

TEXTOS DOCENTS

355

MATRIUS I VECTORS

I. Llerena
R. M. Miró-Roig

Departament d'Àlgebra i Geometria



UNIVERSITAT DE BARCELONA



TEXTOS DOCENTS

355

MATRIUS I VECTORS

I. Llerena
R. M. Miró-Roig

Departament d'Àlgebra i Geometria

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA

U

B

Índex

Introducció	9
Símbols lògics i de teoria de conjunts	11
1. Matrius i vectors	15
1.1. Els nombres reals i els nombres complexos	15
1.2. Els espais vectorials $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$	18
1.3. L'espai vectorial de les matrius	20
1.4. Producte de matrius	24
1.5. Matrius per blocs	27
1.6. Aplicacions definides per matrius	28
1.7. <i>Mathematica</i> : Operacions amb matrius i vectors	29
1.8. Exercicis i problemes	36
1.9. Activitats d'autoavaluació	40
2. Sistemes d'equacions lineals	43
2.1. Solucions d'un sistema d'equacions lineals	43
2.2. Reducció d'una matriu a una forma escalonada	46
2.3. El mètode de Gauss-Jordan	51
2.4. Rang d'una matriu	59
2.5. El teorema de Rouché-Frobenius	59
2.6. <i>Mathematica</i> : Resolució de sistemes d'equacions	60
2.7. Exercicis i problemes	64
2.8. Activitats d'autoavaluació	67
3. Matriu inversa i matrius elementals	71
3.1. Matriu inversa	71
3.2. Càlcul de la matriu inversa	72

3.3. Matrius elementals	74
3.4. Matrius equivalents	77
3.5. La factorització LU	77
3.6. <i>Mathematica</i> : Matrius invertibles. Descomposició LU	80
3.7. Exercicis i problemes	81
3.8. Activitats d'autoavaluació	83
4. Determinants	85
4.1. Primera definició i exemples	85
4.2. Segona definició	88
4.3. Equivalència de les dues definicions	88
4.4. Permutacions i determinant	92
4.5. Més propietats dels determinants	94
4.6. Càlcul de la matriu inversa per adjunts	96
4.7. Regla de Laplace	97
4.8. Determinants i rang	98
4.9. Sistemes d'equacions lineals. Regla de Cramer	101
4.10. <i>Mathematica</i> : Determinants	103
4.11. Exercicis i problemes	104
4.12. Activitats d'autoavaluació	109
5. Bases de $\mathbb{R}^n$	113
5.1. Independència lineal	113
5.2. Rang i independència lineal de vectors	116
5.3. Bases de $\mathbb{R}^n$	119
5.4. Coordenades d'un vector	122
5.5. Canvis de base	122
5.6. Relacions de dependència lineal en bases arbitràries	124
5.7. <i>Mathematica</i> : Independència lineal i coordenades	127
5.8. Exercicis i problemes	128
5.9. Activitats d'autoavaluació	131
6. Subespais vectorials	133
6.1. Subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$	133
6.2. Generadors i equacions de subespais vectorials	137
6.3. Suma i intersecció de subespais i les seves dimensions	143
6.4. Suma directa	146
6.5. <i>Mathematica</i> : Subespais vectorials	149

6.6. Exercicis i problemes	151
6.7. Activitats d'autoavaluació	154
7. Aplicacions lineals	157
7.1. Aplicacions definides per matrius	157
7.2. Definició d'aplicació lineal	159
7.3. Nucli i imatge d'una aplicació lineal	161
7.4. Monomorfismes, epimorfismes i isomorfismes	164
7.5. Composició d'aplicacions lineals	165
7.6. Canvi de bases	167
7.7. Aplicacions lineals i sistemes d'equacions	169
7.8. <i>Mathematica</i> : Aplicacions lineals	170
7.9. Exercicis i problemes	171
7.10. Activitats d'autoavaluació	175
A. Introducció al <i>Mathematica</i>	179
A.1. Els documents notebook	179
A.2. Nombres i operacions aritmètiques	181
A.3. Utilització de resultats anteriors	182
A.4. Variables	182
A.5. Algunes funcions del <i>Mathematica</i>	183
A.6. Avaluació	184
A.7. Càlcul simbòlic	184
A.8. Resolució d'equacions	185
Bibliografia	187
Índex analític	189

Introducció

Aquestes notes abasten el temari de l'assignatura Matrius i Vectors, que, amb motiu dels nous plans d'estudi, s'ha implementat a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. Aquest text-guia correspon a una assignatura pont entre el batxillerat i un curs clàssic d'àlgebra lineal i està pensat per fomentar en l'alumnat l'hàbit de discórrer i demanar-se el perquè de les coses. Al llarg del curs es pretén que l'alumne adquireixi destresa en la manipulació dels objectes més bàsics de l'àlgebra lineal: vectors i matrius. Els mètodes que aprendrà en aquest curs deixaran l'alumne al llindar de l'àlgebra abstracta.

