim triat aquests colors de manera més hàbil sí que hauríem pogut trobar la coloració que buscàvem. Però no és així: és impossible donar una coloració amb dos colors del conjunt $\{1, \ldots, 9\}$ sense progressions aritmètiques monocolors de longitud 3! Això es pot demostrar fàcilment considerant les diverses coloracions possibles. Si el lector s'hi entreté veurà que en qualsevol cas, un cop triats els colors dels quatre primers nombres, els colors dels nombres següents queden determinats pel requeriment que no hi hagi progressions monocolors, fins a arribar a una situació com l'anterior, on un dels nombres no pot rebre cap dels dos colors sense donar lloc a una progressió monocolor.

En comptes de mostrar detalladament el que acabem de dir, tot seguit donarem un argument que demostra un resultat una mica més feble, però que té la virtut de poder-se generalitzar a situacions més complexes, com veurem més endavant.

**Teorema 1.** *És impossible donar 2-coloració del conjunt {1,2,...,17} sense progressions monocolors de longitud 3.*

**Demostració.** Sigui $S = \{1, 2, \ldots, 17\}$, i suposem que existeix una 2-coloració de $S$,

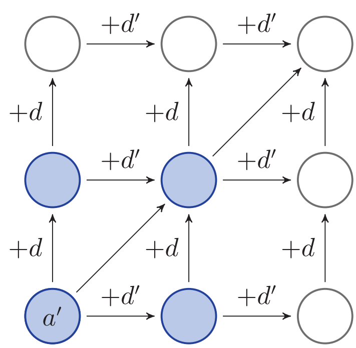
$$f : S \to \{\text{blau}, \text{vermell}\},$$

sense progressions de longitud 3 monocolors. Veurem que això ens durà a una contradicció. Donat un element $i$ de $\{1, \ldots, 15\}$ considerem el vector de colors següent: $F(i) = (f(i), f(i+1), f(i+2))$. Com que usem dos colors, hi ha $2^3 = 8$ maneres de colorar tres elements consecutius; d'aquestes, hem de sostreure les dues coloracions monocolors (blau, blau, blau) i (vermell, vermell, vermell), que immediatament donarien una progressió de longitud 3 monocolor. Per tant, les cadenes $F(1), F(2), \ldots, F(15)$ prenen valors dins un conjunt de sis possibilitats. Això implica que almenys dos dels vectors $F(1), \ldots, F(7)$ coincideixen: denotem-los per $F(a) = F(a + d)$, on $a, d$ són naturals per als quals $a, a + d \in \{1, \ldots, 7\}$, de manera que $a + 2d \leq 13$. Fixem-nos ara en la cadena $F(a)$. Com que té tres elements que es mouen dins un conjunt de dos colors, un d'aquests colors ha d'estar repetit. Suposem que

$$f(a') = f(a' + d') = \text{blau},$$

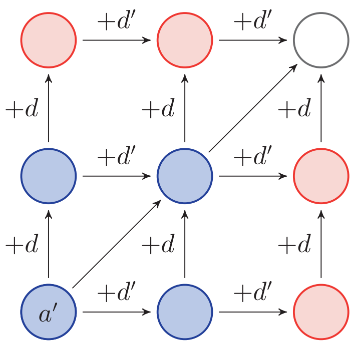
on $a', d'$ són naturals que satisfan $a', a' + d' \in \{a, a+1, a+2\}$, de manera que $a' + 2d' \leq a + 4$.

Considerem el diagrama següent:



Tot i estar disposats en una matriu $3 \times 3$, els discos d'aquest diagrama representen elements del conjunt $S$. El disc de la cantonada inferior esquerra representa $a'$ i els nombres representats pels altres discos estan determinats pel requeriment que en passar d'un disc a un altre a través d'una fletxa vertical o horitzontal, respectant-ne l'orientació, sumem la quantitat indicada per la fletxa (fent aquestes operacions no sortim mai del conjunt $S$, ja que $a' + 2d + 2d' \leq a + 4 + 2d \leq 13 + 4 = 17$).

