

GUÍA PRÁCTICA DE TÉCNICAS OPERATIVAS DE GESTIÓN

Teoría y ejercicios

Jordi Bachs Ferrer (coord.)
José M. Merigó Lindahl
Pilar López-Jurado González
M.^a Carmen Gracia Ramos

Departament d'Economia i Organització d'Empreses



GUÍA PRÁCTICA DE TÉCNICAS OPERATIVAS DE GESTIÓN

Teoría y ejercicios

Jordi Bachs Ferrer (coord.)
José M. Merigó Lindahl
Pilar López-Jurado González
M.^a Carmen Gracia Ramos

Departament d'Economia i Organització d'Empreses

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



ÍNDICE

PRÓLOGO	7
Tema 1. ELEMENTOS BÁSICOS Y TÉCNICAS NUMÉRICAS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN LA EMPRESA	9
1.1. GUÍA DE ESTUDIO	9
1.1.1. LA VALUACIÓN	9
1.1.2. INTERVALOS DE CONFIANZA	12
1.1.3. LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS	16
1.1.4. NÚMEROS BORROSOS	21
1.1.5. LA NOCIÓN DE DISTANCIA	36
1.1.6. TEORÍA GENERAL DE LOS EXPERTONES	41
1.2. EJERCICIOS RESUELTOS	49
1.3. EJERCICIOS PROPUESTOS	59
Tema 2. LAS RELACIONES	69
2.1. GUÍA DE ESTUDIO	69
2.1.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LAS RELACIONES	69
2.1.2. CARACTERÍSTICAS DE LAS RELACIONES ENTRE ELEMENTOS DE UN MISMO CONJUNTO	71
2.1.3. RELACIONES DE SEMEJANZA Y SIMILITUD	74
2.1.4. RELACIONES DE PREORDEN Y ORDEN	74
2.1.5. EL ENCADENAMIENTO DE RELACIONES DENTRO DE UN CONJUNTO	75
2.1.6. LA ACUMULACIÓN DEL NIVEL DE LAS RELACIONES	77
2.1.7. LAS RELACIONES DE INCIDENCIA	79
2.2. EJERCICIOS RESUELTOS	81
2.3. EJERCICIOS PROPUESTOS	83
Tema 3. EL PROBLEMA DE LA ASIGNACIÓN	87
3.1. GUÍA DE ESTUDIO	87
3.1.1. INTRODUCCIÓN	87
3.1.2. ALGORITMO DE ASIGNACIÓN POR ELIMINACIÓN DE FILAS Y COLUMNAS	88
3.2. EJERCICIOS RESUELTOS	91
3.3. EJERCICIOS PROPUESTOS	93
Tema 4. PROCESOS DE AGRUPACIÓN	95
4.1. GUÍA DE ESTUDIO	95
4.1.1. INTRODUCCIÓN	95
4.1.2. ALGORITMOS PARA LA OBTENCIÓN DE AFINIDADES	96
4.1.3. LAS SUBRELACIONES MÁXIMAS DE SIMILITUD	98
4.2. EJERCICIOS RESUELTOS	102
4.3. EJERCICIOS PROPUESTOS	112

Tema 5. RELACIONES DE ORDEN	117
5.1. GUÍA DE ESTUDIO	117
5.1.1. <i>CONCEPTO</i>	117
5.1.2. <i>IMPORTANCIA DE LA AGRUPACIÓN DE OBJETOS INDIFERENTES PARA LA ORDENACIÓN</i>	119
5.1.3. <i>ESTABLECIMIENTO DE UN ORDEN A PARTIR DE LA FUNCIÓN ORDINAL</i>	124
5.2. EJERCICIOS RESUELTOS	129
5.3. EJERCICIOS PROPUESTOS	134
BIBLIOGRAFÍA	136

PRÓLOGO

El texto docente Guía Práctica de Técnicas Operativas de Gestión (teoría y ejercicios) desarrolla la mayoría de los contenidos del programa relativo a la asignatura Técnicas Operativas de Gestión que se imparte en la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas. El temario se divide en cinco bloques, el primero está dedicado a los elementos básicos y a las técnicas numéricas para la toma de decisiones. En los otros cuatro, se desarrollan los cuatro conceptos fundamentales de las técnicas numéricas como son las relaciones, las asignaciones, las agrupaciones y las ordenaciones.

Los autores del manual presentan los diferentes capítulos siguiendo una estructura lógica abordando los conceptos y los problemas de una manera directa, eficaz e intentando en todo momento que el manual resulte accesible tanto en su vertiente de estudio como de consulta. Se ha intentado utilizar un lenguaje claro y pedagógico aunque no por ello carente del rigor que todo desarrollo científico exige.

Cada capítulo comienza con una guía de estudio teórica de los diferentes conceptos objeto de estudio reforzando éstos gracias a la presentación de diferentes ejercicios resueltos y comentados con el fin de familiarizar al alumno con los desarrollos planteados. Seguidamente se proponen toda una serie de ejercicios resueltos que permitirán un trabajo autónomo por parte del alumno cerrando los temas con un apartado de ejercicios propuestos con los que el alumno podrá comprobar el nivel de conocimientos conseguido tanto teóricos como prácticos.

Esperamos que los métodos y técnicas que se desarrollan a lo largo de estos cinco bloques permitan un primer contacto positivo por parte del estudiante con la problemática actual de la empresa. En particular, con la resolución de problemas de decisión complejos que requieren de la utilización de diferentes técnicas operativas de gestión para llevar a cabo su correcta administración. También esperamos que los contenidos resulten fructuosos en el proceso de formación del alumno ya que el objetivo de esta guía consiste en ser útil.

Por último, consideramos necesario mencionar la gran labor desarrollada por el Dr. Jaime Gil Aluja, maestro de los autores de este texto e impulsor de las técnicas operativas de gestión en la incertidumbre y de la aplicación de las mismas en el campo de la gestión empresarial. Y gracias a esta labor de investigación, los autores han podido adquirir los conocimientos necesarios para llevar a cabo la elaboración de este texto docente.

Barcelona, octubre 2008

Tema 1. ELEMENTOS BÁSICOS Y TÉCNICAS NUMÉRICAS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN LA EMPRESA

1.1. GUÍA DE ESTUDIO

1.1.1. LA VALUACIÓN

Concepto

Es un dato numérico en una escala adecuada de valores que afectamos a un fenómeno percibido por nuestros sentidos o por nuestra experiencia. Es la expresión subjetiva de un nivel de verdad, el cual toma sus valores del intervalo de confianza $[0, 1]$.

Se tiene que distinguir del concepto de:

- Evaluación: Es la asociación de un valor numérico, que puede ser positivo, negativo o nulo, a un objeto (concreto o abstracto) realizada por un experto.
- Probabilidad: Es un dato objetivo, y por tanto teórico, aceptado por todo el mundo. Obsérvese que la probabilidad se halla ligada a la noción de azar mientras que la valuación a la noción de incertidumbre y subjetividad.

Las valuaciones pueden ser asignadas en toda escala numérica de valores, pero las más usuales son:

- En el campo binario: 0 o 1.
- En el campo multivalente o borroso: Número comprendido entre 0 y 1, incluidos estos.

De entre todas las formas de expresar la subjetividad, las más usuales, por su facilidad comunicativa son:

- Número preciso " a ", siendo $a \in [0, 1]$. Ej: 0.5, 1, 0, 0.47, etc.
- Intervalo de confianza " $[a_1, a_2]$ ", siendo $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1$. Ej: $[0.4, 0.5]$, $[0.1, 0.4]$, etc. Obsérvese que a_1 hace referencia al extremo inferior y a_2 al extremo superior.
- Tripletta de confianza " $[a_1, a_2, a_3]$ ", siendo $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 1$. Ej: $[0.4, 0.47, 0.5]$, $[0.1, 0.3, 0.4]$, etc. Obsérvese que en este caso a_2 hace referencia al máximo de presunción, es decir, el valor que se presume como de mayor posibilidad de ocurrencia.
- Cuádruplo de confianza " $[a_1, [a_2, a_3], a_4]$ ", siendo $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 1$. Ej: $[0.4, [0.47, 0.48], 0.5]$, $[0.1, [0.25, 0.35], 0.4]$, etc. Obsérvese que a_2 y a_3 hacen referencia al intervalo de máxima presunción, es decir, el intervalo que se presume de mayor posibilidad de ocurrencia.