Així doncs, l'objectiu de l'assignatura no és només l'adquisició dels coneixements i les habilitats en el maneig dels objectes i les tècniques inclosos en el programa; també pretén assolir el desenvolupament progressiu de la capacitat de comprensió de conceptes abstractes, i l'hàbit de rigor en demostracions i resolució de problemes.

El temari s'ha dividit en set capítols i un apèndix en què s'introdueixen nocions bàsiques del programa *Mathematica*. Cada capítol conté una secció dedicada a la utilització d'aquest programa per resoldre les qüestions tractades en el capítol i una sèrie d'exemples resolts amb el programa per tal que l'estudiant vagi adquirint experiència en l'ús d'un programa informàtic. Cada capítol conté també una llarga col·lecció d'exercicis i problemes de dificultat variable. Hem procurat incloure-hi problemes de tots els nivells, per tal que l'alumne s'exerciti gradualment i pugui assolir els objectius desitjats. Els capítols acaben amb una secció, que hem anomenat d'autoavaluació, en la qual, mitjançant una sèrie de qüestions, es pretén que l'alumnat reflexioni sobre l'abast dels conceptes introduïts i les seves implicacions.

Volem agrair a Gemma Colomé, Elisenda Feliu i Alberto Fernández la lectura atenta que han fet del text i els seus suggeriments, que han estat una contribució inestimable i decisiva per a l'elaboració d'aquest llibre.

Barcelona, febrer del 2010

Símbols lògics i de teoria de conjunts

El llenguatge matemàtic sovint es nodreix de símbols per designar frases o paraules. Fem una llista dels més comuns i que seran d'ús freqüent al llarg d'aquest curs:

$\forall$	per a tot	$\exists$	existeix
$\implies$	implica	$\iff$	si i només si
$:=$	igual per definició	$\square$	fi de la demostració
$\cup$	unió	$\cap$	intersecció
$\subset$	contingut	$\supset$	conté
$\emptyset$	conjunt buit	$\in$	pertany (a un conjunt)
$\setminus$	menys (en conjunts)	$\notin$	no pertany
$\mathbb{N}$	nombres naturals	$\mathbb{Z}$	nombres enters
$\mathbb{Q}$	nombres racionals	$\mathbb{R}$	nombres reals
$\mathbb{C}$	nombres complexos	$\delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$	delta de Kronecker
$\sum$	suma	$\prod$	producte

El símbol *sumatori* $\sum$ indica una suma que té per sumands l'expressió que segueix al sumatori en variar un índex. La variació d'aquest índex cal indicar-la en el sumatori (llevat que sigui molt evident). Anàlogament per al producte $\prod$. Per exemple:

$$\sum_{i=1}^5 2^i = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

$$\prod_{i=1}^5 2^i = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5.$$

En ocasions, els signes que varien són més d'un. La situació següent es presenta sovint.

Donats els conjunts

$$\{a_1, \dots, a_k\}, \{b^1, \dots, b^m\} \quad \text{i} \quad \{c_1^1, c_1^2, \dots, c_1^k, c_2^1, c_2^2, \dots, c_2^k, \dots, c_m^1, \dots, c_m^k\},$$

tenim

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq m}} a_i c_j^i b^j \\ &= a_1 c_1^1 b^1 + a_1 c_2^1 b^2 + \dots + a_1 c_m^1 b^m + a_2 c_1^2 b^1 + a_2 c_2^2 b^2 + \dots + a_k c_m^k b^m \\ &= a_1 \left(\sum_{j=1}^m c_j^1 b^j \right) + \dots + a_k \left(\sum_{j=1}^m c_j^k b^j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i c_1^i \right) b^1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^k a_i c_m^i \right) b^m \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \left(\sum_{j=1}^m c_j^i b^j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k a_i c_j^i \right) b^j. \end{aligned}$$

El *producte cartesià* de dos conjunts A i B és el conjunt de parells ordenats

$$A \times B := \{ (a, b) \text{ parell ordenat} \mid a \in A, b \in B \}.$$

Més en general, el *producte cartesià* d'una família de conjunts A_i , $i = 1, \dots, n$, és el conjunt de *n-ples* (ordenades) $(a_1, \dots, a_n)$ amb $a_i \in A_i$, $\forall i$. Per exemple,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} := \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}.$$

Sovint, el matemàtic fa servir lletres gregues:

lletra	minúscula	majúscula
alfa	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
èpsilon	ϵ o ε	
zeta	ζ	
eta	η	
theta	θ o ϑ	Θ
iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mi	μ	
ni	ν	
csi	ξ	Ξ
pi	π	Π
ro	ρ o ϱ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
ípsilon	υ	Υ
fi	ϕ o φ	Φ
khi	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

Les majúscules que no hi apareixen són iguals a lletres del nostre alfabet.

Capítol 1

Matrius i vectors

En aquest primer capítol presentem els principals objectes matemàtics a què està dedicat el curs: les n -ples de nombres reals o complexos, que anomenarem *vectors*, i les taules rectangulars de nombres reals o complexos, que anomenarem *matrius*. Són els objectes que primer apareixen en infinitat de problemes matemàtics i en les seves aplicacions. Per això el seu estudi, i el de les operacions que es fan amb ells, són essencials en qualsevol camp que faci servir eines matemàtiques.

1.1. Els nombres reals i els nombres complexos

Designarem per $\mathbb{R}$ el conjunt de nombres reals. En aquest conjunt tenim definides dues operacions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

que s'anomenen *suma* i *producte* respectivament. L'operació suma té les propietats següents:

- (1) Associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$.
- (2) Commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$.
- (3) L'element $0 \in \mathbb{R}$ compleix: $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a$. Es diu que 0 és l'*element neutre* de la suma de reals.

- (4) $\forall a \in \mathbb{R}$, l'element $-a$ compleix $a + (-a) = 0 = (-a) + a$. Es diu que $-a$ és l'element oposat d' a .

Observació 1.1.1. Aquestes quatre propietats de la suma s'acostumen a resumir dient que $(\mathbb{R}, +)$ és un *grup commutatiu o abelià*.

L'operació producte té les següents propietats:

- (1) Associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (ab)c = a(bc)$.
- (2) Commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = ba$.
- (3) L'element $1 \in \mathbb{R}$ compleix: $\forall a \in \mathbb{R}, a1 = 1a = a$. Es diu que 1 és l'element *neutre o unitat* del producte de reals.
- (4) $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, l'element $\frac{1}{a}$ compleix $a(\frac{1}{a}) = 1 = (\frac{1}{a})a$. Es diu que $\frac{1}{a}$ és l'element *invers* de a , i sovint el denotem a^{-1} . Observeu que 0 no té element invers.

Les operacions suma i producte estan relacionades per la següent propietat:

Distributiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b)c = ac + bc$.

Observació 1.1.2. Aquestes propietats de la suma i el producte s'acostumen a resumir dient que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ és un *cos commutatiu*. El conjunt de números racionals $\mathbb{Q}$ amb la seva suma i producte compleixen propietats similars i, per aquest motiu, també es diu que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ és un cos commutatiu.

Designarem per $\mathbb{C}$ el conjunt de parells de nombres reals, i els anomenarem *nombres complexos*. Farem servir la notació següent, on $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a + bi := (a, b), \quad a := (a, 0), \quad bi := (0, b), \quad i := (0, 1).$$

A $\mathbb{C}$ definim dues operacions

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}; \\ (a + bi, a' + b'i) &\mapsto (a + a') + (b + b')i \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a + bi, a' + b'i) &\mapsto (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \end{aligned}$$

que s'anomenen *suma* i *producte*, respectivament. En concret, tenim: $i^2 = ii = -1$.

A més a més:

$$a + a' = (a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0), \quad aa' = (a, 0)(a', 0) = (aa', 0).$$

És a dir, les operacions suma i producte de dos reals $a, a' \in \mathbb{R}$ donen el mateix si les considerem com a reals o com a complexos. Això permet identificar el real $a \in \mathbb{R}$ amb el complex $a = (a, 0) \in \mathbb{C}$ i considerar

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

A $\mathbb{C}$ l'operació suma té les mateixes propietats que la suma a $\mathbb{R}$:

- (1) Associativa: $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
- (2) Commutativa: $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z$.
- (3) L'element $0 \in \mathbb{C}$ compleix: $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$. Es diu que 0 és l'*element neutre* de la suma de complexos.
- (4) $\forall z = a + bi \in \mathbb{C}$, l'element $-z := (-a) + (-b)i$ compleix $z + (-z) = 0 = (-z) + z$. Es diu que $-z$ és l'*element oposat* de z .

A $\mathbb{C}$ l'operació producte té les propietats següents:

- (1) Associativa: $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'')$.
- (2) Commutativa: $\forall z, z' \in \mathbb{C}, zz' = z'z$.
- (3) L'element $1 \in \mathbb{C}$ compleix: $\forall z \in \mathbb{C}, z1 = 1z = z$. Es diu que 1 és l'*element neutre* o *unitat* del producte de complexos.
- (4) $\forall z = a + bi \in \mathbb{C}, z \neq 0$, l'element $z^{-1} := \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ compleix $zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$. Es diu que z^{-1} és l'*element invers* d' a . Observeu que 0 no té element invers.

Les operacions suma i producte estan relacionades per la propietat següent:

$$\text{Distributiva: } \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z + z')z'' = zz'' + z'z''.$$

Totes aquestes propietats de les operacions dels números complexos es poden comprovar sense dificultat. Per exemple, comprovem que

$$(a + bi) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right) = \left(a \frac{a}{a^2 + b^2} + b \frac{b}{a^2 + b^2} \right) + \left(-a \frac{b}{a^2 + b^2} + b \frac{a}{a^2 + b^2} \right) i = 1.$$

Observem que, per a tot $z = a + bi \in \mathbb{C}$, tenim $0z = 0$, d'on resulta que 0 no pot tenir element invers.

Es diu *conjugat* d'un complex $z = a + bi$ al complex

$$\bar{z} := a - bi.$$

Es diu *mòdul* d'un complex $z = a + bi$ al número real i positiu

$$\|z\| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Observació 1.1.3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ també és un cos commutatiu.

1.2. Els espais vectorials $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$

Definició 1.2.1. Una n -pla ordenada de nombres reals; és a dir, un element $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ s'anomena *vector (real)*.

Anomenarem *espai vectorial real* $\mathbb{R}^n$ al conjunt

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

junt amb les dues operacions següents:

Suma de vectors. Donats dos vectors $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ es defineix la seva suma com el vector:

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Producte d'un real per un vector. Donat un vector $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i un real $\alpha \in \mathbb{R}$ es defineix el seu producte com el vector:

$$\alpha y = \alpha(y_1, \dots, y_n) := (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Als elements de $\mathbb{R}$, generalment se'ls anomena *escalars*.

Definició 1.2.2. Una n -pla ordenada de números complexos, és a dir un element $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, s'anomena *vector (complex)*.

Anomenarem *espai vectorial complex* $\mathbb{C}^n$ al conjunt

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \mid z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

junt amb les dues operacions següents:

Suma de vectors. Donats dos vectors $z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ es defineix la seva suma com el vector:

$$z + w = (z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) := (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Producte d'un complex per un vector. Donat un vector $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ i un complex $\alpha \in \mathbb{C}$ es defineix el seu producte com el vector:

$$\alpha w = \alpha(w_1, \dots, w_n) := (\alpha w_1, \dots, \alpha w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Als elements de $\mathbb{C}$, generalment se'ls anomena *escalars*.

Exemple 1.2.3:

1. Si $x = (2, 5), y = (-1, 7) \in \mathbb{R}^2$, aleshores $x + y = (1, 12) \in \mathbb{R}^2$.
2. Si $y = (-1, 7, 0) \in \mathbb{R}^3$ i $\alpha = -2 \in \mathbb{R}$, aleshores $\alpha y = (2, -14, 0) \in \mathbb{R}^3$.
3. Si $z = (2i, 5 - i), w = (-1, i) \in \mathbb{C}^2$, aleshores $z + w = (-1 + 2i, 5) \in \mathbb{C}^2$.
4. Si $w = (-i, 1 + i, 0) \in \mathbb{C}^3$ i $\alpha = 2i \in \mathbb{C}$, aleshores $\alpha w = (2, -2 + 2i, 0) \in \mathbb{C}^3$.