Llavors, les tres files del diagrama, les tres columnes i la diagonal indicada representen progressions aritmètiques de tres elements diferents (la diagonal que no hem dibuixat no té per què correspondre's amb tres elements diferents, a menys que $d \neq d'$).




Ara, per evitar que hi hagi columnes o files monocolors cal que els quatre discos que indiquem a la figura de l'esquerra estiguin pintats de vermell. Però llavors és impossible associar un color a la cantonada superior dreta sense crear una progressió monocolor: si la pintem de blau la diagonal indicada representa una progressió blava de longitud 3, i si la pintem de vermell tant la columna dreta com la fila superior representen progressions vermelles de longitud 3.

Per tant, la coloració $f$ que havíem pres forçosament ha de tenir alguna progressió de longitud 3 monocolor, en contradicció amb el que havíem suposat. $\square$

## 3. El teorema de Van der Waerden

El problema que hem considerat a la secció anterior es pot generalitzar en dues direccions. D'una banda, podem augmentar el nombre de colors:

considerar coloracions amb tres, quatre o més colors en lloc de dos com fins ara. D'altra banda, podem considerar coloracions sense progressions aritmètiques monocolors de quatre, de cinc o més elements. És clar que, augmentant qualsevol de les dues quantitats (nombre de colors, longitud de les progressions monocolors que es vol evitar), el nombre d'enters consecutius que podrem colorar creixerà. Per exemple, si fem servir tres colors és possible colorar el conjunt $\{1, \ldots, 9\}$, de manera que no hi hagi progressions monocolors de longitud 3. Ens podem plantejar llavors: si $n$ i $k$ són enters prou grans, podria ser que per a qualsevol $N$ existís una $k$-coloració de $\{1, \ldots, N\}$ sense progessions monocolors de longitud $n$? La resposta, negativa, ens la dóna el teorema de Van der Waerden.

**Teorema 2 (Van der Waerden).** *Per a qualssevol enters positius* n, k, *on* $\mathrm{n} \geq 2$, *existeix un nombre* W(n, k) *amb aquesta propietat: per a tot enter positiu* $\mathrm{N} \geq \mathrm{W(n,\ k)}$, *qualsevol* k*-coloració de* $\{1, \ldots, \mathrm{N}\}$ *conté almenys una progressió aritmètica monocolor de longitud* n. *(Evidentment, el teorema de Van der Waerden també és cert si* $\mathrm{n} = 1$*.)*

### 3.1. Demostració del teorema de Van der Waerden

Farem servir inducció, de la manera que precisem tot seguit. Si $n, k$ són enters positius, considerem l'afirmació següent:

$$T(n,k) = \left( \begin{array}{c} \text{“existeix } W(n,k) \text{ de manera que, si } N \geq W(n,k), \\ \text{qualsevol } k\text{-coloració de } \{1, \ldots, N\} \text{ conté una} \\ \text{progressió aritmètica monocolor de longitud } n\text{”} \end{array} \right)$$

Per exemple, a la secció anterior hem demostrat que $T(3,2)$ és cert, prenent $W(3,2) = 17$ (tot i que, com hem dit, és suficient prendre $W(3,2) = 9$). És clar que el teorema de Van der Waerden equival a afirmar que $T(n,k)$ és cert per a qualssevol naturals $n, k$ amb $n \geq 2$.

Comencem observant que, per a qualsevol nombre de colors $k$, l'afirmació $T(2,k)$ és certa. En efecte, donar una progressió aritmètica de longitud 2 monocolor és el mateix que donar dos nombres diferents amb el mateix color. Ara, si colorem el conjunt $\{1, \ldots, k+1\}$ usant $k$ colors, necessàriament hi haurà dos nombres que rebran el mateix color.[1] Per

[1] Aquesta afirmació sol rebre el nom de *principi de Dirichlet* o *principi del colomer.*

tant, per demostrar el teorema de Van der Waerden, és suficient que demostrem el següent:

**Pas inductiu.** Sigui $n \geq 2$ un enter; suposem que, per a qualsevol enter $l \geq 1$, l'afirmació $T(n, l)$ és certa; aleshores, per a qualsevol enter $k \geq 1$, l'afirmació $T(n+1, k)$ és certa.