Cuando una valuación expresa un valor de verdad entre 0 (falso) y 1 (verdadero), se pueden elegir un número infinito de correspondencias semánticas de la verdad a la falsedad. Veamos algunos ejemplos:

- Escala binaria: $\{0 = \text{falso}, 1 = \text{verdadero}\}$.
- Escala ternaria: $\{0 = \text{falso}, 0.5 = \text{ni falso ni verdadero}, 1 = \text{verdadero}\}$.

- Escala cuaternaria: $\{0 = \text{falso}, 1/3 = \text{más falso que verdadero}, 2/3 = \text{más verdadero que falso}, 1 = \text{verdadero}\}$.
- Escala pentaria: $\{0 = \text{falso}, 1/4 = \text{más falso que verdadero}, 1/2 = \text{ni verdadero ni falso}, 3/4 = \text{más verdadero que falso}, 1 = \text{verdadero}\}$.
- Escala endecadaria: $\{0 = \text{falso}, 1/10 = \text{prácticamente falso}, 2/10 = \text{casi falso}, 3/10 = \text{bastante falso}, 4/10 = \text{más falso que verdadero}, 5/10 = \text{ni verdadero ni falso}, 6/10 = \text{más verdadero que falso}, 7/10 = \text{bastante verdadero}, 8/10 = \text{casi verdadero}, 9/10 = \text{prácticamente verdadero}, 1 = \text{verdadero}\}$.
- Etc.

Aritmética de las valuaciones

La adición, sustracción, producto y división ordinarias no forman parte de la aritmética de las valuaciones en $[0, 1]$, al no ser operaciones internas, ya que el resultado puede quedar fuera del intervalo $[0, 1]$.

Las principales operaciones lógicas con las valuaciones son:

- Mínimo ($\wedge$): que corresponde a “y” (el uno y el otro).
- Máximo ($\vee$): que corresponde a “y/o” (el uno, el otro o los dos).
- Complemento a la unidad ($\neg$).

La aplicación de las operaciones para cada una de las formas en que se pueden expresar las valuaciones será:

Dados:

- Números precisos: $a, b \in [0, 1]$.
- Intervalos de confianza: $[a_1, a_2], [b_1, b_2]$, con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$.
- Tripletas: $[a_1, a_2, a_3], [b_1, b_2, b_3]$ con $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in [0, 1]$.
- Cuádruplos: $[a_1, [a_2, a_3], a_4], [b_1, [b_2, b_3], b_4]$ con $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in [0, 1]$.

Mínimo:

- Números precisos: $a \wedge b = \min\{a, b\}$.
Ejemplo: $0.8 \wedge 0.5 = 0.5$.
- Intervalos de confianza: $[a_1, a_2] \wedge [b_1, b_2] = [\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}]$.
Ejemplo: $[0.4, 0.5] \wedge [0.1, 0.7] = [0.1, 0.5]$.
- Tripletas: $[a_1, a_2, a_3] \wedge [b_1, b_2, b_3] = [\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}]$.
Ejemplo: $[0.4, 0.47, 0.5] \wedge [0.1, 0.3, 0.7] = [0.1, 0.3, 0.5]$.
- Cuádruplos: $[a_1, [a_2, a_3], a_4] \wedge [b_1, [b_2, b_3], b_4] = [\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}, \min\{a_4, b_4\}]$.
Ejemplo: $[0.2, [0.3, 0.4], 0.5] \wedge [0.1, [0.2, 0.3], 0.6] = [0.1, [0.2, 0.3], 0.5]$.

Máximo:

- Números precisos: $a \vee b = \max\{a, b\}$.
Ejemplo: $0.8 \vee 0.5 = 0.8$.
- Intervalos de confianza: $[a_1, a_2] \vee [b_1, b_2] = [\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}]$.
Ejemplo: $[0.4, 0.5] \vee [0.1, 0.7] = [0.4, 0.7]$.
- Tripletas: $[a_1, a_2, a_3] \vee [b_1, b_2, b_3] = [\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}]$.
Ejemplo: $[0.4, 0.47, 0.5] \vee [0.1, 0.3, 0.7] = [0.4, 0.47, 0.5]$.

- Cuádruplos: $[a_1, [a_2, a_3], a_4] (\vee) [b_1, [b_2, b_3], b_4] = [\max\{a_1, b_1\}, [\max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}], \max\{a_4, b_4\}]$.
Ejemplo: $[0.2, [0.3, 0.4], 0.5] (\vee) [0.1, [0.2, 0.3], 0.6] = [0.2, [0.3, 0.4], 0.6]$.

Complemento a la unidad:

- Números precisos: $\bar{a} = 1 - a$.
Ejemplo: $a = 0.4 \Rightarrow \bar{a} = 1 - 0.4 = 0.6$.
- Intervalos de confianza: $\overline{[a_1, a_2]} = [1 - a_2, 1 - a_1]$.
Ejemplo: $[a_1, a_2] = [0.3, 0.4] \Rightarrow \overline{[a_1, a_2]} = [1 - 0.4, 1 - 0.3] = [0.6, 0.7]$.
- Tripletas: $\overline{[a_1, a_2, a_3]} = [1 - a_3, 1 - a_2, 1 - a_1]$.
Ejemplo: $[a_1, a_2, a_3] = [0.2, 0.3, 0.5] \Rightarrow \overline{[a_1, a_2, a_3]} = [1 - 0.5, 1 - 0.3, 1 - 0.2] = [0.5, 0.7, 0.8]$.
- Cuádruplos: $\overline{[a_1, [a_2, a_3], a_4]} = [1 - a_4, 1 - a_3, 1 - a_2, 1 - a_1]$.
Ejemplo: $[a_1, [a_2, a_3], a_4] = [0.2, [0.4, 0.5], 0.7] \Rightarrow \overline{[a_1, [a_2, a_3], a_4]} = [1 - 0.7, 1 - 0.5, 1 - 0.4, 1 - 0.2] = [0.3, [0.5, 0.6], 0.8]$.

En el supuesto de operar con valuaciones expresadas en formas diferentes (intervalos de confianza, tripletas, etc.) sólo cabe tener en cuenta que:

- $a = [a, a] = [a, a, a] = [a, [a, a], a]$.
- $[a_1, a_2] = [a_1, [a_1, a_2], a_2]$.
- $[a_1, a_2, a_3] = [a_1, [a_2, a_2], a_3]$.
Ejemplo: $[0.2, 0.7] (\wedge) [0.1, 0.4, 0.9] = [0.2, [0.2, 0.7], 0.7] (\wedge) [0.1, [0.4, 0.4], 0.9] = [0.1, [0.2, 0.4], 0.7]$.

También destacar que existe una infinidad de operadores aparte de los tres comentados (máximo, mínimo y complementación) para expresar los criterios más complejos. Se trata de las t-normas que se descomponen en pares duales llamados T-normas (de los que forma parte $\wedge$) y T-conormas (de los que forma parte $\vee$).

Propiedades

Tanto el operador máximo como el mínimo cumplen las siguientes propiedades:

- Conmutatividad
 $a (\wedge) b = b (\wedge) a$
 $a (\vee) b = b (\vee) a$
- Asociatividad
 $(a (\wedge) b) (\wedge) c = a (\wedge) (b (\wedge) c) = a (\wedge) b (\wedge) c$
 $(a (\vee) b) (\vee) c = a (\vee) (b (\vee) c) = a (\vee) b (\vee) c$
- Idempotencia
 $a (\wedge) a = a$
 $a (\vee) a = a$
- Distributividad: Es una propiedad que relaciona los 2 operadores.
 $a (\wedge) (b (\vee) c) = (a (\wedge) b) (\vee) (a (\wedge) c)$
 $a (\vee) (b (\wedge) c) = (a (\vee) b) (\wedge) (a (\vee) c)$

En cuanto al operador complementario, se puede destacar las siguientes propiedades:

- Involución

$$\overline{\overline{a}} = a$$

$$\text{Ejemplo: } \overline{\overline{0.4}} = 0.4$$

- Teoremas de De Morgan

$$\overline{a(\wedge)b} = \overline{a}(\vee)\overline{b} = (1-a)(\vee)(1-b)$$

$$\text{Ejemplo: } \overline{0.4 \wedge 0.7} = \overline{0.4} \vee \overline{0.7} = (1-0.4) \vee (1-0.7) = 0.6$$

$$\overline{a(\vee)b} = \overline{a}(\wedge)\overline{b} = (1-a)(\wedge)(1-b)$$

$$\text{Ejemplo: } \overline{0.4 \vee 0.7} = \overline{0.4} \wedge \overline{0.7} = (1-0.4) \wedge (1-0.7) = 0.3$$

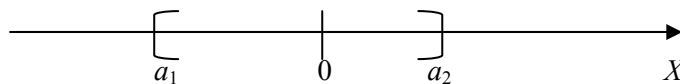
1.1.2. INTERVALOS DE CONFIANZA

Concepto

Es un segmento $A = [a_1, a_2]$, en donde no se conoce de manera precisa el valor de una magnitud y la única información que se dispone es que es mayor o igual a a_1 , y menor o igual a a_2 .

Normalmente se consideran intervalos cerrados aunque también es posible considerar intervalos abiertos a la izquierda y/o a la derecha.

Gráficamente: Dominio de confianza en R .



Obsérvese que esta gráfica se podría extender a $R^2, R^3, \dots, R^n$.

Operaciones con intervalos de confianza

Sean $A = [a_1, a_2] \subset R$, $B = [b_1, b_2] \subset R$ y $C = [c_1, c_2] \subset R$, intervalos de confianza. Se definen las siguientes operaciones:

A) Suma

$$A (+) B = [a_1, a_2] (+) [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

Propiedades

- Conmutativa: $A (+) B = B (+) A$
- Asociativa: $[A (+) B] (+) C = A (+) [B (+) C]$
- Elemento neutro ($0 = [0, 0]$): $0 (+) A = A (+) 0$

$$\text{Ejemplo: } [-3, 2] (+) [4, 8] = [-3 + 4, 2 + 8] = [1, 10]$$

B) Resta

$$A (-) B = [a_1, a_2] (-) [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

Cabe destacar que en la resta no se cumplen las propiedades previamente comentadas en la suma.

Ejemplo: $[-3, 2] (-) [4, 8] = [-3 - 8, 2 - 4] = [-11, -2]$

C) Producto (multiplicación)

$$A (\cdot) B = [a_1, a_2] (\cdot) [b_1, b_2] = [\min(a_1 (\cdot) b_1, a_1 (\cdot) b_2, a_2 (\cdot) b_1, a_2 (\cdot) b_2), \max(a_1 (\cdot) b_1, a_1 (\cdot) b_2, a_2 (\cdot) b_1, a_2 (\cdot) b_2)].$$

Obsérvese que para el caso particular de R^+ tenemos: $A (\cdot) B = [a_1 (\cdot) b_1, a_2 (\cdot) b_2]$

Propiedades

- Conmutativa: $A (\cdot) B = B (\cdot) A$
- Asociativa: $[A (\cdot) B] (\cdot) C = A (\cdot) [B (\cdot) C]$
- Elemento neutro: $1 (\cdot) A = A (\cdot) 1 = A$

Ejemplo: $[-3, 2] (\cdot) [-5, -1] = [\min[(-3) (\cdot) (-5), (-3) (\cdot) (-1), 2 (\cdot) (-5), 2 (\cdot) (-1)], \max[(-3) (\cdot) (-5), (-3) (\cdot) (-1), 2 (\cdot) (-5), 2 (\cdot) (-1)]] = [\min(15, 3, -10, -2), \max(15, 3, -10, -2)] = [-10, 15]$

D) División

$$A (\div) B = [a_1, a_2] (\div) [b_1, b_2] = [\min(a_1 / b_1, a_1 / b_2, a_2 / b_1, a_2 / b_2), \max(a_1 / b_1, a_1 / b_2, a_2 / b_1, a_2 / b_2)].$$

Obsérvese que para el caso particular de R^+ tenemos: $A (\div) B = [a_1 / b_2, a_2 / b_1]$

Ejemplo: $[4, 8] (\div) [2, 4] = [\min(4 / 2, 4 / 4, 8 / 2, 8 / 4), \max(4 / 2, 4 / 4, 8 / 2, 8 / 4)] = [1, 4]$.

Como se puede observar, al encontrarnos únicamente con números positivos (R^+), se hubiese obtenido el mismo resultado a través de: $[4 / 4, 8 / 2] = [1, 4]$.

E) Multiplicación por un número real

Dado $k \in R$:

$$k (\cdot) A = [\min(ka_1, ka_2), \max(ka_1, ka_2)]$$

o bien:

- Si $k \geq 0$, $k (\cdot) A = k [a_1, a_2] = [ka_1, ka_2]$.
- Si $k < 0$, $k (\cdot) A = k [a_1, a_2] = [ka_2, ka_1]$.

Ejemplo: $(-2) (\cdot) [-5, -1] = [\min((-2) (\cdot) (-5), (-2) (\cdot) (-1)), \max((-2) (\cdot) (-5), (-2) (\cdot) (-1))] = [2, 10]$

F) División por un número real

Dado $k \in R - \{0\}$:

$$A (\div) k = [a_1, a_2] (\div) k = [\min(a_1 / k, a_2 / k), \max(a_1 / k, a_2 / k)]$$

O bien:

- Si $k \geq 0$, $A (\div) k = [a_1 / k, a_2 / k]$
- Si $k < 0$, $A (\div) k = [a_2 / k, a_1 / k]$

Ejemplo: $[4, 8] (\div) (-2) = [\min(4 / (-2), 8 / (-2)), \max(4 / (-2), 8 / (-2))] = [-4, -2]$

Relación de orden

Los intervalos no forman un orden total, sino un orden parcial, ya que existen intervalos que no son comparables directamente.

Dados: $A = [a_1, a_2] \subset R$ y $B = [b_1, b_2] \subset R$.

$$A \geq B \Leftrightarrow a_1 \geq b_1 \text{ y } a_2 \geq b_2.$$

Así, por ejemplo, $[-1, 7]$ y $[3, 5]$ no son comparables de manera inmediata, ya que $-1 < 3$ y $7 > 5$.

Para pasar de un orden parcial a un orden total, es necesario establecer de manera arbitraria un criterio, y sino es suficiente, recurriremos a un segundo criterio.

1er criterio: La media de los extremos del intervalo

$$\lambda([a_1, a_2]) = (a_1 + a_2) / 2$$

$$\text{entonces: } A > B \Leftrightarrow (a_1 + a_2) / 2 > (b_1 + b_2) / 2.$$

Ejemplo: $(-1 + 7) / 2 = 3$; $(3 + 5) / 2 = 4$. Por tanto, en este caso, podemos decir que el intervalo $[3, 5]$ es mayor al intervalo $[-1, 7]$.

2º criterio: En el caso de que $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, este criterio no decide, por lo que es preciso adoptar otro. Se proponen 3 criterios a escoger según la naturaleza del problema:

- 1) $A > B \Leftrightarrow a_2 > b_2$.
- 2) $A > B \Leftrightarrow a_1 > b_1$.
- 3) $A > B \Leftrightarrow a_2 - a_1 < b_2 - b_1$.

Ejemplo: Si $A = [2, 4]$ y $B = [0, 1]$, A y B son comparables ya que $2 > 0$ y $4 > 1 \Rightarrow A > B$.

Si $A = [-2, 10]$ y $B = [1, 7]$:

$$\lambda(A) = (-2 + 10) / 2 = 4.$$

$$\lambda(B) = (1 + 7) / 2 = 4.$$

$$\lambda(A) = \lambda(B).$$

Como el 1er criterio no decide, adoptamos otro criterio;

- 1) $10 > 7 \Rightarrow A > B$.
- 2) $-2 < 1 \Rightarrow A < B$.
- 3) $10 + 2 > 7 - 1 \Rightarrow A < B$.

Maximización y minimización

Mínimo: $A (\wedge) B = [a_1, a_2] (\wedge) [b_1, b_2] = [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)] = [a_1 (\wedge) b_1, a_2 (\wedge) b_2]$.

Máximo: $A (\vee) B = [a_1, a_2] (\vee) [b_1, b_2] = [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)] = [a_1 (\vee) b_1, a_2 (\vee) b_2]$.

Ejemplo: Dados $A = [-5, 4]$, $B = [1, 3]$, $C = [4, 7]$

$$A (\wedge) B = [\min(-5, 1), \min(4, 3)] = [-5, 3]$$

$$B (\vee) C = [\max(1, 4), \max(3, 7)] = [4, 7]$$

Propiedades:

- Conmutativa:
 $A (\wedge) B = B (\wedge) A$
 $A (\vee) B = B (\vee) A$
- Asociativa:
 $(A (\wedge) B) (\wedge) C = A (\wedge) (B (\wedge) C)$
 $(A (\vee) B) (\vee) C = A (\vee) (B (\vee) C)$
- Idempotencia:
 $A (\wedge) A = A$
 $A (\vee) A = A$
- Absorción:
 $A (\wedge) (A (\vee) B) = A$
 $A (\vee) (A (\wedge) B) = A$
- Distributiva:
 $A (\wedge) (B (\vee) C) = (A (\wedge) B) (\vee) (A (\wedge) C)$
 $A (\vee) (B (\wedge) C) = (A (\vee) B) (\wedge) (A (\vee) C)$

Intervalos de confianza repetidos

$$A = [a_1, a_2] \subset R$$

$$A (+) A (+) A (+) \dots (+) A = [a_1, a_2] (+) [a_1, a_2] (+) \dots (+) [a_1, a_2] = [n (\cdot) a_1, n (\cdot) a_2] = n (\cdot) A$$

En este caso, si “ $x = (a_1 + a_2) / 2$ ” es el valor central de A , el valor central de $n (\cdot) A$ es: $[n (\cdot) (a_1 + a_2)] / 2 = n (\cdot) x$

Intervalos de confianza de grado superior

Los extremos de un intervalo de confianza pueden ser inciertos, es decir, otros intervalos de confianza, en cuyo caso tendríamos:

$$A_2 = [[a_1, a_2], [a_3, a_4]]$$

Lo cual representa un intervalo de confianza de segundo grado.

A continuación, tendríamos los intervalos de confianza de tercer grado:

$$A_3 = [[[a_1, a_2], [a_3, a_4]], [[a_5, a_6], [a_7, a_8]]]$$

Y así sucesivamente, con carácter ilimitado.

1.1.3. LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

Concepto de subconjunto borroso

Consideremos un conjunto referencial E y un subconjunto ordinario $A \subset E$ de aquellos elementos que cumplen una característica concreta. En el caso de subconjuntos ordinarios sólo existen 2 posibilidades $\forall x \in E$: “ x ” cumple la característica ($x \in A$) o “ x ” no la cumple ($x \notin A$). Por ello, se define la “función característica” de A o “función de pertenencia” de A :

$\forall x \in E$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

De esta manera, se puede simbolizar un subconjunto ordinario $A \subset E$ a través del par $(E, \mu_A(x))$.

Supongamos ahora que los elementos de A pueden tomar cualquier valor del intervalo $[0, 1]$, es decir, que existen elementos de E que cumplen la característica que define el subconjunto A , pero en un cierto grado. Entonces, tendremos una función de pertenencia de A definida como:

$$\begin{aligned} \forall x \in E: \\ \mu_{\underline{A}}(x): \quad E &\rightarrow [0, 1] \\ X &\rightarrow \mu_{\underline{A}}(x) = \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

De esta forma, se construye el subconjunto borroso $(E, \mu_{\underline{A}}(x))$ que simbolizamos por $\underline{A} \subset E$.

A continuación, se representa un subconjunto borroso $\underline{A}$ del referencial

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

Y un subconjunto ordinario A del mismo referencial:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
$E =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
$A =$	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
$\underline{A} =$	.5	.4	.8	0	.9	.4	.3	.6	.2	.4

En cuanto a la imagen de un elemento de X , que se expresa por α , se llamará “nivel de presunción”.

Cada nivel de presunción α determina un “subconjunto de confianza” A_α del referencial que se define como:

$$A_\alpha = \{x \in E / \mu_{\underline{A}}(x) \leq \alpha\}$$

Si el conjunto referencial son los números reales ($E = R$) entonces A_α es un intervalo de confianza:

$$A_\alpha = \{x \in R / \mu_{\underline{A}}(x) \leq \alpha\} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

Si se encajan de manera monótona los subconjuntos de confianza $A_\alpha \forall \alpha \in [0, 1]$ de tal manera que:

$$\alpha' > \alpha \Rightarrow A_{\alpha'} \subset A_\alpha$$

dicho encaje construye un subconjunto borroso. Así, el subconjunto borroso expresado anteriormente puede representarse para cada nivel de presunción utilizando un sistema endecadario como:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
$\alpha = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0.8	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0.7	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0.6	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0.5	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0.4	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0.3	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0.2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0.1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$\alpha = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\underline{A} =$	.5	.4	.8	0	.9	.4	.3	.6	.2	.4
-------------------	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----

$E =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Puede observarse que el subconjunto de confianza para $\alpha = 0$ es el conjunto referencial $A = E$. Finalmente, se puede definir la igualdad de subconjuntos borrosos como:

$$\underline{A} = \underline{B} \Leftrightarrow \forall x \in E, \mu_{\underline{A}}(x) = \mu_{\underline{B}}(x)$$

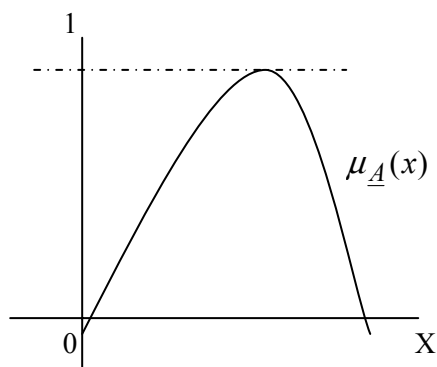
Normalidad y convexidad en los subconjuntos borrosos

Dado un subconjunto borroso $A \subset R$ diremos que es “normal” cuando:

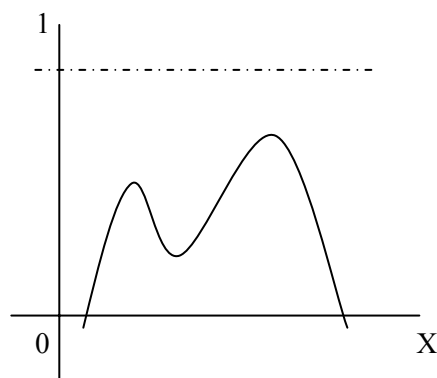
$$\bigvee_x \mu_{\underline{A}}(x) = 1$$

Es decir, cuando existe al menos un elemento cuya función de pertenencia toma el valor 1.

Subconjunto borroso normal



Subconjunto borroso no normal

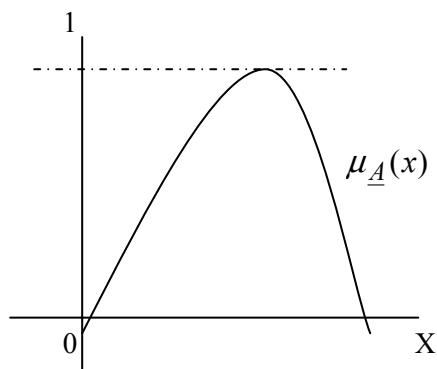


Como se puede observar, para cada nivel de presunción α se define un subconjunto de confianza A_α que al tratarse de números reales, es un intervalo de confianza $A = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$.

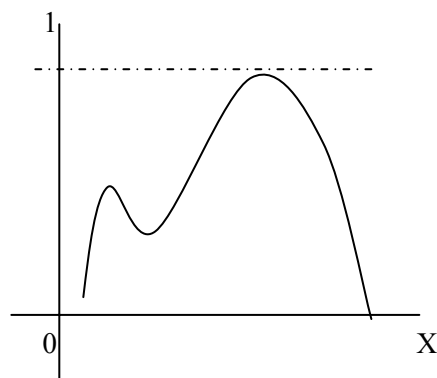
Se dice que $\underline{A}$ es convexo si:

$$\alpha' > \alpha \Rightarrow (A_{\alpha'} \subset A_\alpha \Rightarrow [a_1(\alpha'), a_2(\alpha')] \subset [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]).$$

Subconjunto borroso convexo



Subconjunto borroso no convexo



Con estos dos conceptos se puede redefinir un número borroso diciendo que es un subconjunto borroso de R normal y convexo.

Intersección, unión y complementación de subconjuntos borrosos

1) Intersección

$$\underline{A} \cap \underline{B} \Leftrightarrow \forall x \in E, \mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x) = \mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(x)$$

Propiedades:

- Conmutativa: $\underline{A} \cap \underline{B} = \underline{B} \cap \underline{A}$