És de sentit comú que el teorema de Van der Waerden és conseqüència de la validesa de $T(2, k)$ per a tot $k$ i del que hem anomenat *pas inductiu*; aquest argument és un exemple de demostració per inducció.[2]

Demostrem, doncs, el pas inductiu. Si prenem un enter $n \geq 2$ i suposem que qualsevol enter $l \geq 1$, l'afirmació $T(n, l)$ és certa. És a dir, suposem que existeix, per a tot $l$, un enter $W(n, l)$ amb la propietat especificada per $T(n, l)$ (d'aquesta suposició se'n diu *hipòtesi inductiva*, perquè és la hipòtesi a partir de la qual demostrarem el pas inductiu). Òbviament $T(n+1, 1)$ és cert: només cal prendre $W(n+1, 1) = n+1$. Per tant, cal que $k \geq 2$ perquè $T(n+1, k)$ no sigui trivial. Començarem explicant com deduir que $T(n+1, 2)$ és cert; després veurem com desenvolupar els arguments que segueixen per demostrar $T(n+1, k)$ per a tot $k \geq 2$.

Per demostrar $T(n+1, 2)$ farem servir essencialment el mateix argument que hem usat a la demostració del teorema 1. Definim:

$$N_1 = W(n, 2), \qquad N_2 = 2W(n, 2^{N_1}) + N_1.$$

Vegem que, si prenem $W(n+1, 2) = N_2$, l'afirmació $T(n+1, 2)$ és certa. Considerem una coloració amb dos colors (blau i vermell, com sempre):

$$f : \{1, \ldots, N_2\} \to \{\text{blau}, \text{vermell}\}.$$

Sigui, per a tot $i \in \{1, \ldots, N_2 - N_1 + 1\}$,

$$F(i) = (f(i), f(i+1), f(i+2), \ldots, f(i+N_1-1)) \in \{\text{blau}, \text{vermell}\}^{N_1}.$$

Podem pensar, de manera abstracta, que la funció $F$ dóna una coloració del conjunt $\{1, \ldots, N_2 - N_1 + 1\}$ usant $2^{N_1}$ colors. Observem que

[2] Que un sil·logisme tan obvi com aquest rebi un nom en matemàtiques és conseqüència de la seva ubiqüitat. Un altre exemple d'afirmació trivial que, per la freqüència amb què apareix, ha acabat rebent un nom és el principi de Dirichlet que hem mencionat abans.

$W(n, 2^{N_1}) < N_2 - N_1 + 1$. Usant la hipòtesi inductiva sabem que existeix una progressió aritmètica de longitud $n$ dins de

$$S_2 := \{1, \ldots, W(n, 2^{N_1})\}$$

que és monocolor respecte a la coloració $F$. És a dir: existeixen nombres naturals $a_2, d_2$ per als quals

$$\{a_2, a_2 + d_2, a_2 + 2d_2, \ldots, a_2 + (n-1)d_2\} \subset S_2 \tag{1}$$

i, a més a més,

$$F(a_2) = F(a_2 + d_2) = \cdots = F(a_2 + (n-1)d_2). \tag{2}$$

Ara restringim la coloració $f$ al conjunt $S_1 = \{a_2, a_2+1, a_2+2, \ldots, a_2 + N_1 - 1\}$. Com que $S_1$ està format per $N_1$ enters consecutius i a la coloració $f$ usem dos colors, si apliquem novament la hipòtesi inductiva deduïm que $S_1$ conté una progressió de longitud $n$ monocolor respecte a $f$. És a dir, existeixen nombres naturals $a_1, d_1$ amb les propietats:

$$\{a_1, a_1 + d_1, a_1 + 2d_1, \ldots, a_1 + (n-1)d_1\} \subset S_1, \tag{3}$$

$$f(a_1) = f(a_1 + d_1) = \cdots = f(a_1 + (n-1)d_1). \tag{4}$$

Suposem, per exemple, que $f(a_1) =$ blau. Aleshores podem considerar un diagrama similar al de la demostració del teorema 1: