

TEXTOS DOCENTS

341

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE

Bruno Juliá-Díaz
Montserrat Guilleumas

Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria



UNIVERSITAT DE BARCELONA



TEXTOS DOCENTS

341

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE

Bruno Juliá-Díaz
Montserrat Guilleumas

Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA

U

B

Julià-Díaz, Bruno

Análisis matemático de una variable. – (Textos docent ; 341)

ISBN 978-84-475- 3334-3

I. Guilleumas, Montserrat II. Universitat de Barcelona. Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria III. Títol IV. Col·lecció: Textos docent (Universitat de Barcelona) ; 341
1. Anàlisi matemàtica

© PUBLICACIONS I EDICIONS DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA, 2008

Adolf Florensa, s/n; 08028 Barcelona; tel: 934 035 442; fax: 934 035 446;
comercial.edicions@ub.edu; www.publicacions.ub.es

Dipòsit legal: B-43394-2008

ISBN: 978-84-475-3334-3

Impressió: Gráficas Rey, S.L.

Imprès a Espanya / Printed in Spain

Consideraciones preliminares

Este texto es una recopilación de lo enseñado durante los semestres de Primavera de 2007 y de 2008 en la asignatura de Análisis Matemático I de la licenciatura en Física en la Facultat de Física de la Universidad de Barcelona.

El curso está pensado para 6 créditos (60 horas lectivas) de los que 1.5 son prácticos. Constituye pues un curso básico de análisis matemático para estudiantes de primer año de licenciaturas de ciencias. En esta publicación hemos intentado incluir ejemplos relevantes en el texto junto a definiciones formales de todos los conceptos utilizados.

Este texto debe considerarse como apoyo pero nunca como fuente única para el estudio de la asignatura. Cualquier corrección o comentario que nos ayude a mejorarlas será bienvenido.

Los textos fuente para estas notas son los siguientes:

- Libros: “Calculus I” (T. Apostol), “Cálculo diferencial e integral” (N. Piskunov), “Mathematical Methods for Physicists” (Arfken/Webber), “A first course in Mathematical Analysis” (Brannan). “A course of pure mathematics”, G. H. Hardy.
- Notas y apuntes (no publicados): Análisi Matemàtica I (1995-1996) (P. Pascual), Análisis Matemático I (N. Barberán).

Agradecimientos

Agradecemos especialmente a la Dra. Nuria Barberán por compartir desinteresadamente sus apuntes de la asignatura así como por sus comentarios y correcciones a la presente edición. Asimismo damos las gracias al Dr. Ricardo Graciani por sus correcciones y comentarios a una versión precedente del texto que nos han ayudado a mejorar considerablemente la presente versión y al Dr. Josep Maria Pons por compartir sus apuntes de la asignatura y por su predisposición a discutir sobre los contenidos de la misma.

Gracias al Dr. Artur Polls y Laura Casanellas por la lectura crítica de la presente edición. Además agradecemos a los miembros de nuestro grupo de investigación por conversaciones y discusiones varias sobre lo expuesto en este texto y al Dr. Jordi Ortín por facilitarnos sus formatos de estilo.

Por último damos las gracias a los alumnos de primer curso de la primavera de 2007 y 2008 por sus preguntas e interés por la asignatura, especialmente a aquellos que nos han ayudado a mejorarlas.

Bruno Juliá-Díaz y Montserrat Guilleumas

Universitat de Barcelona

Barcelona, 11 de Septiembre de 2008.

Notación y tipografía

Las definiciones, teoremas y demostraciones de estos últimos aparecen en el texto con la siguiente tipografía:

Ejemplo de Teorema

Teorema 0.1: *Cada entero $n > 1$ es primo o producto de primos*

Ejemplo de demostración

Demostración. (utilizando el principio de inducción)

- 1) Para $n=2$ se verifica porque es primo.
- 2) Supongamos que se verifica $\forall r \mid 1 < r < n$.
- 3) Si n no es primo es que admite un divisor d tal que $1 < d < n$, o sea que $n = dc$, $1 < c < n$, pero como tanto para c como para d se satisface el Teorema (paso 2), tenemos que c y d o son primos o producto de primos, por lo que n es producto de primos.

c.q.d.

Ejemplo de definición

Definición 0.1: **Producto cartesiano de dos conjuntos** ($A \times B$)

Dados dos conjuntos A y B denominaremos producto cartesiano de A y B , ($A \times B$) al conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \in A$ e $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\} \tag{0.1}$$

Símbolos más utilizados

$\Rightarrow$ Implica

$\Leftrightarrow$ Si y sólo si

$\exists$ Existe

$\forall$ Para todo

$|$ Tal que

c.q.d. 'Como queríamos demostrar', marca el final de una demostración.

Índice

Consideraciones preliminares	I
1 Números reales	1
1.1 Nociones básicas de la teoría de conjuntos	2
1.1.1 Notación y definiciones básicas	2
1.2 Álgebra de conjuntos: unión, intersección y complementario	4
1.3 Conjuntos: Numerabilidad	5
1.3.1 Aplicaciones	5
1.3.2 Conjuntos Numerables y no numerables	7
1.4 Números reales	8
1.4.1 Introducción axiomática de $\mathbb{R}$	10
1.4.2 Axiomas de Cuerpo. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$	10
1.4.3 Axiomas de orden	11
1.4.4 Consecuencias de los axiomas de orden	11
1.4.5 Representación geométrica de los números reales	13
1.5 Enteros, $\mathbb{Z}$	13
1.5.1 Principio de inducción matemática	14
1.5.2 Algunas definiciones referentes a $\mathbb{Z}^+$	15
1.6 Racionales $\mathbb{Q}$	17
1.6.1 Irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	18
1.6.2 Algunas definiciones	19
1.7 Axioma 10, de completitud	19
1.7.1 Propiedades de los números reales	20
1.7.2 Representación decimal de los números reales	21
1.7.3 Valor Absoluto	22
2 Números complejos	25
2.1 Definiciones básicas	25
2.1.1 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	27
2.2 Unidad Imaginaria	27
2.3 Forma binómica de los números complejos	27
2.4 Representación Geométrica	29
2.5 Forma polar de los números complejos	29
2.6 No ordenabilidad de los complejos	30
2.7 Funciones de números complejos	31
2.7.1 Repaso de funciones en $\mathbb{R}$	31
2.7.2 Exponenciales Complejas	33
2.7.3 Potencias y raíces	35
2.7.4 Logaritmos	38
2.7.5 Potencias complejas de complejos	38
2.7.6 Trigonometría compleja	39
2.8 Teorema Fundamental del Álgebra	40
3 Topología	41
3.1 Nociones de Topología	41
3.1.1 Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$	41
3.1.2 Métrica de un espacio M	43
3.2 Bolas, puntos interiores y conjuntos abiertos	43

3.2.1	Bola abierta	43
3.2.2	Punto Interior	44
3.2.3	Conjunto abierto	44
3.2.4	Conjunto cerrado	44
3.2.5	Unión e intersección de conjuntos abiertos	45
3.2.6	Conjunto acotado	45
3.3	Puntos adherentes y de acumulación	45
3.3.1	Punto adherente	45
3.3.2	Punto de acumulación	46
3.3.3	Punto aislado	46
3.4	Teorema de Bolzano-Weierstrass	47
3.5	Recubrimientos, conjuntos compactos, teorema de Heine-Borel	49
4	Funciones de una variable	51
4.1	Cónicas	51
4.1.1	Ecuaciones de las cónicas	52
4.1.2	Secciones cónicas. Definiciones geométricas.	54
4.1.3	Cónicas en coordenadas polares	57
4.2	Límite de una función	59
4.2.1	Límites laterales	62
4.2.2	Funciones acotadas; monótonas	62
4.3	Infinitésimos	63
4.3.1	Propiedades de los infinitésimos	64
4.3.2	Comparación de infinitésimos	65
4.4	Teoremas fundamentales sobre límites	66
4.4.1	Cálculo explícito de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	66
4.5	Continuidad	68
4.5.1	Discontinuidades	69
4.5.2	Funciones continuas en un intervalo	70
4.5.3	Propiedades de las funciones continuas en un intervalo	70
4.6	Continuidad uniforme	71
4.6.1	Teorema de Heine Cantor	72
4.7	Cálculo de límites	72
4.7.1	Resolución de indeterminaciones	72
5	Derivadas	75
5.1	Derivada de una función en un punto	75
5.2	Interpretación geométrica de la derivada	76
5.3	Derivadas de funciones elementales	78
5.4	Regla de la cadena	79
5.5	Función inversa; función implícita. Derivadas laterales y diferencial	81
5.5.1	Función inversa y su derivada	81
5.5.2	Derivada de la función implícita	82
5.5.3	Derivadas laterales e infinitas	83
5.5.4	Diferencial de una función	83
5.6	Análisis de la variación de funciones	84
5.6.1	Crecimiento, extremos (máximo y mínimo)	84
5.7	Teoremas del valor medio para derivadas	85
5.7.1	Teorema de Rolle	85
5.7.2	Teorema del valor medio generalizado, de Cauchy	86

5.8	Reglas de L'Hopital	87
5.8.1	Regla de L'Hopital	87
5.9	Fórmula de Taylor	90
5.9.1	Fórmula de Taylor	90
5.9.2	Teorema de Taylor	91
5.9.3	Ejemplos de uso	93
5.9.4	Enlaces externos	95
5.9.5	Extremos locales	96
6	Integración	99
6.1	Integral indefinida	99
6.1.1	Algunas integrales indefinidas	100
6.1.2	Propiedades de la integral indefinida	101
6.2	Métodos de Integración	101
6.2.1	Cambio de variable o substitución	101
6.2.2	Integración por partes	102
6.2.3	Integrales racionales	104
6.2.4	Integrales de funciones trigonométricas	109
6.3	Integral Definida	110
6.3.1	Sumas inferiores y superiores	110
6.3.2	Interpretación geométrica	112
6.3.3	Propiedades de la integral definida	112
6.3.4	Teorema del valor medio del cálculo integral	113
6.4	Integrales y primitivas	114
6.4.1	Primer teorema fundamental del cálculo	114
6.4.2	Segundo teorema fundamental del cálculo; Regla de Barrow	115
6.4.3	Cambio de variable en integrales definidas	115
6.4.4	Integración por partes	116
6.5	Aplicaciones geométricas	116
6.5.1	Área de una figura plana	116
6.5.2	Longitud de un arco de curva en $\mathbb{R}^2$	117
6.5.3	Volumen de un objeto de sección conocida	119
6.5.4	Volumen de un objeto de revolución	120
6.5.5	Área de un objeto de revolución	120
6.6	Integrales Impropias	120
6.6.1	Integrales impropias de primera especie	121
6.6.2	Integrales impropias de segunda especie	124
6.6.3	Valor principal de Cauchy	125
7	Sucesiones y series	127
7.1	Sucesiones	127
7.1.1	Sucesión	127
7.1.2	Algunas propiedades del álgebra de sucesiones	128
7.2	Series	130
7.2.1	Serie infinita	131
7.2.2	Serie alternada	133
7.2.3	Convergencia absoluta	134
7.2.4	La serie geométrica	134
7.2.5	Criterios de convergencia	135
7.2.6	Series de potencias	137

CAPÍTULO 1

NÚMEROS REALES

Existen diversos métodos para introducir los números reales. Un método corriente es empezar a partir de los enteros positivos, $1, 2, 3, \dots$, considerados como un conjunto no definido que utilizamos como base para construir un sistema más amplio.

- i) Se construyen los números racionales positivos, cocientes de enteros positivos.
- ii) Los números racionales son utilizados para construir los números irracionales positivos (e.g. $\sqrt{2}, \pi$).
- iii) El paso final es introducir los números reales negativos y el cero. El sistema de los números reales se construye como la unión de los números racionales e irracionales.

La parte más difícil del proceso es el paso de números racionales a números irracionales. Aunque la necesidad de números irracionales ya se había hecho patente para los matemáticos de la antigua Grecia, no se han introducido métodos satisfactorios para la construcción de números reales hasta finales del s XIX. En aquella época se perfilaron tres teorías: la de Weierstrass, la de Cantor y la de Dedekind. El año 1889 Peano presenta 5 axiomas para los enteros positivos que serán utilizados como punto de partida para la construcción de los números reales.

De todos modos, nosotros nos interesaremos más por las propiedades de los números reales que por los métodos utilizados para construirlos. Por tanto, adoptaremos un punto de vista diferente y consideraremos los números reales como conceptos no definidos (elementos primitivos) que satisfacen un cierto número de propiedades (que no demostraremos). De los axiomas deduciremos las propiedades de los números reales. Así pues, estableceremos relaciones entre los números reales, algunas sin demostrar (axiomas) y otras con demostración (teoremas).

Supondremos que existen los números reales y que satisfacen 10 axiomas (que enumeraremos más adelante). Los axiomas se clasifican de manera natural en tres grupos:

- 1.) Axiomas de cuerpo
- 2.) Axiomas de orden
- 3.) Axioma de completitud

1.1 Nociones básicas de la teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos desarrollada por Boole y Cantor a finales del siglo XIX ha tenido una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas del siglo XX. Ha unificado ideas aparentemente inconexas y ha ayudado a reducir muchos conceptos a sus fundamentos lógicos de una manera elegante y metódica.

Definición 1.1: *Conjunto. Colección de objetos (elementos), considerados como una sola entidad. Los objetos de la colección se denominan **elementos** o miembros del conjunto y diremos que pertenecen al conjunto o que están contenidos dentro de él. El conjunto los contiene o está compuesto de sus elementos.*

La mayor parte de la teoría de conjuntos no depende de la naturaleza de los elementos individuales de la colección. A nosotros nos interesará estudiar conjuntos de entes matemáticos: conjuntos de números, puntos, funciones, etc.

1.1.1 Notación y definiciones básicas

- Conjuntos: $A, B, C, \dots$, designados con mayúsculas.
- Elementos: $a, b, c, \dots$, designados con minúsculas.
- $x \in S$ significa que x pertenece al conjunto S , se dice que x es un elemento de S o que x está en el conjunto S .
- $x \notin S$ significa que x no pertenece al conjunto S , o lo que es lo mismo, x no es un elemento de S o x no está en el conjunto S .
- Podemos designar un conjunto escribiendo sus elementos entre llaves:

$$\begin{array}{ll} A = \{2, 4, 6, 8\} & \text{conjunto finito} \\ B = \{1, 2, 3, \dots\} & \text{conjunto infinito} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}} \right\} \text{ explícitos,} \quad (1.1)$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}\} \quad \text{implícitos, } x \text{ variable muda.} \quad (1.2)$$

A partir de un conjunto podemos formar nuevos conjuntos, denominados subconjuntos, cogiendo elementos del conjunto de partida:

- $A \subseteq B$: A es **subconjunto** de B , si cada elemento de A está también en B : $a \in A \Rightarrow a \in B$.
- A es **subconjunto propio** de B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se indica con $A \subset B$.
- **Conjunto vacío**, $\emptyset$, no contiene ningún elemento. $\emptyset \subseteq A \quad \forall A$.
- **Conjunto universal**, E , contiene todos los elementos. $A \subseteq E \quad \forall A$.
- **Igualdad**, $A = B \Leftrightarrow a \in A \Rightarrow a \in B$ y $a \in B \Rightarrow a \in A$.

Ejemplo 1.1:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{2, 4, 6, 8\} \\ B = \{4, 6, 2, 8\} \\ C = \{2, 4, 2, 6, 4, 8\} \end{array} \right\} A = B = C \quad (1.3)$$

A y B son idénticos ($A = B$) y contienen los mismos elementos. Si uno de los conjuntos contiene algún elemento que no está en el otro los conjuntos serían diferentes y escribiríamos $A \neq B$.

- La notación $\{x \mid x \in S \text{ y satisface } \mathcal{P}\}$ designa el conjunto de todos los elementos de S que satisfacen $\mathcal{P}$. Los conjuntos representados de esta manera se caracterizan por una propiedad definitoria.

Ejemplo 1.2: El conjunto de todos los números reales positivos se puede indicar: $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } x > 0\}$ o bien $\{x \mid x > 0\}$ donde el conjunto universal se sobreentiende que es el conjunto de los números reales.

- Cabe distinguir entre el elemento x y el conjunto $\{x\}$, cuyo único elemento es x .

Ejemplo 1.3: $\emptyset$ (conjunto vacío) no contiene ningún elemento, sin embargo el conjunto $\{\emptyset\}$ contiene un elemento.

- Conjunto de conjuntos: $F = \{A, B, C\}$. Los elementos de F son A, B y C . Por tanto los elementos de A no son elementos de F .

Definición 1.2: Se define el conjunto de partes de A como el conjunto de todos sus posibles subconjuntos y se denota $\mathcal{P}(A)$.

Ejemplo 1.4: Dado $A = \{a, b, c\}$, forman el conjunto de partes de A , $\mathcal{P}(A)$:

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, que tiene un subconjunto de 0 elementos, 3 de un elemento, 3 de dos elementos y uno de tres elementos. El caso general de un conjunto A que tiene n elementos nos lleva a un $\mathcal{P}(A)$ de 2^n elementos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad (1.4)$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \quad (1.5)$$

Esto se puede obtener mediante la expresión del Binomio de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n, \quad (1.6)$$

con $x = y = 1$.

Ejemplo 1.5: Algunos conjuntos:

Conjunto vacío: $\emptyset$

Conjunto universal: E

Números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Números enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números racionales: $\mathbb{Q}$, fracciones

Números reales: $\mathbb{R}$

Números complejos: $\mathbb{C}$

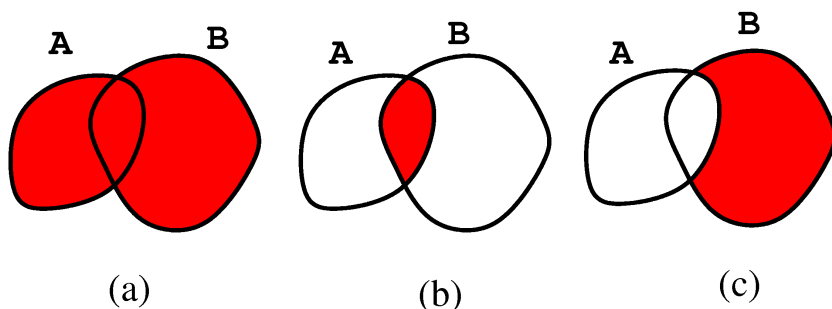


Figura 1.1: La región coloreada corresponde: (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $B - A$.

1.2 Álgebra de conjuntos: unión, intersección y complementario

Dados dos conjuntos A y B podemos construir los siguientes conjuntos:

- a) $A \cup B$, **unión de A y B** , se define como el conjunto de elementos que pertenecen a A , a B o a ambos (ver panel (a) de la Fig. 1.1). Es decir, $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}. \quad (1.7)$$

- b) $A \cap B$, **intersección de A y B** , se define como el conjunto de elementos comunes a A y B (ver panel (b) de la Fig. 1.1):

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}. \quad (1.8)$$

Dos conjuntos se dicen **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$.

- c) $B - A$: **complementario de A respecto de B** , se define como el conjunto de elementos de B que no pertenecen a A (ver panel (c) de la Fig. 1.1):

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}. \quad (1.9)$$

Las operaciones de unión e intersección tienen muchas analogías formales con la suma y la multiplicación de números reales. De sus definiciones podemos comprobar las siguientes propiedades:

- (i) conmutativa

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A. \end{aligned}$$

- (ii) asociativa

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

- (iii) distributiva (que involucra a las dos anteriores)

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Las operaciones de unión e intersección pueden extenderse de forma sencilla a colecciones finitas e infinitas de conjuntos. Sea F una colección no vacía de conjuntos,

$$\begin{aligned} F &= \{A_1, A_2, \dots, A_n\} && \text{(colección finita)} \\ F &= \{A_1, A_2, \dots\} && \text{(colección infinita numerable)}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

a) unión de todos los conjuntos de F : $\cup_i A_i$

$$\bigcup_i A_i = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^n A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n && \text{(colección finita)} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \dots && \text{(colección infinita numerable)}. \end{cases} \quad (1.11)$$

b) intersección de todos los conjuntos de F : $\cap_i A_i$

$$\bigcap_i A_i = \begin{cases} \bigcap_{k=1}^n A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n && \text{(colección finita)} \\ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \dots && \text{(colección infinita numerable)}. \end{cases} \quad (1.12)$$

1.3 Conjuntos: Numerabilidad

1.3.1 Aplicaciones

Dados dos conjuntos A y B podemos establecer relaciones, f , entre sus elementos:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y = f(x). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Definición 1.3: Se denomina par ordenado (x, y) al conjunto de elementos x e y ordenados,

- x es el primer elemento ($x \in A$)
- y es el segundo elemento ($y \in B$)

Recordemos que en la teoría de conjuntos el orden no es importante, por tanto el conjunto formado por 2 elementos x e y es tal que $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Definición 1.4: Producto cartesiano de dos conjuntos ($A \times B$). Dados dos conjuntos A y B denominaremos producto cartesiano de A y B , $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \in A$ e $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}. \quad (1.14)$$

Definición 1.5: Se denomina **relación**, S , entre los conjuntos A y B a todo subconjunto de $A \times B$,

$$S \subset A \times B, \quad (1.15)$$

por tanto, si $A = B = \mathbb{R}$, una relación es un subconjunto del plano xy ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$). Ejemplos: $C_1 = \{(x, y) \mid xy = 1\}$, $C_2 = \{(x, y) \mid x - y = 3\}$.

También se puede tener una relación formada sólo por un conjunto discreto de pares ordenados, por ejemplo: $D = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\} \in A \times B$, $A = B = \{0, 1, 2\}$.

Definición 1.6: Se denomina **gráfico de la relación** al conjunto de puntos del plano que le correspondan si a cada par ordenado de la relación se le asocia un punto del plano. En la figura 1.2 se muestran los gráficos de dos relaciones.

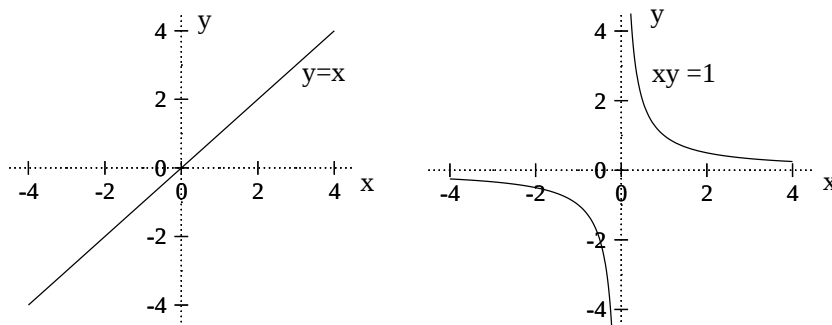


Figura 1.2: Gráficos de las relaciones: $y = x$ y $xy = 1$.

Definición 1.7: *Dominio de S , $D(S)$, conjunto de los elementos x , primeros elementos de los pares ordenados de la relación S .*

Definición 1.8: *Recorrido de S , $R(S)$, conjunto de los elementos y , segundos elementos de los pares ordenados de la relación S .*

Definición 1.9: *Se denomina **función o aplicación**, f , a un conjunto de pares ordenados (x, y) tales que ninguno de ellos tiene el mismo primer elemento.*

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } (x, y) \in f \\ \text{y } (x, z) \in f \end{array} \right\} \Rightarrow y = z. \quad (1.16)$$

La definición de función requiere que a cada x del dominio de f le corresponda exactamente un y tal que $(x, y) \in f$. Se denota: $y = f(x) \leftrightarrow (x, y) \in f$. Se denomina a y valor de la función f en x : $y = f(x)$, en lugar de $(x, y) \in f$ para indicar que el par (x, y) pertenece a la función f , o bien, que y es la imagen de x en f .

Se definen asimismo:

- función **inyectiva**, si $(x, y) = (z, y) \Rightarrow x = z$ es decir, $\forall x \neq z \Rightarrow f(x) \neq f(z)$.
- función **exhaustiva**, si $y \in B \Rightarrow \exists x \in D(f) \mid (x, y) \in f \rightarrow B = R(f)$.
- función **biyectiva**, si es inyectiva y exhaustiva simultáneamente.
- función **uno a uno (biunívoca)** de A a B , si $A = D(f)$ y f es biyectiva.

En la figura 1.3 se muestran varios casos de relaciones.

Definición 1.10: ***Conjuntos coordinables o equipotentes.** Dos conjuntos A y B son coordinables y se escribe $A \sim B$ si y sólo si existe una función f uno a uno entre los conjuntos A y B :*

$$A \sim B \quad \text{si} \quad \exists f \mid D(f) = A \text{ y } R(f) = B, \quad (1.17)$$

se dice también que f establece una correspondencia uno a uno entre los conjuntos A y B . Además se tiene que en particular cualquier conjunto es coordinable consigo mismo.

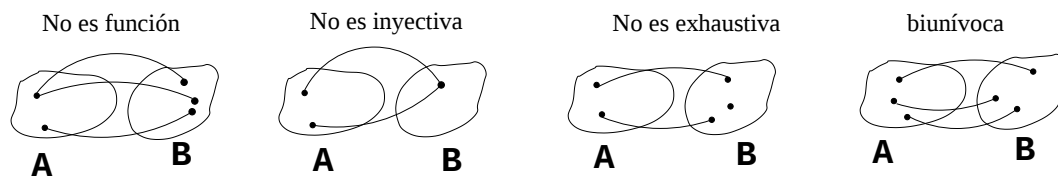


Figura 1.3: Algunos ejemplos de relaciones.

1.3.2 Conjuntos Numerables y no numerables

Definición 1.11: Un conjunto S es **finito** si se puede establecer una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los elementos del conjunto S y el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Donde n es el número de elementos del conjunto S , también denominado **cardinal** de S .

Definición 1.12: Los conjuntos no finitos son **conjuntos infinitos**. Los conjuntos infinitos tienen un número infinito de elementos.

Definición 1.13: Un **conjunto S es numerable** si se puede establecer una correspondencia biunívoca con un subconjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (1.18)$$

Un conjunto S es **infinito numerable** (tiene un número infinito de elementos) si es coordinable con el conjunto de todos los enteros positivos, es decir, si:

$$S \sim \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+. \quad (1.19)$$

Existe por tanto una función f que establece una correspondencia uno a uno entre los enteros positivos y los elementos de S , con la cual el conjunto S se puede describir como:

$$S = \{f(1), f(2), f(3), \dots\} \equiv \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad (1.20)$$

donde hemos utilizado una notación con subíndices, $a_k \equiv f(k)$, que permite utilizar los enteros positivos como etiquetas de los elementos de S .

Propiedades:

- Los conjuntos finitos son numerables.
- Los conjuntos infinitos pueden ser o no numerables.
Ejemplo: $S = \{x^{2n} \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ es numerable.

Resumiendo, un conjunto es numerable cuando sus elementos se pueden numerar (etiquetar). Es decir que el conjunto se puede expresar de la forma: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

- Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable (ver demostración en la página 47 de Apostol, vol 1).
- La unión de dos conjuntos numerables es numerable.
- La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es numerable.
- $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ son numerables.

- Los números racionales $\mathbb{Q}$ son numerables,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}. \quad (1.21)$$

Sea $A_n = \left\{ \frac{p}{n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ (que es numerable utilizando p) $\{A_n\}_n$ es un conjunto numerable de conjuntos numerables $\Rightarrow$ es numerable.

De ahí que

$$\mathbb{Q} = \cup_{n \neq 0} A_n \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ es numerable.} \quad (1.22)$$

Teorema 1.1: *El conjunto de los números reales no es numerable.*

Demostración. (método de la diagonal de Cantor, ≈ 1890) (reducción al absurdo). Es suficiente demostrar que el conjunto de los x que satisfacen $0 < x < 1$ es no numerable. Si fuese numerable, existiría un conjunto $S = \{s_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, que recorrería todo el intervalo. Probaremos que esto no es cierto construyendo, dentro del intervalo, un número real que no pertenezca al conjunto S .

La forma más general de escribir s_n es utilizando la notación decimal:

$$s_n = 0, u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3} \dots \quad (1.23)$$

donde $u_{n,i} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ son los dígitos del número s_n .

Sea un número real y con la siguiente expresión decimal:

$$y = 0, v_1v_2v_3 \dots \quad (1.24)$$

con $v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{si } u_{nn} = 1 \end{cases}$. Por construcción $0 < y < 1$ pertenece al intervalo $(0, 1)$ pero y no coincide con ninguno de los elementos de $\{s_n\}$ porque:

y difiere de s_1 en el primer decimal.

y difiere de s_2 en el segundo decimal.

y difiere de s_3 en el tercer decimal.

...

y difiere de s_n en el n -ésimo decimal.

$\Rightarrow y \notin S \Rightarrow S$ no recorre todo el intervalo $(0, 1) \Rightarrow \mathbb{R}$ no es numerable.

c.q.d.

1.4 Números reales

Uno de los objetivos principales del curso es estudiar funciones reales de variable real (también estudiaremos funciones complejas) y es por eso que nos interesa estudiar las propiedades de $\mathbb{R}$.

Podemos construir los números reales a partir de los naturales siguiendo el siguiente esquema:

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

Consideramos el conjunto de los números naturales como conjunto de partida (recordemos que es infinito numerable),

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.26)$$

- Consideremos la operación $+$ tenemos:

- Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Conmutativa: $a + b = b + a$

Nos planteamos la ecuación $a + x = b$ dentro de $\mathbb{N}$. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ en ciertos casos se tiene $x \notin \mathbb{N}$, por ejemplo: $5 + x = 3$.

$\Rightarrow$ para encontrar solución ampliamos: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ (enteros), $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, que junto con la suma forma un grupo conmutativo.

- Consideremos la operación producto $(\cdot)$

$$n \cdot m = \underbrace{n + n + n + \dots}_m \quad (1.27)$$

- Es asociativa y conmutativa
- 1 es el elemento neutro respecto del producto: $1 \cdot z = z$

Nos planteamos ahora la ecuación $z_1 \cdot z_2 = z_3$. Dados $z_1, z_3 \in \mathbb{Z}$ no siempre hay solución para $z_2 \in \mathbb{Z}$

ejemplo: $4 \cdot z = 2$

$\Rightarrow$ para encontrar solución ampliamos: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ (rationales)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \quad (q \neq 0) \right\}, \quad (1.28)$$

se tiene la equivalencia: $\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'}$ si $pq' = p'q$ y por tanto ahora $n \cdot x = 1$ tiene solución $x = \frac{1}{n}$.

En este conjunto, $\mathbb{Q}$, ambas operaciones $(+, \cdot)$ son grupo conmutativo y tenemos además la propiedad distributiva:

$$x(y + z) = (xy) + (xz) = xy + xz. \quad (1.29)$$

Los números racionales podrían ser todos los que necesitamos: son un cuerpo conmutativo. Esto es lo que creían los pitagóricos, en el sentido de que, por ejemplo, dadas dos medidas de longitud, si una de ellas es considerada el patrón unidad la otra sería un número racional.

El problema apareció en forma de $\sqrt{2}$. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los dos catetos valen 1 ?

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 = x^2 &\rightarrow x^2 = 2 && \text{sin solución en } \mathbb{Q} \\ \Rightarrow x = \sqrt{2} &\notin \mathbb{Q}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Como veremos a continuación $\sqrt{2}$ es un número **irracional**, necesitamos pues una nueva ampliación: $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. Donde $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{Irracionales}$. ¡Ahora la ecuación $x^2 - 2 = 0$ tiene solución!

Teorema 1.2: $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración. (reducción al absurdo)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \\ x^2 &= 2 \\ \text{supongamos } \sqrt{2} \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \sqrt{2} = a/b \mid a, b \in \mathbb{Z} \quad a, b \text{ primos entre si} \\ &\Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \text{ múltiplo de } 2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ahora bien, el cuadrado de un número impar es impar, así pues a tiene que ser par (su cuadrado es par). Entonces podemos escribir $a = 2r$. Y la ecuación pasa a:

$$(2r)^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2r^2, \quad (1.32)$$

de donde se tiene que también b tiene que ser par. Esto implica que tanto a como b son pares, por tanto tienen un factor común, 2, lo que contradice el hecho de que sean primos entre si. Suponiendo que $\sqrt{2}$ podía escribirse como número racional hemos llegado a una contradicción, así pues nuestra suposición debe ser falsa. c.q.d.

Hemos presentado de forma esquemática la forma de ir construyendo los números reales a partir de los naturales siguiendo sucesivas ampliaciones:

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.33)$$

1.4.1 Introducción axiomática de $\mathbb{R}$.

Supondremos que existe un conjunto no vacío $\mathbb{R}$ de elementos, denominados **números reales**, que satisfacen 10 axiomas que enumeraremos a continuación. Los axiomas se pueden clasificar en tres grupos:

- (i) Axiomas de cuerpo (1,2,3,4,5)
- (ii) Axiomas de orden (6,7,8,9)
- (iii) Axioma de completitud (10)

1.4.2 Axiomas de Cuerpo. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Axioma 1: Propiedad conmutativa, $x + y = y + x$, $xy = yx$.

Axioma 2: Propiedad asociativa, $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.

Axioma 3: Propiedad distributiva, $x(y + z) = xy + xz$.

Axioma 4: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ siempre $\exists z \in \mathbb{R} \mid x + z = y$ se denota: $z = y - x$.

- **Elemento neutro**, en particular, si
 $x = y \rightarrow \exists z = 0 \in \mathbb{R} \mid x - x = 0 \rightarrow x + 0 = x$.
- **Elemento opuesto**,
 $\forall x \in \mathbb{R} \text{ e } y = 0 \exists z = -x \in \mathbb{R} \mid -x = 0 - x \rightarrow x + (-x) = 0$.

Axioma 5: Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, $\exists z \in \mathbb{R} \mid x \cdot z = y$ y se escribe $z = y/x$.

- **Elemento neutro del producto:** en particular, si
 $x = y \rightarrow \exists z = 1 \mid 1 = x/x \rightarrow x \cdot 1 = x \quad \forall x$.
- **Elemento inverso** en particular, si
 $y = 1, \forall x \neq 0 \rightarrow \exists z = 1/x = x^{-1} \rightarrow x \cdot (x^{-1}) = 1$.

Con estos axiomas podemos deducir todas las leyes habituales de la aritmética, por ejemplo:

$$-(-x) = x, \quad -(x - y) = y - x, \quad (x^{-1})^{-1} = x, \quad x - y = x + (-y). \quad (1.34)$$

1.4.3 Axiomas de orden

Suponemos ahora la existencia de una relación, $<$, que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los siguientes axiomas, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$:

Axioma 6: Se verifica sólo una de las relaciones¹ :

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y. \quad (1.35)$$

Este axioma nos garantiza el **orden completo de** $\mathbb{R}$: todo elemento está relacionado con el resto.

Axioma 7: Si $x < y$, $\forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow x + z < y + z$.

Axioma 8: Si $x, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$.

Axioma 9: Si $x > y$ e $y > z \Rightarrow x > z$.

De estos axiomas se pueden deducir las reglas habituales que rigen las operaciones con desigualdades.

1.4.4 Consecuencias de los axiomas de orden

1.) $0 \in \mathbb{R}$, según el Axioma 6 el cero se relaciona con todo $x \in \mathbb{R}$, eso permite clasificar $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^+ \text{ si } x > 0 & \quad \text{real positivo} \\ x \in \mathbb{R}^- \text{ si } x < 0 & \quad \text{real negativo} \\ x \in \{0\} \text{ si } x = 0. & \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$2.) \text{ si } x < y \quad \begin{cases} z > 0 & \Rightarrow xz < yz & (a) \\ z < 0 & \Rightarrow xz > yz & (b) \end{cases}$$

Demostración. (Explicitando cada uno de los axiomas utilizados)

a)

$$\begin{aligned} x < y & \xRightarrow{Ax.7} x - x < y - x \Rightarrow 0 < y - x \\ \text{de } \left. \begin{array}{l} y - x > 0 \\ z > 0 \end{array} \right\} & \xRightarrow{Ax.8} z(y - x) > 0 \xRightarrow{Ax.3} zy - zx > 0 \\ & \xRightarrow{Ax.7} zy - zx + zx > zx \rightarrow zy > zx. \end{aligned} \quad (1.37)$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} x < y \\ z < 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{Ax.7} \left. \begin{array}{l} 0 < y - x \\ 0 < -z \end{array} \right\} \xRightarrow{Ax.8} (y - x)(-z) > 0 \xRightarrow{Ax.3} -yz + xz > 0 \xRightarrow{Ax.7} xz > yz. \quad (1.38)$$

c.q.d.

$$3.) \quad \left. \begin{array}{l} x > y \\ z > w \end{array} \right\} \text{ si } y, w > 0 \Rightarrow xz > yw$$

¹Formalmente sólo es necesaria una relación, $<$, y la definición, $x > y \Leftrightarrow y < x$.

Demostración.

$$\left. \begin{array}{l} x > y > 0 \Rightarrow x > 0 \\ z > w > 0 \Rightarrow z > 0 \\ x > y \xrightarrow{z>0} xz > yz \\ z > w \xrightarrow{y>0} yz > yw \end{array} \right\} \Rightarrow xz > yz > yw \Rightarrow xz > yw. \quad (1.39)$$

c.q.d.

4.) $x > y \Rightarrow -x < -y$

Demostración.

$$\begin{aligned} x > y & \xrightarrow{\text{sumo}(-x)} x - x > y - x \\ & \Rightarrow 0 > y - x \\ & \Rightarrow 0 - y > -y + y - x \\ & \Rightarrow -y > -x \\ & \Rightarrow -x < -y. \end{aligned} \quad (1.40)$$

c.q.d.

5.) $x > y > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0$

Demostración.

$$\left. \begin{array}{l} x > y > 0 \\ x > 0, y > 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{x}, \frac{1}{y} > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{usando 2.}} x \cdot \frac{1}{x} > y \frac{1}{x} > 0$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 1 > \frac{y}{x} > 0 \\ & \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot 1 > \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{x} > 0 \\ & \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

c.q.d.

Antes de presentar el décimo Axioma aún necesitamos algunos teoremas y definiciones.

Teorema 1.3: (sobre orden) sean $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R} \quad | \quad a < b + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ entonces

$$\Rightarrow a \leq b. \quad (1.42)$$

Demostración. (reducción al absurdo)

Supongamos $a > b$, consideremos $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ entonces,

$$b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \stackrel{(a>b)}{<} \frac{a+a}{2} = a \quad (1.43)$$

de donde obtenemos $b + \varepsilon < a$ que contradice una de las hipótesis: $\Rightarrow a \leq b$.

c.q.d.

1.4.5 Representación geométrica de los números reales

A menudo representamos geoméricamente los números reales como puntos de una recta, denominada la recta real o el eje real. Hay una relación biunívoca entre $\mathbb{R}$ y los puntos de una recta. Fijando el 0 (origen de referencia) y el 1 (a la derecha del 0) queda determinada la escala. El orden se representa fácilmente: $x < y \Rightarrow x$ está a la izquierda del punto y .

Definición 1.14: Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Llamamos **intervalo abierto**, (a, b) , al conjunto:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}. \quad (1.44)$$

El **intervalo cerrado**, $[a, b]$, es el conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}. \quad (1.45)$$

De manera equivalente se definen:

$$\begin{aligned} (a, b] &\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b) &\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a, \infty) &\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\ [a, \infty) &\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\ (-\infty, \infty) &\equiv \mathbb{R} \\ [a, a] &\equiv \{a\}. \end{aligned}$$

Hemos introducido los números reales de forma axiomática, ahora definiremos sus subconjuntos para poder distinguir entre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Hay subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se distinguen por tener ciertas propiedades especiales que no tienen todos los números reales, como ocurre con los números enteros o los números racionales. Antes de escribir $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ como subconjuntos especiales de $\mathbb{R}$ conviene introducir la noción de conjunto inductivo.

Definición 1.15: Un conjunto A de números reales, $A \subset \mathbb{R}$, es **inductivo** si

- a.) $1 \in A$
- b.) $\forall a \in A \Rightarrow a + 1 \in A$

son conjuntos de este tipo, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}$.

Los enteros positivos son los únicos números reales que pertenecen a todos los conjuntos inductivos. Utilizaremos esta propiedad para definirlos.

1.5 Enteros, $\mathbb{Z}$

Definición 1.16: Un número real se denomina entero positivo si pertenece a cada uno de los conjuntos inductivos. El conjunto de enteros positivos se denomina $\mathbb{Z}^+$. $\mathbb{Z}^+$ se define como el conjunto intersección de todos los conjuntos inductivos. $\mathbb{Z}^+$ es inductivo, consiste en el número 1, el $1+1=2$, el $2+1=3$ y así sucesivamente.

Al ser $\mathbb{Z}^+$ subconjunto de cada uno de los conjuntos inductivos, consideraremos a $\mathbb{Z}^+$ como el menor conjunto inductivo. Esta propiedad se denomina **principio de inducción** y constituye la base lógica de las demostraciones por inducción. A partir de $\mathbb{Z}^+$ definimos los enteros negativos $\mathbb{Z}^-$ y los enteros $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}^-$: El conjunto de los **enteros negativos** es el conjunto formado por los opuestos respecto de la suma de los enteros positivos.

$\mathbb{Z}$: El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

1.5.1 Principio de inducción matemática

Es una propiedad importante de los enteros positivos. Es especialmente útil para demostrar afirmaciones que afecten a todos los enteros positivos $n \in \mathbb{Z}^+$, cuando se sabe que la afirmación es cierta para $n = 1, 2, 3$ y se sospecha que pueda ser cierto $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Dada una familia de proposiciones (afirmaciones)

$$P_n, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1.46)$$

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad P_1 \text{ se cumple} \\ (2) \quad P_n \Rightarrow P_{n+1} \text{ se cumple } \forall n \in \mathbb{Z}^+ \end{array} \right\} \Rightarrow P_n \text{ se cumple } \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1.47)$$

La demostración por inducción consta de los siguientes pasos:

- (1) probar que la afirmación se cumple para un n determinado, por ejemplo $n = 1$
- (2) suponer que es cierta para $k < n$ (arbitrario), $k \in \mathbb{Z}^+$
- (3) de la hipótesis (2) demostrar que es válida para $k = n$. Esta es la parte de la demostración en la que se establece la inducción (en general es la parte más complicada de la prueba²).

Ejemplo 1.6: Demostrar que para $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}. \quad (1.48)$$

- paso 1: $n = 1$, tenemos: $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ y por tanto la fórmula 1.48 es cierta para $n = 1$.
- paso 2: suponemos que es cierta hasta n
- paso 3: veamos para $n + 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} &\stackrel{\text{usando } 2}{=} 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2^{n+1} - 2 + 1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

que es la fórmula (1.48) aplicada al caso $n \rightarrow n + 1$.

$$\Rightarrow \text{es cierta } \forall n. \quad (1.50)$$

Ejemplo 1.7: A veces se puede comenzar la demostración por $n \neq 1$, probar que $n! > 3^n$ si n es grande. Veamos explícitamente

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

intentaremos probarla a partir de $n = 7$,

- paso 1: es cierta para $n = 7$ (ver tabla)

²A veces, para probar el paso (3) es útil probar el caso $n = 1$ y el $n = 2$ que suele dar pistas sobre el caso general.

- paso 2: supondremos que es cierta para un n que sea mayor que 7
- paso 3: para $n + 1$, tenemos, $n + 1! = (n + 1)n! \stackrel{\text{paso 2.}}{>} (n + 1)3^n \stackrel{n \geq 7}{>} 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$

de donde se cumple si $n \geq 7$.

Ejemplo 1.8: Demostrar que para $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \quad (1.51)$$

- paso 1: comprobamos el caso $n = 1$: $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1+2+3}{6} = 1$
- paso 2: suponemos que es cierta hasta un n determinado
- paso 3: para $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{\text{paso 2}}{=} \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{3} + \frac{3n}{3} + \frac{1}{3} \\ &\quad + \frac{n^2}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{n}{6} + \frac{1}{6} = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Ejemplo 1.9: Probar que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n \frac{1+n}{2}$

- paso 1: $n = 1$, $1 = 1 \cdot \frac{1+1}{2} = 1$, correcto
- paso 2: suponemos la fórmula válida hasta n
- paso 3: para $n + 1$,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &\stackrel{\text{paso 2}}{=} n \frac{1+n}{2} + (n+1) = (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] \\ &= (n+1) \frac{n+2}{2} = (n+1) \frac{1+(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

1.5.2 Algunas definiciones referentes a $\mathbb{Z}^+$

Definición 1.17: Sean $n, d \in \mathbb{Z}^+$, si $\exists c \in \mathbb{Z}^+ \mid n = cd$ diremos que: d es un **divisor** de n o que n es **múltiplo** de d o que d **divide a** n , con la notación $d|n$.

Definición 1.18: n es **primo** si $n > 1$ y los únicos divisores de n son : 1 y n . Por ejemplo:

$$1, \boxed{2}, \boxed{3}, 4, \boxed{5}, 6, \boxed{7}, 8, 9, 10, \boxed{11}, 12, \boxed{13}, \dots, . \quad (1.53)$$

La distribución de los números primos en $\mathbb{N}$ es de extraordinaria complejidad, aún a día de hoy no existe ningún algoritmo para calcular todos los números primos³.

³Por ejemplo, en Marzo de 2008 el mayor número primo conocido era: $2^{32582657} - 1$. (http://en.wikipedia.org/wiki/Largest_known_prime).

Definición 1.19: n es **compuesto** si $n > 1$ y n no es primo.

Definición 1.20: $n = 1$ no es ni primo ni compuesto.

A continuación exploraremos algunos resultados elementales referentes a la descomposición de enteros, terminando con el **teorema de descomposición única** (teorema fundamental de la aritmética). Este teorema establece que:

- (1) cada entero $n > 1$ se puede representar como producto de factores primos,
- (2) esta descomposición es única (prescindiendo del orden de los factores).

Demostraremos la primera parte del teorema utilizando el teorema 1.4, después enunciaremos dos teoremas, 1.5 y 1.6 y terminaremos con el teorema fundamental de la aritmética 1.7.

Teorema 1.4: Cada entero $n > 1$ es primo o producto de primos.

Demostración. (por inducción)

- 1) Para $n=2$ se verifica porque es primo.
- 2) Supongamos que se verifica $\forall r \mid 1 < r < n$.
- 3) Si n no es primo es que admite un divisor d tal que $1 < d < n$, o sea que $n = dc$, $1 < c < n$, pero como tanto para c como para d se satisface el teorema (paso 2), tenemos que c y d o son primos o producto de primos, por lo que n es producto de primos.

c.q.d.

Definición 1.21: Introduciremos algunos conceptos:

- Si $a, b \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} d \text{ divide } a \ (d|a) \\ d \text{ divide } b \ (d|b) \end{array} \right\} d \text{ es divisor común de } a \text{ y } b. \quad (1.54)$$

Al número mayor que cumpla esta propiedad se le denomina máximo común divisor $\langle a, b \rangle \equiv \text{mcd}(a, b)$.

- Si $\text{mcd}(a, b) = 1 \Rightarrow a, b$ son **primos entre si**.

Teorema 1.5: (Lema de Euclides)

$$\begin{aligned} \text{Si } a|b \cdot c \quad \text{y} \quad \text{mcd}(a, b) = 1 \\ \Rightarrow a|c. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Teorema 1.6: Si p es primo y $p|(a \cdot b)$ implica que $p|a$ y/o $p|b$.

Demostración. Supongamos que p no divide a y $p|(a \cdot b)$. Si probamos que $\text{mcd}(p, a)=1$, el lema de Euclides (Teorema 1.5) $\Rightarrow p|b$.

Sea $d = \text{mcd}(p, a) \Rightarrow d|p \Rightarrow$ (al ser p primo) solo podemos tener que $d = 1$ o $d = p$, pero $d = p$ no puede ser ya que $d|a$ pero hemos supuesto que p no divide a a , $\Rightarrow d = 1 \Rightarrow 1 = \text{mcd}(p, a)$ de donde usando el lema de Euclides $\Rightarrow p|b$.

c.q.d.

Teorema 1.7: (*Teorema fundamental de la Aritmética*⁴). Cada entero $n > 1$ se puede representar como producto de factores primos y, si se prescinde del orden de los factores, esta descomposición es única.

Demostración. (utilizando el principio de inducción, ver la Sección 1.5.1)

- paso 1: El teorema es cierto para $n = 2$.
- paso 2: Suponemos que se cumple para k : $1 < k < n$.
- veamos para n :
 - Si n es primo no hay nada que demostrar.
 - Si n es compuesto el teorema 1.4 nos dice que admite una descomposición en factores primos. Supongamos que existen dos descomposiciones:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s = q_1 \cdot q_2 \cdots q_t. \quad (1.56)$$

Tenemos que demostrar que $s = t$ y que excepto orden $p_i = q_j, \dots$. Veamos:

$$p_1 | n \Rightarrow p_1 | (q_1 \cdot q_2 \cdots q_t) \xrightarrow{\text{Teorema 1.6}} p_1 \text{ divide al menos a alguno de los factores}$$

si los reordenamos podemos hacer que sea q_1 , de donde $p_1 | q_1$ pero como p_1, q_1 son primos $\Rightarrow p_1 = q_1$, así tenemos,

$$n' \equiv \frac{n}{p_1} = p_2 \cdot p_3 \cdots p_s = q_2 \cdot q_3 \cdots q_t \quad (1.57)$$

n es compuesto, $p_2, \dots, p_s \neq 1 \Rightarrow 1 < n/p_1 < n$

$\Rightarrow$ por la hipótesis de inducción las dos descomposiciones de $n' = n/p_1$ son idénticas $\Rightarrow$

reordenando tenemos $t = s$ y $p_2 = q_2, p_3 = q_3, \dots, p_s = q_s$,

$\Rightarrow n$ tiene descomposición única.

c.q.d.

1.6 Racionales $\mathbb{Q}$

Definición 1.22: Si $p, q \in \mathbb{Z}$ (con $q \neq 0$) al cociente p/q se le denomina **número racional**. $\Rightarrow$ todo racional se puede escribir como cociente de enteros.

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}. \quad (1.58)$$

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- Todos los axiomas de cuerpo y orden se verifican en $\mathbb{Q}$
- Una propiedad de los racionales:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{si } r_1, r_2 \in \mathbb{Q} & \text{se tiene } r = \frac{r_1 + r_2}{2} \in \mathbb{Q} \\ (r_1 < r_2) & \text{y } r_1 < r < r_2 \end{array} \right] \Rightarrow \quad (1.59)$$

Entre dos números racionales hay infinitos números racionales $\Rightarrow$ dado un racional cualquiera no es posible hablar del número racional inmediatamente superior ($\nexists$ “siguiente”).

⁴Enunciado alternativo: Todo entero $n > 1$ se puede representar de forma única como producto de factores primos.

1.6.1 Irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Definición 1.23: Los números reales que no son racionales se denominan **irracionales**, ejemplos: π , $\sqrt{2}$, e , etc. Comprobar que un real es irracional no es fácil en general (ver la demostración para el número $\sqrt{2}$ en el teorema 1.2).

Teorema 1.8: Si n es un entero positivo ($n > 1$) que no es un cuadrado perfecto, se tiene que $\sqrt{n}$ es irracional.

Demostración. (reducción al absurdo)

- Primera parte:

Suponemos que n no tiene ningún divisor > 1 que sea cuadrado perfecto (por ejemplo 6, pero no $8 = 2 \cdot 2^2$).

Supongamos que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$

Entonces, $\sqrt{n} = a/b \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad (b \neq 0)$ con $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Si elevamos al cuadrado,

$$a^2 = b^2 n \quad (1.60)$$

o lo que es lo mismo $a^2 = \alpha n$, pero, al no tener n ningún cuadrado perfecto, para que ambos lados de la igualdad puedan tener la misma descomposición en primos, se tiene que

$$\alpha = d^2 n \quad (1.61)$$

y por tanto, $a^2 = d^2 n^2 \Rightarrow a = dn$, y por tanto a es múltiplo de n , de ahí obtenemos que b^2 también es múltiplo de n y utilizando el mismo argumento tenemos que también b es múltiplo de n . Lo que contradice que el máximo común divisor de a y b sea el 1.

Así pues, si n no tiene divisores que sean cuadrados perfectos $\sqrt{n}$ es irracional.

- Segunda parte: n tiene un factor que es cuadrado perfecto

$$n = m^2 k \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.62)$$

donde k no admite ningún divisor cuadrado perfecto y $k > 1$, ya que n no es cuadrado perfecto.

$$\sqrt{n} = m\sqrt{k} \quad (1.63)$$

pero por la primera parte $\sqrt{k}$ es irracional. Si $\sqrt{n}$ fuera racional, entonces $\sqrt{k}$ tendría que serlo contradiciendo la primera parte.

$$\Rightarrow \sqrt{n} \text{ es irracional.} \quad (1.64)$$

c.q.d.

Diferencias esenciales entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$

Los números irracionales aparecen en el álgebra cuando se pretenden resolver determinadas ecuaciones cuadráticas, por ejemplo, $x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2 \rightarrow x$?

Hasta ahora, con los axiomas que hemos explicado (de cuerpo y de orden) no podemos distinguir $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, pero en cambio hemos visto que no todas las ecuaciones se pueden resolver dentro de $\mathbb{Q}$ como por ejemplo, $x^2 = 2$. Será el axioma 10, de completitud, el que nos permitirá distinguirlos. Antes tendremos que definir algunos conceptos relacionados con la relación de orden.

1.6.2 Algunas definiciones

Definición 1.24: Sea $S \subset \mathbb{R}$, S está **acotado superiormente** por $b \in \mathbb{R}$ si $\forall x \in S$, se tiene $x \leq b$. b es entonces una **cota superior** de S .

Definición 1.25: Sea $S \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente, $b_0 \in \mathbb{R}$ es **extremo superior o supremo** de S si se tiene simultaneamente que:

- b_0 es una cota superior de S .
- $\nexists$ cota superior de S más pequeña que b_0 , es decir, se cumple que $\forall b$ cota superior de S , $b_0 \leq b$.

Definición 1.26: c es **máximo** de S si satisface:

- c es extremo superior de S .
- $c \in S$.

De modo análogo se definen: cota inferior, extremo inferior (ínfimo), mínimo.

- Consecuencias:
 - el supremo es la mínima de las cota superiores
 - el supremo es único
 - si S tiene máximo, entonces $\max(S) = \sup(S)$
 - si S no está acotado superiormente (inferiormente), se tiene que S no puede tener ni supremo (ínfimo) ni máximo (mínimo)
 - $\forall$ conjunto finito: supremo=máximo=cota superior

Ejemplo 1.10:

- $S = [0, 1]$ está acotado tanto superiormente, 1 o 4 son cotas superiores, como inferiormente.
- $S = [0, 1)$, está acotado, no tiene máximo pero si tiene mínimo.
- $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, está acotado inferiormente pero no tiene mínimo.
- $S = \{p \in \mathbb{R} \mid p^2 < 2\}$.
- $S = \{p \in \mathbb{Q} \mid p^2 < 2\}$.

1.7 Axioma 10, de completitud

Axioma 10: Todo conjunto no vacío de números reales que esté acotado superiormente tiene un extremo superior (supremo), es decir, $\exists b \in \mathbb{R} \mid b = \sup(S)$. Formalmente:

Sea $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. Si S está acotado superiormente $\Rightarrow \exists \sup(S) = b$, $b \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.9: (Propiedades del supremo) Todo conjunto no vacío de números reales con supremo contiene elementos tan próximos al supremo como se quiera. Formalmente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Sea } S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset. \text{ Si suponemos que } \exists b = \sup(S) \\
 &\quad \Rightarrow \\
 &\quad \forall c \in \mathbb{R} \mid c < b \quad \exists x \in S \mid c < x \leq b.
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 S &\subset \mathbb{R} \\
 b \text{ supremo de } S &\Rightarrow \forall x \in S, \quad x \leq b \\
 \text{Sea } \varepsilon > 0 &\Rightarrow b - \varepsilon < b \\
 &\Rightarrow b - \varepsilon \text{ no es cota superior} \\
 &\Rightarrow \exists y \in S \quad | \quad b - \varepsilon < y \\
 &\Rightarrow b - y < \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

y está más cerca de b que cualquier ε .

c.q.d.

1.7.1 Propiedades de los números reales

Teorema 1.10: *El conjunto $\mathbb{Z}^+$ no está acotado superiormente (en $\mathbb{R}$).*

Demostración. (reducción al absurdo)

Suponemos que $\mathbb{Z}^+$ está acotado superiormente, como $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}$, la completitud de $\mathbb{R}$ garantiza la existencia de un número real a que es el supremo, $a \in \mathbb{R} \quad | \quad a = \sup(\mathbb{Z}^+)$ cogemos ahora $c = a - 1$, el teorema 1.9 asegura que:

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ \quad | \quad a - 1 < n \leq a, \tag{1.67}$$

y como $\mathbb{Z}^+$ es inductivo: $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$, de donde a no puede ser cota superior de $\mathbb{Z}^+$.

c.q.d.

Teorema 1.11: *Para todo $x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{Z}^+ \quad | \quad x < n$.*

Demostración. Si no fuera así, existiría un x que sería cota superior de $\mathbb{Z}^+$ lo que está en contradicción con el teorema 1.10.

c.q.d.

Teorema 1.12: *(Propiedad Arquimediana) Sea un número real $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$ arbitrario tal que $x < y$:*

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ \quad | \quad nx > y.$$

Demostración. Apliquemos el teorema 1.11 cambiando x por y/x entonces

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ \quad | \quad n > y/x \Rightarrow nx > y.$$

c.q.d.

Este teorema tiene una implicación inmediata. Consideremos $x > 0$ como unidad de longitud. El teorema nos muestra como cualquier segmento lineal finito por grande que sea, puede ser recubierto por un número finito (n) de segmentos de longitud positiva dada, x , tan pequeña como queramos. Es decir, la medida es posible: una regla pequeña puede medir distancias tan grandes como queramos, colocándola adecuadamente.

Arquímedes consideró que esta era una propiedad fundamental de la línea recta y la consideró uno de los axiomas de la geometría.

Teorema 1.13: *(Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) Entre dos números reales hay un racional ($\Rightarrow$ hay ∞ racionales). Lo que es lo mismo, dados $x, y \in \mathbb{R} \quad / \quad x < y \quad \Rightarrow \exists$ un número racional $r \quad | \quad x < r < y$.*

Demostración. Sean $0 < x < y \Rightarrow y - x > 0$ que consideramos como unidad de medida, por la propiedad arquimediana $\exists$ un $n \in \mathbb{Z}^+ \quad | \quad 1 < n(y - x) = ny - nx$. Si la diferencia entre los dos números reales ny y nx es más grande que 1, necesariamente existe algún entero m entre ellos:

Si $m \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $nx < m < ny \Rightarrow x < m/n < y \Rightarrow r = m/n \in \mathbb{Q}$ es el número racional buscado.

c.q.d.

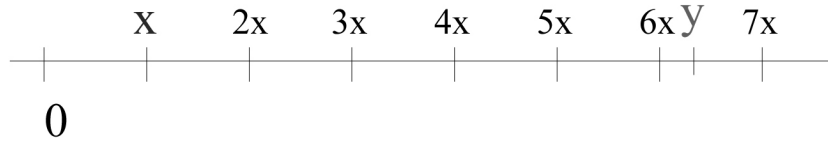


Figura 1.4: Un número positivo cualquiera x puede ser utilizado para medir distancias tan grandes como queramos.

Teorema 1.14: (*Entre dos racionales hay un real irracional*)

$$\begin{aligned} & \text{Sean } p, q \in \mathbb{Q} \quad | \quad p < q \\ \Rightarrow & \exists \text{ un número irracional } z \quad | \quad p < z < q. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Demostración. Sean $0 < p < q$ racionales $\Rightarrow \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ por el resultado anterior,

$$\Rightarrow \exists m/n \quad | \quad p/\sqrt{2} < m/n < q/\sqrt{2} \quad (1.69)$$

de donde: $p < \sqrt{2}m/n < q$ con lo que el irracional buscado es el $\sqrt{2}m/n$. c.q.d.

Estas propiedades afirman que los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$: “entre dos reales cualesquiera siempre hay racionales (irracionales)” $\Rightarrow$ “se pueden encontrar números racionales (irracionales) tan cercanos como se quiera de un número real cualquiera”.

“Tan cerca de un real como queramos hay infinitos números racionales”, en efecto, si cogemos $y = x + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$,

$$0 < x < y \Rightarrow x < x + \varepsilon \Rightarrow x < m/n < x + \varepsilon \quad (1.70)$$

cogiendo ε arbitrariamente pequeño podemos encontrar racionales tan cerca de x como queramos.

1.7.2 Representación decimal de los números reales

- Un número real de la forma (consideremoslo positivo),

$$\begin{aligned} r &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\ &\text{con } a_i \in \mathbb{Z}^+ \quad | \quad 0 \leq a_i \leq 9 \quad (a_i = 0, 1, 2, \dots, 9) \end{aligned} \quad (1.71)$$

se expresa usualmente como

$$r = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$$

esta expresión se denomina **expresión decimal finita** de r si $\exists n \in \mathbb{Z}^+ \quad | \quad \forall m > n, a_m = 0$.

- La expresión decimal se denomina periódica cuando es de la forma,

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \underbrace{b_1 \dots b_m}_{\text{repetición}} \underbrace{b_1 \dots b_m}_{\text{repetición}} \dots \quad (1.72)$$

y se denota: $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \overline{b_1 \dots b_m}$.

- Todo número racional tiene una expresión decimal finita o periódica. Recíprocamente toda expresión decimal finita o periódica representa un racional.
- ¿cómo encontrar el número racional que corresponde a una expresión decimal dada?

Ejemplo 1.11: Encontrar el racional: $0.4\overline{32}$. Vemos que el número $0.3\overline{2}$ cumple que:

$$100x = 32 + x \Rightarrow x = \frac{32}{99}. \quad (1.73)$$

Entonces nuestro número será el:

$$0.4\overline{32} = \frac{4}{10} + \frac{x}{10} = \frac{4}{10} + \frac{32}{990} = \frac{214}{495}. \quad (1.74)$$

- Nótese que los números como por ejemplo:

$$3.010010001000010000010000001 \dots \quad (1.75)$$

no entran dentro de la definición de números periódicos (no hay ningún subconjunto de decimales que se repita periódicamente) y no son racionales.

1.7.3 Valor Absoluto

Definición 1.27: Sea $x \in \mathbb{R}$, se define el **valor absoluto** de x como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad (1.76)$$

Teorema 1.15: Para $a \geq 0$ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, veamos:

$$\begin{aligned} \text{para } x \geq 0 & \quad |x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ \text{para } x < 0 & \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \rightarrow -a \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Teorema 1.16: Desigualdad triangular

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.78)$$

Demostración. Por la definición de valor absoluto tenemos que:

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \\ -|y| &\leq y \leq |y| \\ \text{tenemos} & \quad -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \\ \text{además por definición : } & |x| \geq 0, |y| \geq 0 \Rightarrow |x| + |y| \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|.$$

c.q.d.

Nota: Propiedades del valor absoluto

- 1.) $|x| \geq 0$
- 2.) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 3.) $|x|^2 = x^2$
- 4.) $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$5.) \quad |xy| = |x||y|$$

Estas propiedades se pueden generalizar para múltiples productos y múltiples sumas y de ellas se pueden derivar las siguientes:

$$6.) \quad |x - y| \leq |x| + |y|$$

$$7.) \quad |x - y| \geq ||x| - |y||$$

$$8.) \quad |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

$$9.) \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

Teorema 1.17: (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*) Para todo $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \quad (1.79)$$

además, la igualdad se cumple si y sólo si,

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad | \quad a_k x + b_k = 0 \quad \forall k. \quad (1.80)$$

Demostración. Hemos de tener en cuenta que una suma de cuadrados no puede ser nunca negativa, por tanto:

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.81)$$

esta desigualdad se convierte en igualdad si y sólo si todos y cada uno de los términos son cero. Podemos escribir la desigualdad como:

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$$

$$\text{con } A \equiv \sum_{k=1}^n a_k^2,$$

$$B \equiv \sum_{k=1}^n a_k b_k,$$

$$C \equiv \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

(1.82)

si $A > 0$, entonces para $x = -B/A$ obtenemos: $A \frac{B^2}{A^2} - 2 \frac{B^2}{A} + C \geq 0$ lo que implica: $-\frac{B^2}{A} + C \geq 0 \Rightarrow CA \geq B^2$.

Con eso hemos verificado la desigualdad.

c.q.d.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS COMPLEJOS

Como hemos visto hasta ahora la historia de los números ha venido marcada por continuas ampliaciones, por ejemplo, para contar objetos nos basta con números enteros positivos. Sin embargo para algo tan cotidiano como tener deudas es necesario ampliar ese conjunto al conjunto de los números enteros negativos. Ahí, ecuaciones del tipo $5 + x = 3$ tienen solución. Otro problema de la vida ordinaria como sería el dividir una herencia de 4 tartas entre 9 hijos nos lleva a la necesidad de introducir números racionales. En este conjunto ya se pueden resolver una gran cantidad de problemas tanto matemáticos como físicos. Por último, aunque ocurrió hace ya años en la Grecia antigua, si uno tiene una cuerda, fija un extremo y al otro ata un pincel, puede dibujar una circunferencia, si ahora intenta medirla utilizando para ello la cuerda que ha usado para dibujarla verá que no se puede medir con ella ni con ninguna fracción de dicha distancia. Aparece el número irracional, π . ¡Si con la misma cuerda dibujáis un cuadrado veréis que la diagonal tampoco se puede medir con dicha cuerda!

El salto a los números complejos puede motivarse desde un punto de vista abstracto, si uno es capaz de resolver la ecuación $x^2 - 5 = 0$ puede plantearse qué ocurre con la ecuación $x^2 + 5 = 0$.

Eso hace que nos planteemos ampliar el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, a los que se denomina **números complejos**: $\mathbb{C}$. Dicha extensión garantiza que cualquier ecuación polinómica del tipo:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \quad (2.1)$$

tiene al menos una solución (dentro de $\mathbb{C}$)¹.

2.1 Definiciones básicas

Definición 2.1: *Un número complejo es un par ordenado de números reales $x = (x_1, x_2)$*

¹Nótese que el que tenga al menos una solución implica necesariamente que tiene n .

- A la primera componente, x_1 , se la denomina **parte real**: $x_1 = \text{Re } [x]$.
- A la segunda componente, x_2 , se la denomina **parte imaginaria**: $x_2 = \text{Im } [x]$.

Los números complejos $x = (x_1, x_2)$ satisfacen las siguientes operaciones:

1.) Igualdad,

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ \text{es decir } (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

2.) Suma,

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \quad (2.3)$$

3.) Producto,

$$x \cdot y = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (2.4)$$

El conjunto de los números complejos con la operación suma y producto tiene estructura de grupo conmutativo, es decir se cumplen las siguientes propiedades para $(\mathbb{C}, +, \cdot)$:

1.) conmutativa

$$x + y = y + x, \quad xy = yx.$$

2.) asociativa

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z.$$

3.) distributiva

$$x(y + z) = xy + xz.$$

4.) $(0, 0) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, $(0, 0)$ es pues el **elemento neutro** respecto de la suma, $0 \equiv (0, 0)$.

$$(0, 0) \cdot (x_1, x_2) = (0, 0)$$

$$-x = (-x_1, -x_2) \text{ es el elemento opuesto de } x, \quad x + (-x) = (0, 0).$$

5.) $(x_1, x_2)(1, 0) = (x_1, x_2)$ de donde $1 \equiv (1, 0)$ es el **elemento neutro** respecto del producto.

Para cada $x = (x_1, x_2) \neq 0 \exists$ un único elemento:

$$x^{-1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \quad | \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \quad (2.5)$$

se le denomina **elemento inverso**.

Dados $x, y \in \mathbb{C}$ con $y \neq 0$ el producto xy^{-1} se denomina **cociente** de x e y y se escribe: $\frac{x}{y} \equiv xy^{-1}$.

2.1.1 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Observemos ahora una importante propiedad, que es que los números reales están contenidos en los números complejos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los números complejos con parte imaginaria nula satisfacen:

$$\begin{aligned}(x_1, 0) + (y_1, 0) &= (x_1 + y_1, 0) \\ (x_1, 0) \cdot (y_1, 0) &= (x_1 \cdot y_1, 0) \\ (x_1, 0)/(y_1, 0) &= (x_1/y_1, 0) \quad y_1 \neq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ los números complejos de la forma $(x, 0)$ tienen las mismas propiedades aritméticas que los números reales de tal forma que identificaremos el complejo $(x, 0)$ con el real x . Podemos definir la siguiente aplicación f de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow f(x) = (x, 0) \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{2.6}$$

f es inyectiva, establece una correspondencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, $\Rightarrow$ podemos identificar cualquier elemento $x \in \mathbb{R}$ con su imagen $(x, 0) \in \mathbb{C}$ y considerar que $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2.2 Unidad Imaginaria

Definición 2.2: Definimos el número i como el número complejo,

$$i \equiv (0, 1)\tag{2.7}$$

se denomina también **unidad imaginaria**, y cumple la siguiente propiedad:

$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow i$ es una solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, veamos explícitamente:

$$\begin{aligned}x \cdot x &= -1 \\ (x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) &= (x_1x_1 - x_2x_2, x_1x_2 + x_2x_1) = (-1, 0) \\ \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = -1 \\ 2x_1x_2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = -1 & \text{sin solución} \\ x_1 = 0 \Rightarrow -x_2^2 = -1 \rightarrow x_2 = \pm 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \text{soluciones:} &\begin{cases} (0, 1) = i \\ (0, -1) = -i \end{cases}\end{aligned}\tag{2.8}$$

2.3 Forma binómica de los números complejos

Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}$ lo podemos escribir de la forma,

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, 0) + (x_2, 0) \cdot (0, 1) = x_1 + x_2 i\tag{2.9}$$

es decir,

$$x = (x_1, x_2) \Leftrightarrow x = x_1 + i x_2\tag{2.10}$$

dicha forma se denomina **binómica**.

La ventaja de la notación binómica es que la manipulación algebraica de las fórmulas donde intervienen la suma y el producto es mucho más sencilla.

Por ejemplo, si multiplicamos:

$$\begin{aligned}(x_1 + ix_2) \cdot (y_1 + iy_2) &= (x_1y_1 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2x_2y_2) \\ &= x_1y_1 - x_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1),\end{aligned}\tag{2.11}$$

que está de acuerdo con la definición de producto que hemos estudiado.

Otro ejemplo, el inverso,

$$x^{-1} = \frac{1}{x_1 + ix_2} = \frac{x_1 - ix_2}{(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)} = \frac{x_1 - ix_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{ix_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Definición 2.3: Dado $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ se define el **conjugado** de z como el número complejo:

$$z^* = (x, -y) = x - iy.\tag{2.12}$$

Se cumplen:

- 1.) $(z + u)^* = z^* + u^*$
- 2.) $(zu)^* = z^*u^*$
- 3.) $z + z^* = 2\operatorname{Re}(z)$
- 4.) $z - z^* = 2i\operatorname{Im}(z)$
- 5.) si $z \neq 0 \Rightarrow zz^* > 0$
- 6.) si $z^* = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$
- 7.) $(z^*)^* = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- 8.) $(z^*)^2 = (z^2)^*$, en general $(z^*)^n = (z^n)^*$

Definición 2.4: Dado $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ se le puede asociar un número real positivo, no nulo, denominado **módulo** o **valor absoluto** de z , definido como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.\tag{2.13}$$

Se cumplen:

- 1.) $|z| \geq 0$ y $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$
- 2.) $|z^*| = |z|$
- 3.) $|z|^2 = z \cdot z^*$, sólo si $x \in \mathbb{R}$ se tiene $|x|^2 = x^2$
- 4.) $|zu| = |z||u|$
- 5.) $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$
- 6.) **desigualdad triangular**, si $z, u \in \mathbb{C}$ se tiene $|z + u| \leq |z| + |u|$, probemosla,

$$\begin{aligned}|z + u|^2 &= (z + u)(z + u)^* = (z + u)(z^* + u^*) \\ &= zz^* + uu^* + zu^* + uz^* = |z|^2 + |u|^2 + zu^* + uz^* \\ &= |z|^2 + |u|^2 + 2\operatorname{Re}(zu^*) \leq |z|^2 + |u|^2 + 2|(zu^*)| \\ &= |z|^2 + |u|^2 + 2|z||u| = (|z| + |u|)^2 \\ &\Rightarrow |z + u| \leq |z| + |u|.\end{aligned}$$

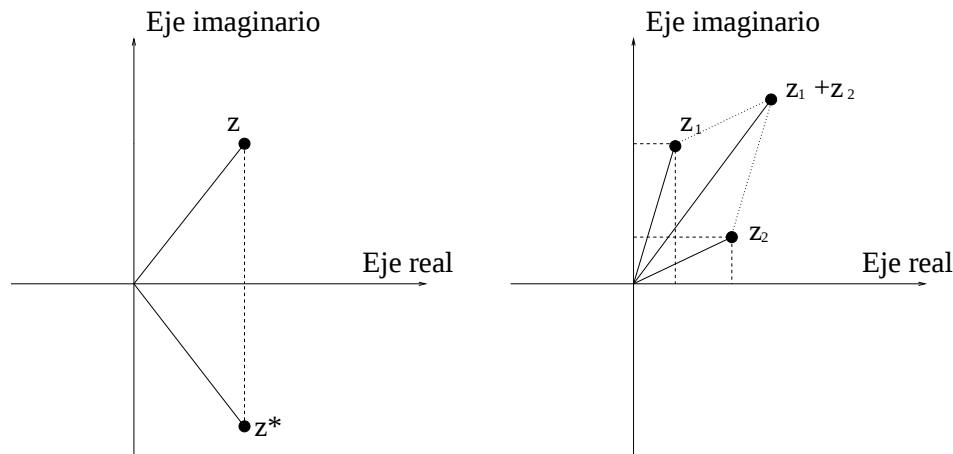


Figura 2.1: (izquierda) Representación gráfica de los números z y z^* . (derecha) Representación gráfica de la suma $z_1 + z_2$.

2.4 Representación Geométrica

Hemos definido $z \in \mathbb{C}$ como un par ordenado $z = (x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$ así pues podemos representarlo como un punto en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con coordenadas (x, y) y podemos representar $z \in \mathbb{C}$ como un vector en el plano con origen en $(0, 0)$ y final en (x, y) . La suma se puede obtener geoméricamente, y el valor absoluto es la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas. $|z - u|$ es la longitud del segmento que une z y u . La figura 2.1 muestra la representación gráfica de varios números complejos.

2.5 Forma polar de los números complejos

Si $z = (x, y) \neq (0, 0)$ podemos expresar x e y en coordenadas polares r, θ ,

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad (2.14)$$

con lo que

$$z = x + iy = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \quad (2.15)$$

Definición 2.5: Dado un punto (x, y) el ángulo θ que le corresponde no es único ya que siempre podemos sumarle cualquier múltiplo de 2π y seguir teniendo el mismo punto. Así pues, el **argumento principal** de z se define,

$$-\pi < \theta \leq \pi, \quad (2.16)$$

r coincide con el **valor absoluto o modulo** de z . Ver figura 2.2.

Por tanto, para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se tiene,

$$z = (x, y) = x + iy = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \quad (2.17)$$

El valor absoluto $|z| \in \mathbb{R}$ es la longitud de un segmento, por tanto tiene las mismas propiedades que los valores absolutos de los números reales, por ejemplo, $|z| > 0$ si $z \neq 0$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, etc.

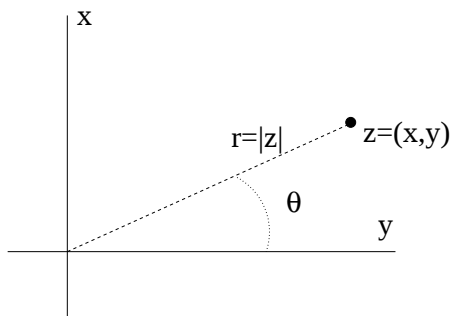


Figura 2.2: Definición del argumento principal y el radio del número complejo $z = x + iy$, variables utilizadas en la forma polar.

Ejemplo 2.1: La unidad imaginaria y cumple,

$$\begin{aligned} i &= (0, 1) \\ i^2 &= -1 = (-1, 0) \\ i^3 &= -i = (0, -1) \\ i^4 &= 1 = (1, 0) \end{aligned}$$

o en general, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} i^{4n} &= 1 \\ i^{4n+1} &= i \\ i^{4n+2} &= -1 \\ i^{4n+3} &= -i \end{aligned}$$

gráficamente se puede ver en la figura 2.3.

2.6 No ordenabilidad de los complejos

Recordemos los axiomas de orden para los números reales,

- Axioma 6:

se verifica sólo una de las relaciones:

$$x < y \quad x = y \quad x > y. \quad (2.18)$$

- Axioma 7:

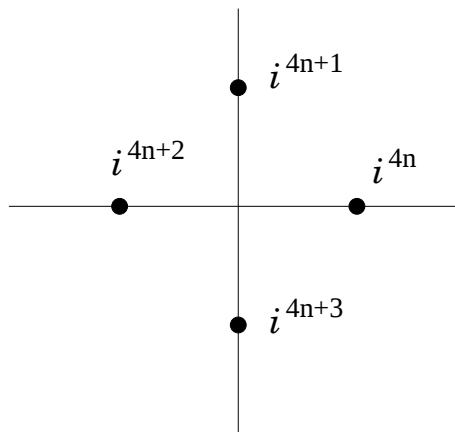
si $x < y \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow x + z < y + z$.

- Axioma 8:

si $x, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$.

- Axioma 9:

si $x > y$ e $y > z \Rightarrow x > z$.

Figura 2.3: Representación gráfica de las potencias de i .

¿son ciertos para $x, y, z \in \mathbb{C}$?

Consideremos el número i , al no ser 0 por el axioma 6 tendríamos, $i > 0$ o $i < 0$.

- Supongamos $i > 0$, entonces el axioma 8 $\Rightarrow i \cdot i > 0 \Rightarrow -1 > 0$, que la entendemos como un nuevo orden. (Nótese que hasta aquí no hay contradicción)

Sin embargo, sumemos +1 a ambos lados de la desigualdad

$$\left. \begin{array}{l} -1 + 1 > 0 + 1 \\ -1 > 0 \\ -1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 > 1 \\ (-1)(-1) > 0 \Rightarrow 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{contradicción.} \quad (2.19)$$

Si suponemos $i < 0$ llegamos a una contradicción similar, así pues, tenemos que i no es comparable con 0, lo que lleva a que los números complejos no se pueden ordenar con una relación que satisfaga los axiomas de orden, 6, 7, 8 y 9.

2.7 Funciones de números complejos

Hemos definido qué es un número complejo y el conjunto de los complejos $\mathbb{C}$, ahora vamos a operar con números complejos y estudiar funciones complejas elementales. Para ello generalizaremos las funciones conocidas a variable compleja de forma que sigan teniendo las propiedades que tenían en el caso de variable real.

2.7.1 Repaso de funciones en $\mathbb{R}$

- polinómicas:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.20)$$

- Algebraicas: funciones $f(x) \equiv y$ que satisfacen,

$$p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0 \quad y = f(x) \quad (2.21)$$

donde $p_n(x)$ son polinomios de grado n , un ejemplo sería:

$$4x^2(f(x))^2 - 2 = 0 \quad \text{así } p_0 = -2, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 4x^2$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2x^2}}. \quad (2.22)$$

• Funciones trascendentes

- (i) función exponencial, $f(x) = a^x$, con $a \neq 0, 1$
- (ii) función logaritmo, $f(x) = \log_a(x)$, con $a \neq 0, 1$ son una la inversa de la otra, teniéndose que si:

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a(y) \quad (2.23)$$

si $a = e = 2.718\dots$ se denominan logaritmos neperianos, que son los más utilizados en general. Utilizaremos la notación $\ln(x) = \log_e(x)$ ².

- (iii) funciones trigonométricas

$$\sin(x) \quad \cos(x) \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

En general la variable x se representa en radianes, donde π radianes son 180 grados.

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces, $\sin(x)$ y $\cos(x)$ varían entre -1 y 1 . Algunas propiedades básicas que satisfacen son:

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ 1 + \tan^2(x) &= \sec^2(x) \\ 1 + \cotan^2(x) &= \operatorname{cosec}^2(x), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

y

$$\begin{aligned} \sin(x) &= -\sin(-x) & \cos(x) &= \cos(-x) \\ \tan(x) &= -\tan(-x). \end{aligned} \quad (2.26)$$

- (iv) funciones trigonométricas inversas

$$\begin{aligned} y &= \sin^{-1}(x) = \arcsin(x) & (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2) \\ y &= \arccos(x) & (0 \leq y \leq \pi) \\ y &= \arctan(x) & (-\pi/2 < y < \pi/2). \end{aligned}$$

²En muchos textos se utiliza directamente $\log(x)$ para designar el logaritmo neperiano.

(v) funciones hiperbólicas, se definen a partir de las funciones exponenciales

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} & \cotgh(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \\ \operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)} & \operatorname{cosech}(x) &= \frac{1}{\sinh(x)}\end{aligned}$$

algunas de sus propiedades son:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ 1 - \tanh^2(x) &= \operatorname{sech}^2(x) \\ \cotan^2(x) - 1 &= \operatorname{cosech}^2(x)\end{aligned}\tag{2.27}$$

también,

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)\end{aligned}\tag{2.28}$$

y

$$\sinh(x) = -\sinh(-x) \quad \cosh(x) = \cosh(-x)\tag{2.29}$$

(vi) funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \forall x \\ \operatorname{arccosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & x \geq 1.\end{aligned}\tag{2.30}$$

2.7.2 Exponenciales Complejas

La función exponencial real, e^x , con $x \in \mathbb{R}$, tiene la propiedad,

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y,\tag{2.31}$$

convirtiendo la suma de exponentes en el producto de exponenciales. La generalización compleja,

$$z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy\tag{2.32}$$

queremos que satisfaga $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, que coincida con la exponencial usual cuando $z \in \mathbb{R}$ y que $e^0 = 1$.

Definimos e^z con $z = x + iy$ como:

$$e^z \equiv e^x(\cos(y) + i \sin(y))\tag{2.33}$$

notemos que si $z \in \mathbb{R}$, o sea, si, $y = 0$, se tiene $e^z = e^x$, con lo que se recupera la definición habitual cuando z es un número real.

Podemos probar que el producto satisface la propiedad anterior. Sean dos números complejos,

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \in \mathbb{C} \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \in \mathbb{C} \end{aligned} \right\} \quad \text{se tiene } e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}\tag{2.34}$$

veamos,

$$\begin{aligned} e^{z_1} &= e^{x_1}(\cos(y_1) + i \sin(y_1)) \\ e^{z_2} &= e^{x_2}(\cos(y_2) + i \sin(y_2)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} (\cos(y_1) \cos(y_2) - \sin(y_1) \sin(y_2)) \\ &\quad + i(\cos(y_1) \sin(y_2) + \sin(y_1) \cos(y_2)) \\ e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

como se puede ver, la exponencial compleja conecta las funciones exponenciales con las trigonométricas.

Veamos algunas propiedades interesantes:

- 1.) $e^0 = e^{0+i0} = e^0(\cos(0) + i \sin(0)) = e^0 = 1$
- 2.) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
- 3.) e^z no es nunca 0, $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1 \quad \forall z \Rightarrow e^z \neq 0 \quad \forall z$
- 4.) Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (e^{ix})^* = e^{-ix}$
- 5.) Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |e^{ix}| = 1$
- 6.) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi in \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\Leftarrow e^z = e^{2\pi ni} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1 \\ &\Rightarrow \text{si } e^z = 1 \Rightarrow e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = 1 \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x \cos(y) = 1 \\ e^x \sin(y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(y) = 0 \Rightarrow y = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

entonces,

$$\left. \begin{array}{l} \cos(k\pi) = (-1)^k \\ e^x \cos(y) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow e^x(-1)^k = 1 \Rightarrow e^x = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k \quad (2.38)$$

pero como $e^x > 0 \quad \forall x \Rightarrow (-1)^k > 0 \Rightarrow k$ es par $\Rightarrow k = 2n \quad n \in \mathbb{Z}$

- 7.) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2\pi ni$. Veamos, $e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow e^{z_1} \frac{1}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} = 1 \xrightarrow{\text{de 6.}} z_1 - z_2 = 2\pi ni$.

Esto implica que la función exponencial compleja es periódica con periodo $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi ni} = e^x(\cos(y + 2\pi n) + i \sin(y + 2\pi n)) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = e^z$$

Así se tiene que cualquier $z \in \mathbb{C}$ se puede representar en **forma polar** como:

$$z = re^{i\theta} \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arg(z) + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.39)$$

Además recordemos que³,

$$\begin{aligned} e^z = e^{x+iy} &= e^x \underbrace{(\cos(y) + i \sin(y))}_{e^{iy}} \\ &\Rightarrow e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta). \end{aligned} \quad (2.40)$$

³La fórmula (2.40) se denomina *fórmula de Euler*.

Algunos valores a recordar son, $e^0 = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$ y $e^{3\pi/2} = -i$.

La forma polar es en general más cómoda para multiplicar y dividir complejos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Teorema 2.1: Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2) \quad (2.42)$$

donde:

$$n(z_1, z_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq \pi \\ +1 & \text{si } -2\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq -\pi \\ -1 & \text{si } \pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.43)$$

Demostración. Puede verse sin más qué estudiar qué ángulo es necesario sumar en cada caso para tener el argumento principal. c.q.d.

Nota: r, θ determinan de forma unívoca a z , pero no es cierto el inverso,

$$z = r e^{i\theta} \quad \theta = \arg z + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.44)$$

por ejemplo $-i = e^{-i\pi/2} = e^{i3\pi/2}$, el argumento principal es en este caso $-\pi/2$.

Ejemplo 2.2: Expresar en forma polar el número: $z = -2 - 2\sqrt{3}i$. El modulo es

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4, \quad (2.45)$$

el argumento:

$$\theta = \arctan(-2\sqrt{3}/-2) = \arctan(\sqrt{3}), \quad (2.46)$$

con lo que $\theta = \pi/3$. Ahora bien, podría ser $\pi/3$ o $\pi/3 - \pi$, una forma sencilla de discernir entre ambos es ver que el número en cuestión está en el tercer cuadrante, así pues, $\arg(z) = \pi/3 - \pi = -2\pi/3$. Nota que el argumento principal está definido de manera precisa por el ángulo que cumple que $r \cos(\arg(z)) = \operatorname{Re}(z)$ y $r \sin(\arg(z)) = \operatorname{Im}(z)$ y finalmente:

$$z = 4e^{-2\pi/3i}. \quad (2.47)$$

2.7.3 Potencias y raíces

Definición 2.6: *Potencia ésimas*, ($n \in \mathbb{Z}$)

Se define, z^n con $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$z^0 = 1, \quad z^{n+1} = z^n \cdot z \quad n \geq 0 \quad (2.48)$$

de donde, $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ veces}}$.

Asimismo se define,

$$z^{-n} = (z^{-1})^n. \quad (2.49)$$

Propiedades:

1.) $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$ veamos:

$$z^n \cdot z^m = z^n \cdot z^{m-1} \cdot z = z^{n+1} z^{m-1} = z^{n+2} z^{m-2} = \dots = z^{n+m} \cdot 1 = z^{n+m}$$

2.) $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n z_2^n$, se puede probar por inducción

3.) $z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$

4.) Teorema de De Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

A partir de la fórmula de Euler (2.40) es sencillo probar:

$$(e^{iy})^n = e^{iny} = \cos(ny) + i \sin(ny). \quad (2.50)$$

Teorema 2.2: Raíces n-ésimas de un complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$, $\exists n$ complejos diferentes (raíces n-ésimas de z): $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ tales que:

$$z_k^n = z. \quad (2.51)$$

Demostración. Utilizaremos la forma polar $z = Re^{i\theta}$, $\theta = \arg(z)$, cualquier raíz n-ésima será: $z_k = R_k e^{i\theta_k}$ tal que:

$$\begin{aligned} (z_k)^n &= (R_k e^{i\theta_k})^n = R_k^n e^{in\theta_k} = Re^{i\theta} \\ &\Rightarrow \\ \begin{cases} (R_k)^n = R & (\text{reales}) \Rightarrow R_k = (R)^{1/n} = |z|^{1/n} \\ n\theta_k = \theta + 2\pi k & \Rightarrow \theta_k = \theta/n + 2\pi k/n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nótese que los números complejos z_k son diferentes ya que tienen argumento diferente. Además sólo hay n distintos, si $k > n$, empiezan a repetirse. c.q.d.

Ejemplo 2.3:

$$z^2 = -1 = 1e^{i\pi} \quad (2.53)$$

de donde

$$\begin{aligned} |z_k|^2 (e^{i\theta_k})^2 &= 1e^{i\pi} \\ |z_k| &= 1 \quad k = 0, 1 \\ k = 0 \quad \theta_0 &= \pi/2 \\ k = 1 \quad \theta_1 &= \pi/2 + 2\pi/2 = 3\pi/2 \\ \Rightarrow \begin{cases} z_0 &= 1e^{i\pi/2} = i \\ z_1 &= 1e^{i3\pi/2} = -i. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.54)$$

En la figura 2.4 hemos representado las raíces sextas y novenas del número 1.

Fórmula útil para raíces cuadradas de complejos

Hemos visto cómo calcular raíces n-ésimas de complejos. Ahora vamos a ver una fórmula equivalente para el caso de raíces cuadradas de un número w dado del siguiente modo:

$$w_1^2 = w \quad w_2^2 = w, \quad (2.55)$$

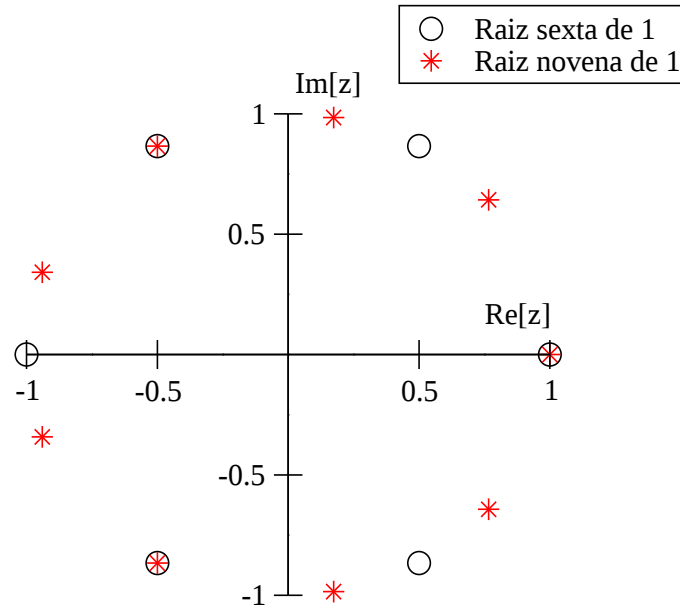


Figura 2.4: Representación gráfica de las raíces sextas y novenas de 1.

veamos,

$$\operatorname{Re}(w_1)^2 + 2i\operatorname{Re}(w_1)\operatorname{Im}(w_1) - \operatorname{Im}(w_1)^2 = \operatorname{Re}(w) + i\operatorname{Im}(w), \quad (2.56)$$

de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(w_1)^2 - \operatorname{Im}(w_1)^2 &= \operatorname{Re}(w) \\ 2\operatorname{Re}(w_1)\operatorname{Im}(w_1) &= \operatorname{Im}(w) \\ \text{por otro lado} \\ |w_1|^2 &= \operatorname{Re}(w_1)^2 + \operatorname{Im}(w_1)^2 = |w| \\ \text{sumando :} \\ \operatorname{Re}(w) + |w| &= 2\operatorname{Re}(w_1)^2 \Rightarrow \operatorname{Re}(w_1) = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(w) + |w|}{2}}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

(a) Si $\operatorname{Re}(w) + |w| \neq 0$, entonces:

$$\operatorname{Im}(w_1) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{Re}(w) + |w|}{2}}} \operatorname{Im}(w). \quad (2.58)$$

Así que la raíz es,

$$w_1 = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(w) + |w|}{2}} + i \frac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{Re}(w) + |w|}{2}}} \operatorname{Im}(w) = \frac{|w| + w}{\sqrt{2(\operatorname{Re}(w) + |w|)}}, \quad (2.59)$$

la otra es sencillamente $w_2 = -w_1$.

(b) Si $\operatorname{Re}(w) + |w| = 0$ implica que: $\operatorname{Im}(w)=0$ y además que $\operatorname{Re}(w) \leq 0$. Entonces, tenemos

$$\operatorname{Im}(w_1)^2 = |w| \Rightarrow \operatorname{Im}(w_1) = \sqrt{|w|}, \quad (2.60)$$

y las raíces son: $w_1 = i\sqrt{|w|}$ y $w_2 = -w_1$.

2.7.4 Logaritmos

En el caso real: $e^x = y \leftrightarrow x = \ln y$. Como $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que $y \in \mathbb{R}^+$. Buscamos una definición similar para el caso de números complejos.

Definición 2.7: Sea $w \neq 0$ un número complejo, diremos que z es un logaritmo de w si $e^z = w$. Se tiene que todos los números complejos z_n siguientes son logaritmos de w :

$$z_n = \ln |w| + i \arg(w) + i2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (2.61)$$

Se puede probar de forma sencilla que se cumple:

$$e^{z_n} = e^{\ln |w| + i \arg(w) + i2\pi n} = e^{\ln |w|} e^{i \arg(w)} e^{i2\pi n} = |w| e^{i \arg(w)} 1 = w. \quad (2.62)$$

Definición 2.8: Se denomina **determinación principal del logaritmo** a:

$$\text{Ln}(w) = \ln |w| + i \arg(w). \quad (2.63)$$

La determinación principal del producto de dos números complejos cualesquiera puede obtenerse del siguiente modo: Sean $z_1 z_2 \neq 0$

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln} z_1 + \text{Ln} z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2), \quad (2.64)$$

donde $n(z_1, z_2)$, definida en el teorema 2.1, proporciona el argumento necesario para tener el argumento principal.

Ejemplo 2.4: $w = -1$ no tiene logaritmo dentro de los números reales, $\Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \mid e^x = -1$ veamos el caso complejo. En representación polar se tiene, $w = 1e^{i\pi}$, buscamos un $z \in \mathbb{C} \mid e^z = w$, $z = \ln |w| + i \arg(w) = \ln 1 + i\pi = i\pi$.

Ejemplo 2.5: Algunos logaritmos de uso corriente son

$$\text{Ln}(-1) = i\pi \quad \text{Ln}(i) = i\pi/2 \quad \text{Ln}(-i) = -i\pi/2 \quad \text{Ln}(-2) = \ln(2) + i\pi. \quad (2.65)$$

2.7.5 Potencias complejas de complejos

Definición 2.9: Si $z \neq 0 \quad (z \in \mathbb{C})$ y $w \in \mathbb{C}$ podemos definir potencias complejas de complejos del siguiente modo:

$$z^w \equiv e^{w \text{Ln} z}. \quad (2.66)$$

Propiedades:

$$1.) \quad z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}, \text{ veamos: } z^{w_1+w_2} = e^{(w_1+w_2) \text{Ln} z} = e^{w_1 \text{Ln} z} e^{w_2 \text{Ln} z} = z^{w_1} z^{w_2}.$$

$$2.) \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}, \quad z^n = e^{n \text{Ln} z} = e^{(\text{Ln} z + \text{Ln} z + \dots + \text{Ln} z)} = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ veces}}.$$

$$3.) \quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w e^{i w 2\pi n(z_1, z_2)} \text{ con } n(z_1, z_2) \text{ definida en el teorema 2.1.}$$

Ejemplo 2.6:

$$\begin{aligned} (1+i)^{1-i} &= (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{1-i} = e^{(1-i) \text{Ln}(\sqrt{2}e^{i\pi/4})} \\ &= e^{(1-i)(\ln\sqrt{2}+i\pi/4)} \\ &= e^{\ln\sqrt{2}+\pi/4+i(\pi/4-\ln\sqrt{2})} \\ &= e^{(\ln\sqrt{2}+\pi/4)} \left[\cos(\pi/4 - \ln\sqrt{2}) + i \sin(\pi/4 - \ln\sqrt{2}) \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Ejemplo 2.7: $i^i = e^{i \text{Ln} i} = e^{i[\ln 1 + i\pi/2]} = e^{-\pi/2}.$

2.7.6 Trigonometría compleja

Sabemos que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, esto implica:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (2.68)$$

Esta definición se puede extender de forma sencilla a variables complejas.

Definición 2.10: Dado $z \in \mathbb{C}$ se define:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Veamos, si $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) tenemos,

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y) \\ &= \frac{1}{2i}[e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)] \\ &= \frac{1}{2i}[-(e^y - e^{-y}) \cos x + (e^y + e^{-y}) i \sin x] \\ &= i \cos x \sinh y + \sin x \cosh y. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \end{aligned} \quad (2.71)$$

- si $z = iy$

$$\begin{aligned} \sin(iy) &= i \sinh y \\ \cos(iy) &= \cosh y, \end{aligned} \quad (2.72)$$

- si $z = x$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin x \\ \cos(x) &= \cos x, \end{aligned} \quad (2.73)$$

como era de esperar.

Se puede comprobar que se cumplen las relaciones trigonométricas,

$$\begin{aligned} \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ejemplo 2.8: Encontrar el z complejo que resuelve la ecuación, $\sin z = 10$

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 10 \\ \Rightarrow \cos x \sinh y &= 0 \Rightarrow x = \pi/2 \\ \Rightarrow \cosh y &= 10 \end{aligned} \quad (2.75)$$

y para resolver esta ecuación:

$$\cosh y = 10 \Rightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 10 \xrightarrow{t=e^y} t^2 + 1 - 20t = 0 \quad (2.76)$$

de donde $t = \frac{20 \pm \sqrt{400-4}}{2} \approx 19.94$ o 0.05 , lo que implica, $y \approx \pm 2.99$. La solución final es: $z = \pi/2 + i 2.99$.

2.8 Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema 2.3: Sea la ecuación polinómica de grado n -ésimo:

$$\begin{aligned} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 &= 0 \\ z \in \mathbb{C}, \quad a_n &\neq 0. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Toda ecuación polinómica de grado n -ésimo tiene exactamente n soluciones, contando cada una de ellas tantas veces como indique su multiplicidad (es decir, contando repeticiones). Por ejemplo: $x^2 - 2x + 1 = 0$ se puede escribir como $(x - 1)(x - 1) = 0$ que tiene como solución $x = +1$ (doble).

Además:

- (a) Si los coeficientes a_i son reales, las soluciones complejas van por parejas z y z^* .
- (b) Si los coeficientes a_i son reales y n impar, $\exists$ como mínimo 1 solución real.

Ejemplo 2.9: Recordemos que las soluciones complejas aparecen por parejas si tenemos coeficientes reales, pero no en otro caso. Por ejemplo, la ecuación, $iz + 1 = 0$ tiene una única solución: $z = i$, ¡nótese que $z = -i$ no es solución!

Demostración. La demostración del teorema no la estudiamos. La demostración del punto (a) puede escribirse sin más que notar que si todos los a_i son reales entonces la ecuación polinómica original y su compleja conjugada son idénticas. c.q.d.

CAPÍTULO 3

TOPOLOGÍA

3.1 Nociones de Topología

Antes de estudiar las propiedades de las funciones estudiaremos propiedades topológicas dentro de sus dominios. Por eso, tendremos que introducir el concepto de distancia, métrica, en el espacio $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^n$.

Recordemos la definición que estudiamos en el capítulo 1 de producto cartesiano. El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se define como:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}. \quad (3.1)$$

3.1.1 Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Definición 3.1: Punto del espacio bidimensional $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: par ordenado de números reales $\vec{x} = (x_1, x_2)$.

Definición 3.2: Punto del espacio tridimensional $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: terna ordenada de números reales $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Definición 3.3: Generalizamos a espacios n -dimensionales: $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}}$. n – upla ordenada de números reales, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde a x_k se le denomina coordenada k -ésima.

Definición 3.4: Espacio euclídeo n -dimensional: $\mathbb{R}^n$

Conjunto de todos los puntos n -dimensionales, vectores,

$$\mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n\}. \quad (3.2)$$

- El espacio $\mathbb{R}^n$ nos permite estudiar propiedades independientes de la dimensión del espacio
- espacios de $n > 3$ se presentan de manera natural en varias disciplinas: relatividad, mecánica estadística, cuántica, etc.

Enunciaremos a continuación las **propiedades algebraicas** dentro de $\mathbb{R}^n$, que son una generalización de las que ya conocemos para el espacio tridimensional ordinario.

Sean: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumplen

- (i) **Igualdad**, $\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad (i = 1, \dots, n)$.
- (ii) **Suma**, $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.
- (iii) **Multiplicación por números reales** $a\vec{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$.
- (iv) **Diferencia**, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1)\vec{y}$
tenemos el vector nulo, $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Asimismo definimos:

- (v) **Producto interior (producto escalar)**: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k. \quad (3.3)$$

- (vi) **Norma o longitud**

$$\|\vec{x}\| = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Distancia de $\vec{x}$ a $\vec{y}$,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.5)$$

Se tienen las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{x}) &= 0 \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &> 0 \quad \text{si } \vec{x} \neq \vec{y} \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &= d(\vec{y}, \vec{x}) \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &\leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se denominan **vectores coordinados unitarios** de $\mathbb{R}^n$ a vectores que tienen la componente k -ésima igual a 1 y el resto de componentes igual a 0. Por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \vec{u}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ \vec{u}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Definición 3.5: *Base.* Cualquier vector, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, se puede escribir como,

$$\vec{x} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \cdots + x_n \vec{u}_n \quad (3.8)$$

donde $x_i = \vec{x} \cdot \vec{u}_i$ con $i = 1, \dots, n$. Los vectores $\vec{u}_i$ se **denominan vectores base** de $\mathbb{R}^n$. Además se cumple que $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}$ por lo que se denomina *base ortonormal*.

Nota: δ_{ij} es la delta de Kronecker, definida como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.9)$$

3.1.2 Métrica de un espacio M

Definición 3.6: Aplicación que hace corresponder a cualquier par de puntos de M un número real $d(x, y)$ que tiene que satisfacer las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned} M \times M &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) \quad \forall x, y \in M \end{aligned} \quad (3.10)$$

y

$$\begin{aligned} 1) \quad & d(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \\ 2) \quad & d(\vec{x}, \vec{y}) > 0 \quad \text{si } \vec{x} \neq \vec{y} \\ 3) \quad & d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}) \\ 4) \quad & d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si M es un espacio dotado de una métrica d , nos referiremos a M como **espacio métrico**. La norma antes definida cumple dichas propiedades, eso hace que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ junto con dicha norma sea un **espacio métrico**.

Nota: Hay muchas definiciones de métrica distintas de la que hemos construido con la norma, en particular, por ejemplo podría definirse una métrica que fuera,

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (3.12)$$

se puede ver que si $d(x, y)$ es métrica entonces $d'(x, y)$ también lo es.

3.2 Bolas, puntos interiores y conjuntos abiertos

En un espacio métrico se pueden definir varios conjuntos de gran utilidad:

3.2.1 Bola abierta

Definición 3.7: Una **bola abierta** de centro $\vec{a}$ y radio $r > 0$ es el conjunto de todos los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $d(\vec{x}, \vec{a}) < r$ o dicho de otro modo:

$$B_n(\vec{a}; r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{x}, \vec{a}) < r\} \quad (3.13)$$

se cumple $B_n(\vec{a}; r) \subset \mathbb{R}^n$.

- Si $n = 1$ ($\mathbb{R}$: recta real, dimensión 1)

$$B_1(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (a - r, a + r) \quad (3.14)$$

(que no es más que un intervalo abierto de radio r centrado en a).

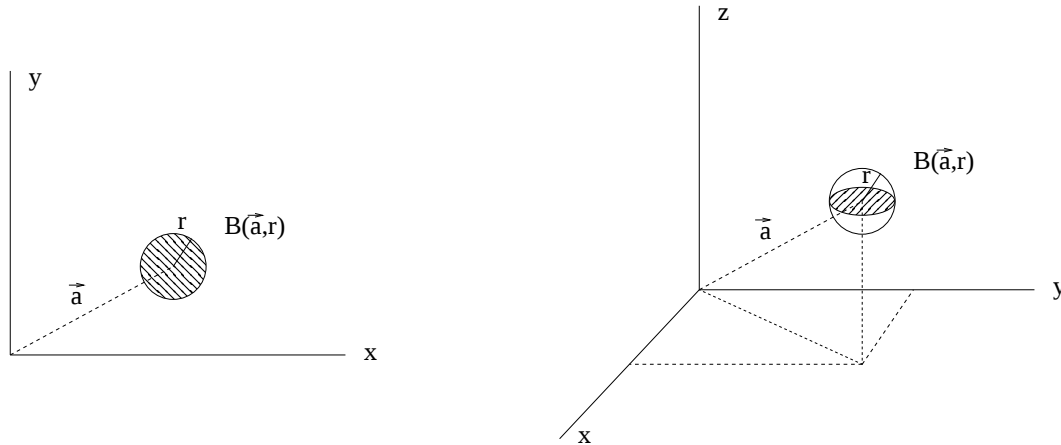


Figura 3.1: Bola de radio r y centro en $\vec{a}$ en un espacio de dos dimensiones (izquierda) y tres dimensiones (derecha).

- Si $n = 2$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$,

$$B_2(\vec{a}; r) = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\} \quad (3.15)$$

en 2d es un entorno circular, en 3d se trata del interior de una esfera (ver figura 3.1).

3.2.2 Punto Interior

Definición 3.8: Sea S un conjunto de $\mathbb{R}^n$ ($S \subset \mathbb{R}^n$).

Sea $\vec{a} \in S$, diremos que $\vec{a}$ es **interior** a S si $\exists r \in \mathbb{R} \mid B_n(\vec{a}, r) \subset S$.

Definición 3.9: Se define el **interior** de S , $\text{int}(S)$, como el conjunto de todos los puntos interiores de S .

3.2.3 Conjunto abierto

Definición 3.10: $S \subset \mathbb{R}^n$ diremos que es abierto si todos sus puntos son interiores.

S abierto $\Leftrightarrow S = \text{int}(S)$.

3.2.4 Conjunto cerrado

Definición 3.11: $S \subset \mathbb{R}^n$, diremos que S es cerrado en $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n - S$ es abierto.

Ejemplo 3.1:

- Intervalo abierto (a, b) es un conjunto abierto.
- Intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto cerrado, en este caso el $\mathbb{R} - [a, b]$ sería el conjunto $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$.
- Los intervalos $(a, b]$ y $[a, b)$ no son ni abiertos ni cerrados. En ambos casos hay un punto que no es interior.

3.2.5 Unión e intersección de conjuntos abiertos

Se puede probar que la unión de una colección cualquiera de conjuntos abiertos es abierta y que la intersección de una colección finita de abiertos también es abierta.

- Unión: Tenemos $S = \cup_{A \in F} A$ con A abiertos.

Un $\vec{x}$ cualesquiera de S satisface:

$$\vec{x} \in S \Rightarrow \exists A \in F \quad | \quad \vec{x} \in A \Rightarrow \exists B(\vec{x}, r) \subset A \subset S, \quad (3.16)$$

lo que implica que $\vec{x}$ es interior a S , $\forall \vec{x} \in S$.

- Intersección: Tenemos $S = \cap_{k=1}^n A_k$ con A_k abiertos.

Un $\vec{x}$ cualesquiera de S seguro que:

$$\vec{x} \in S \Rightarrow \vec{x} \in A_k, k = 1, \dots, n \Rightarrow \exists B(\vec{x}, r_k) \subset A_k \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.17)$$

cogemos $r = \min(r_k)$, entonces $B(\vec{x}, r) \subset A_k, k = 1, \dots, n$ lo que implica que $\vec{x}$ es interior a S , $\forall \vec{x} \in S$.

3.2.6 Conjunto acotado

Definición 3.12: $S \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si

$$\exists \vec{a}, r \quad | \quad S \subset B(\vec{a}, r). \quad (3.18)$$

3.3 Puntos adherentes y de acumulación

3.3.1 Punto adherente

Definición 3.13: Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

Un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se denomina **punto adherente de S** si $\forall B(\vec{x}, \varepsilon)$ contiene como mínimo un punto de S . Dicho de otro modo si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{se tiene } B(\vec{x}, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \quad (3.19)$$

Nota: $\vec{x}$ puede o no pertenecer a S

Ejemplo 3.2:

- Si $\vec{x} \in S$ entonces $\vec{x}$ es adherente de S , ya que la bola siempre contiene al menos a $\vec{x}$.
- $S = (a, b)$, a , b y todos los puntos de S son adherentes de S .
- si S está acotado superiormente el supremo es adherente.

Esto se puede probar, si no fuera adherente $\exists r \quad | \quad B(b, r) \cap S = \emptyset$, pero entonces, $b - r$ sería una cota superior y entonces b no sería el supremo.

3.3.2 Punto de acumulación

Definición 3.14: Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (no es necesario que esté en S) se denomina punto de **acumulación** de S , si $\vec{x}$ es adherente del conjunto $S - \{\vec{x}\}$, es decir, si

$$\forall B(\vec{x}, r) \quad (3.20)$$

hay puntos de S distintos de $\vec{x}$. Esto significa que la **bola reducida** $(B_0(\vec{x}, r) = B(\vec{x}, r) - \{\vec{x}\})$ de entorno $\vec{x}$ y radio r tiene intersección no nula con S .

Corolario 3.1: Si $\vec{x}$ es un punto de acumulación de S , toda $B(\vec{x}, r)$ contiene infinitos puntos de S .

Demostración. (reducción al absurdo)

En efecto, si dentro de una bola de centro $\vec{x}$ y radio r , hay sólo un número finito $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ es-
cojamos como radio $r = \text{mínimo}\{d(\vec{x}, \vec{x}_1), \dots, d(\vec{x}, \vec{x}_n)\}$ y consideramos la bola, $B(\vec{x}, r/2) \subset B(\vec{x}, r)$,
esta bola no tendría ningún punto de S diferente del propio $\vec{x}$ lo que contradice la hipótesis de que
 $\vec{x}$ es un punto de acumulación. c.q.d.

3.3.3 Punto aislado

Definición 3.15: Un punto es **aislado** si no es de acumulación.

Ejemplo 3.3:

- $S = [a, b] \cup \{c\}$

c es adherente pero no de acumulación, es pues un punto aislado.

- $S = [a, b]$ todos los puntos son de acumulación

- $S = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\}$

El único punto de acumulación es el cero. Todos los puntos son aislados. El conjunto de puntos de adherencia es el $S \cup \{0\}$.

Demostración. Para demostrar que 0 es punto de acumulación, basta probar que,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \mid 0 < \frac{1}{n_1} < \varepsilon. \quad (3.21)$$

Pero esto es equivalente a probar que,

$$\forall \frac{1}{\varepsilon} > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid n_1 > 1/\varepsilon, \quad (3.22)$$

que es lo que hemos probado en el Teorema 1.11. c.q.d.

- $\mathbb{Z}$ no contiene ningún punto de acumulación pero todos los puntos son adherentes, son puntos aislados.

3.4 Teorema de Bolzano-Weierstrass

Teorema 3.2: Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, si S es acotado e infinito entonces

$$\Rightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.23)$$

que es punto de acumulación de S .

Demostración. En $\mathbb{R}$,

S acotado $\Rightarrow$ sea $[a, b]$ el intervalo que contiene a S

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en 2 intervalos iguales, como mínimo uno de ellos contiene un subconjunto ∞ de puntos de S (si no fuera así, entonces S sería finito), llamamos a dicho intervalo: $[a_1, b_1]$.
- Dividimos $[a_1, b_1]$ en dos partes iguales. Denominamos $[a_2, b_2]$ al que contiene un subconjunto infinito de S .

Continuamos con este proceso y tendremos una colección numerable de intervalos, $[a_n, b_n]$, cada uno de los cuales tiene un número infinito de puntos de S y cumpliéndose que:

$$[a_n, b_n] \subset \cdots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]. \quad (3.24)$$

La longitud de los intervalos es:

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \quad (3.25)$$

Y se tiene, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_i$, $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_i$, pero siempre $a_i < b_i$.

Consideremos ahora los conjuntos, $A \equiv \{a_i\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $B \equiv \{b_i\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, notemos que $\forall i, m : a_i < b_m$,

$$\begin{aligned} \text{si } m > i &\rightarrow a_i \leq a_m < b_m \Rightarrow a_i < b_m \\ \text{si } m = i &\rightarrow a_i < b_i \\ \text{si } m < i &\rightarrow a_i < b_i \leq b_m \Rightarrow a_i < b_m \end{aligned} \quad (3.26)$$

con lo que todos los b_m son cotas superiores del conjunto A y todos los a_m son cotas inferiores del conjunto B .

Recordemos el Axioma 10, sea $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, si S está acotado superiormente $\Rightarrow \exists$ supremo, $\sup(S)=b$, si S está acotado inferiormente $\Rightarrow \exists$ ínfimo, $\inf(S)=a$. Asimismo A está acotado superiormente $\Rightarrow \exists$ supremo de A . Sea $a_0 = \sup(A)$, tenemos que $a_0 \leq b_m \forall m \Rightarrow a_0$ es una cota inferior de $\{b_i\}$.

En nuestro caso, B está acotado inferiormente $\Rightarrow \exists$ ínfimo de B . Sea $b_0 = \inf(B)$, $\Rightarrow a_0 \leq b_0$. Ahora bien, a_0 y b_0 tienen que ser el mismo número, ya que si no lo fueran,

$$\begin{aligned} \text{Si } a_0 < b_0 &\Rightarrow c = b_0 - a_0 \\ \text{pero } \exists M \quad | \quad b_M - a_M &= \frac{b - a}{2^M} < c \\ \text{lo que contradice que } a_M &\leq a_0 \leq b_0 \leq b_M \end{aligned} \quad (3.27)$$

por lo que,

$$a_0 = b_0 \equiv x. \quad (3.28)$$

Proposición 3.3: *Dicho x es punto de acumulación del conjunto S .*

Demostración. Tenemos que ver que $\forall \varepsilon > 0$ $B_0(x, \varepsilon)$ como mínimo contiene un punto de S diferente de x . Veamos, dado ε , podemos encontrar un m tal que $b_m - a_m < \varepsilon/2$, entonces tendremos que $a_m \leq x \leq b_m$ y también

$$|a_m - x| < \varepsilon \quad |b_m - x| < \varepsilon \quad (3.29)$$

de donde

$$(a_m, b_m) \subset B_1(x, \varepsilon) \quad (3.30)$$

y además, como el intervalo (a_m, b_m) contiene **infinitos** puntos de S ,

$$B_0(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon, \quad (3.31)$$

y x es pues punto de acumulación de S .

c.q.d.

c.q.d.

Ejemplo 3.4: El conjunto $S = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$ tiene un punto de acumulación, el 0, que además no pertenece a S .

Teorema 3.4: $\forall S \subset \mathbb{R}^n$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) S es cerrado en $\mathbb{R}^n$
- 2) S contiene todos sus puntos adherentes
- 3) S contiene todos sus puntos de acumulación

Demostración. Varios casos

$1 \Rightarrow 2$ S es cerrado $\Rightarrow \mathbb{R}^n - S$ es abierto. Consideremos un $\vec{x}$ adherente de S . Si $\vec{x}$ está en S no hay nada que probar, si no lo está, se tiene:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n - S \quad \Rightarrow \exists B(\vec{x}, r) \in \mathbb{R}^n - S \quad (3.32)$$

pero esa bola cumple, $B(\vec{x}, r) \cap S = \emptyset \quad \Rightarrow \vec{x}$ no es adherente de S .

$2 \Rightarrow 1$ Veamos, S contiene todos sus adherentes, consideremos cualquier $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - S \Rightarrow \vec{x} \notin S, \Rightarrow \vec{x}$ no es adherente (ya que todos están en S por hipótesis). Eso implica que $\exists B(\vec{x}, r) \cap S = \emptyset$ lo que implica que esa bola pertenece a $\mathbb{R}^n - S$ con lo que $\mathbb{R}^n - S$ es abierto, y por tanto S es cerrado

$2 \Rightarrow 3$ Si contiene todos sus adherentes contiene todos los de acumulación, ya que todos los puntos de acumulación son adherentes.

$3 \Rightarrow 2$ Sea $\vec{x}$ adherente de S . Si está dentro de S no hay nada que probar. Si no lo está: $\vec{x} \notin S \Rightarrow \vec{x} \in \mathbb{R}^n - S$, pero al ser adherente de S tenemos,

$$\forall B(\vec{x}, r) \quad | \quad B(\vec{x}, r) \cap S \neq \emptyset \quad \Rightarrow B_0(\vec{x}, r) \cap S \neq \emptyset \quad (3.33)$$

ya que el propio $\vec{x}$ no está en S . Pero eso implicaría que $\vec{x}$ sería de acumulación de S y no estaría contenido en S en contradicción con la hipótesis.

c.q.d.

3.5 Recubrimientos, conjuntos compactos, teorema de Heine-Borel

Definición 3.16: Una colección F de conjuntos se denomina **recubrimiento de un conjunto** S si

$$S \subset \bigcup_{A \in F} A. \quad (3.34)$$

También se dice que F recubre a S . Si F es una colección de conjuntos abiertos, se denomina **recubrimiento abierto**.

Definición 3.17: Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice **compacto** si cualquier recubrimiento abierto de S contiene una subcolección finita que también recubre a S .

Teorema 3.5: (de Heine-Borel) Si F es un recubrimiento abierto de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y A es cerrado y acotado

$$\Rightarrow \quad (3.35)$$

$\exists$ una subcolección finita que también recubre a A .

Teorema 3.6: Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) S es compacto.
- 2) S es cerrado y acotado.
- 3) Todo subconjunto infinito de S tiene un punto de acumulación en S .

CAPÍTULO 4

FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Recordemos que una función es una relación entre dos conjuntos donde ningún elemento del dominio tiene dos imágenes diferentes.

Tenemos:

- polinómicas: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$.
- algebraicas: $f(x) \mid p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0$ con $y = f(x)$.
- trascendentes: no algebraicas, por ejemplo las exponenciales o los logaritmos.

Estudiaremos a continuación las funciones polinómicas de segundo grado en dos variables, x e y , que se denominan cónicas.

4.1 Cónicas

Tenemos diversos tipos de ecuaciones de segundo grado que representan funciones cónicas¹ en coordenadas cartesianas:

- circunferencia
- parábola
- elipse
- hipérbola.

¹Nótese que en algunos casos tal y como están definidas no son funciones, aunque es sencillo definir las separadas en distintas ramas, e.g. la semicircunferencia superior sería una función, y la semicircunferencia inferior sería otra.

La ecuación de segundo grado en x, y más general se puede escribir:

$$ay^2 + bx^2 + cxy + dx + ey + f = 0. \quad (4.1)$$

Después daremos definiciones geométricas de estas curvas y obtendremos sus ecuaciones, la relación funcional entre x e y que las describe. Finalizaremos con las ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares.

4.1.1 Ecuaciones de las cónicas

- Circunferencia. La relación que la describe es la siguiente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (4.2)$$

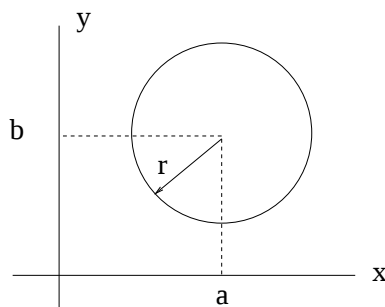


Figura 4.1: Circunferencia.

- Parábola. La expresión más general de una parábola es:

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (4.3)$$

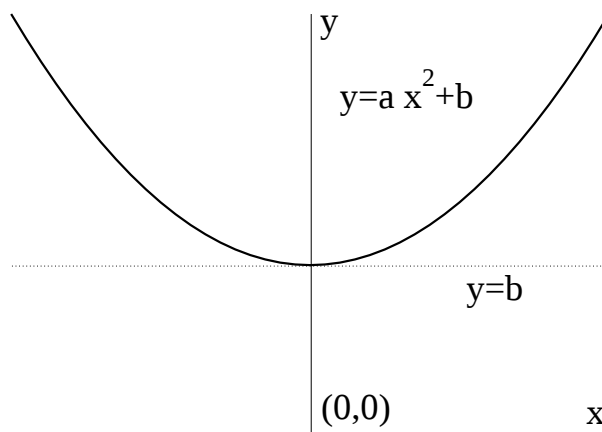


Figura 4.2: Parábola.

Si $y = ax^2$, vemos que si $a < 0$ la parábola se abre hacia abajo, además si a crece la parábola se hace más estrecha.

¿Donde aparecen parábolas en física? Varios ejemplos: el tiro parabólico, los espejos paraboloideos (antenas parabólicas).

- Elipse. La relación que define una elipse es,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.4)$$

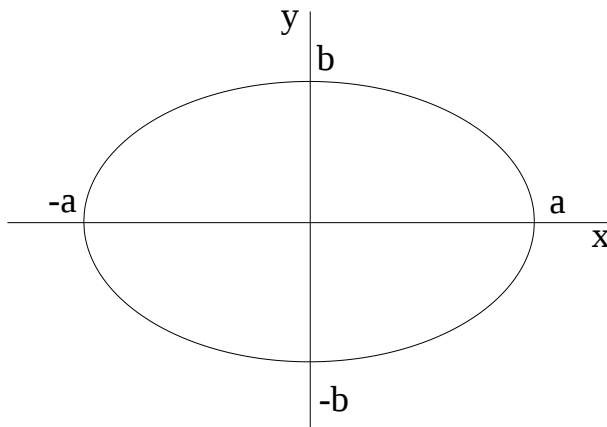


Figura 4.3: Representación gráfica de la elipse de ecuación (4.4).

Las trayectorias de los planetas del sistema solar alrededor del Sol son elipses, en general un objeto orbitando alrededor de otro describe una trayectoria elíptica.

- Hipérbola. La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.5)$$

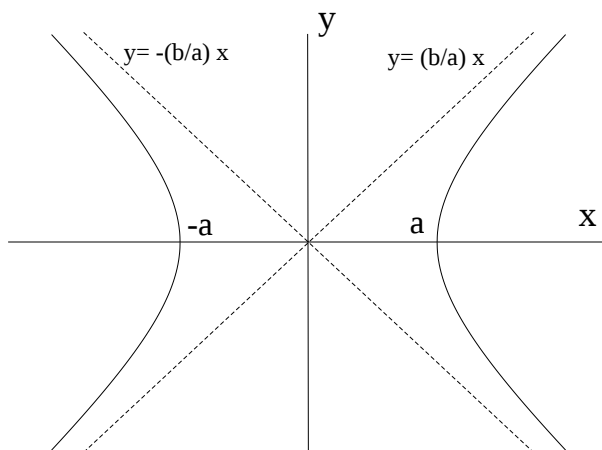


Figura 4.4: Representación gráfica de la hipérbola definida por la ecuación 4.5.

Si lanzamos un objeto con velocidad suficiente como para que no quede atrapado en el campo gravitatorio del Sol, tendremos que describirá una hipérbola.

4.1.2 Secciones cónicas. Definiciones geométricas.

¿Por qué se denominan cónicas?, básicamente porque se pueden obtener mediante la intersección de un plano y un cono. Dependiendo del ángulo de corte entre la normal al plano y el eje del cono tendremos los distintos tipos de cónicas como se puede ver en la figura 4.5.

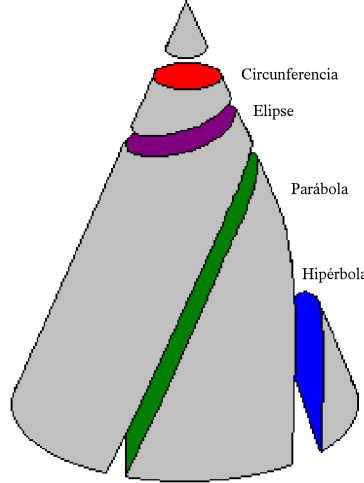


Figura 4.5: Secciones cónicas (sacada de wikipedia.es).

Definición 4.1: Circunferencia. Conjunto de puntos del plano (x, y) tales que la distancia entre (x, y) y el centro (a, b) es igual a r .

$$\begin{aligned} P \equiv (x, y) \quad C \equiv (a, b) \quad \text{dist}(P, C) &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \\ \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Definición 4.2: Parábola. Conjunto de puntos del plano (x, y) equidistantes de un punto fijo F , llamado foco, y de una línea recta fija, directriz.

Si escogemos los ejes de coordenadas del siguiente modo (ver figura 4.6) :

- origen de coordenadas, 0: el vértice, con el eje x paralelo a la directriz.
- eje y sobre el eje de la parábola. Si $F = (0, p)$ entonces $y = -p$ es la directriz.

Sea un punto $P = (x, y)$ de la parábola,

- distancia de P al foco F , $|PF| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$
- distancia de P a la directriz, $|P_{\text{directriz}}| = |y+p|$

por lo tanto:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \quad (4.7)$$

elevando al cuadrado:

$$x^2 + (y-p)^2 = x^2 + y^2 + p^2 - 2py \stackrel{?}{=} (y+p)^2 = y^2 + 2py + p^2 \quad (4.8)$$

por lo que

$$x^2 = 4yp. \quad (4.9)$$

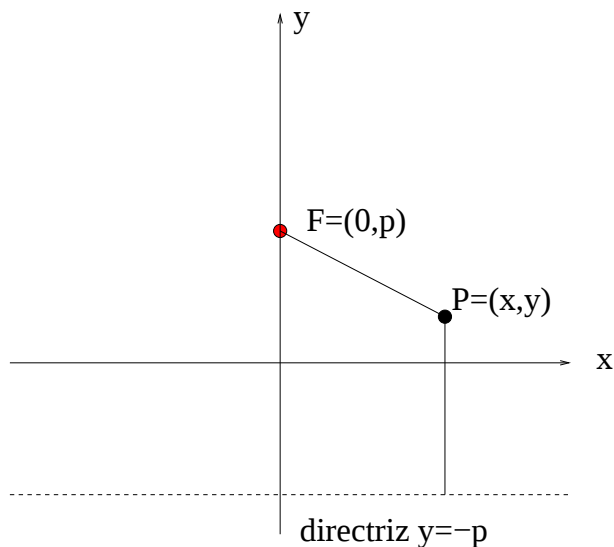


Figura 4.6: Parábola como lugar geométrico, definida mediante un foco, F , y una directriz.

Si llamamos $a = \frac{1}{4p}$ tenemos la ecuación habitual de la parábola, $y = ax^2$. Nótese que esta parábola es simétrica respecto al eje y , $y = ax^2 = a(-x)^2$.

Un buen ejercicio consiste en representar gráficamente parábolas con $p > 0$ con $p < 0$, y parábolas donde x e y estén invertidos.

Ejemplos de la vida diaria son, entre otros, las antenas parabólicas y los tiros parabólicos, $y = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$.

Definición 4.3: Elipse. Conjunto de puntos del plano (x, y) tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Si elegimos los ejes de coordenadas de manera conveniente (ver figura 4.7):

- los focos sobre el eje x : $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$.
- el origen de coordenadas equidistante de los focos

Denominemos $2a > 0$ a la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos,

$$\begin{aligned}
 |PF_1| + |PF_2| &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
 \text{entonces} \\
 (x-c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\
 x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\
 a^2 + cx &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
 a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
 (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) > 0.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Si definimos $b^2 = a^2 - c^2$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 & \begin{array}{l} \text{focos : } (\pm c, 0) \\ c^2 = a^2 - b^2 \\ \text{vértices : } (\pm a, 0) . \end{array}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

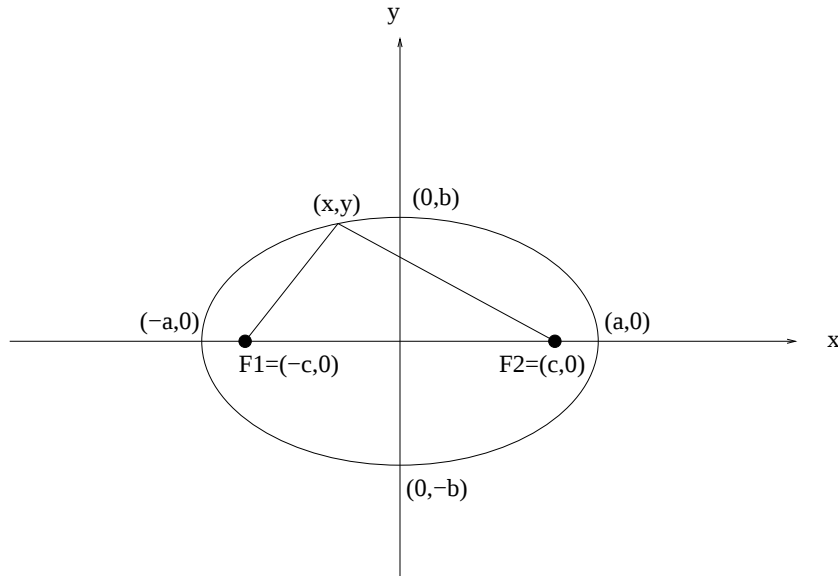


Figura 4.7: Elipse como lugar geométrico, definida mediante dos focos.

podemos ver que la elipse es simétrica respecto del eje x y del eje y , como se puede ver al pasar de $y \rightarrow -y$ y $x \rightarrow -x$ respectivamente.

Ejemplo 4.1: Un ejemplo sencillo, $9x^2 + 16y^2 = 144$,

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1 \quad (4.12)$$

que es:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad (4.13)$$

de donde $a = 4$, $b = 3$, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$.

Definición 4.4: Hipérbola. Conjunto de puntos del plano (x,y) tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, focos, es constante.

Escojamos los ejes de coordenadas del siguiente modo,

- eje x , pasa por los focos
- eje y equidistante de ambos.

Entonces la ecuación de la hipérbola es,

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a. \quad (4.14)$$

Podemos repetir el álgebra que hemos utilizado para la elipse, y llegaremos a,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{focos : } (\pm c, 0) \\ c^2 = a^2 + b^2 \\ \text{vértices : } (\pm a, 0) \\ \text{asíntotas : } y = \pm b/ax. \end{array} \quad (4.15)$$

- **Cónicas desplazadas**

Si aplicamos una translación a las ecuaciones que hemos estudiado, $x \rightarrow x - h$, $y \rightarrow y - k$, obtenemos las cónicas desplazadas del origen $(0, 0)$ al punto (h, k) .

4.1.3 Cónicas en coordenadas polares

Hasta ahora hemos definido:

- La parábola en términos de un foco y una directriz.
- La hipérbola y la elipse en términos de dos focos.

Ahora unificaremos la descripción de todas las cónicas en términos de un foco y una directriz. Además, veremos que si situamos el foco en el origen, la sección cónica tiene una ecuación sencilla en coordenadas polares.

Teorema 4.1: Sea F un punto fijo (denominado **foco**) y l una línea recta fija (denominada **directriz**) sea $e \in \mathbb{R}^+$ un número fijo, denominado **excentricidad**. El conjunto de puntos del plano, P , tales que:

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e \quad (4.16)$$

es una cónica y:

- si $e < 1 \Rightarrow$ *elipse*
- si $e = 1 \Rightarrow$ *parábola*
- si $e > 1 \Rightarrow$ *hipérbola*

Demostración.

- $e = 1$

En este caso tenemos la definición geométrica de parábola, con lo que no habría nada más que demostrar.

- $e \neq 1$

En coordenadas polares tendremos,

$$\begin{aligned} |PF| &= r \\ |Pl| &= d - r \cos \theta \\ \text{entonces} \\ \frac{|PF|}{|Pl|} &= e \Rightarrow \frac{r}{d - r \cos \theta} = e, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$r = e(d - r \cos \theta). \quad (4.18)$$

Se puede comprobar que esta definición coincide con la que teníamos en cartesianas,

$$\begin{aligned}
 r^2 &= e^2(d - r \cos \theta)^2 \\
 x^2 + y^2 &= e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx - x^2) \\
 (1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 &= e^2d^2 \\
 x^2 + \frac{2de^2x}{1 - e^2} + \frac{1}{1 - e^2}y^2 &= \frac{e^2d^2}{1 - e^2} \\
 \text{completamos cuadrados} \\
 x^2 + \frac{2de^2x}{1 - e^2} + \left(\frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 - \left(\frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - e^2}y^2 &= \frac{e^2d^2}{1 - e^2} \\
 \left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} &= \frac{de^2}{1 - e^2} \left(d + \frac{de^2}{1 - e^2}\right) \\
 \left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} &= \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

que se puede escribir como,

$$\frac{\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}} = 1. \tag{4.20}$$

a) $e < 1$ ($\Rightarrow 1 - e^2 > 0$)

La ecuación 4.20 puede entonces escribirse como:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.21}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 h &= -\frac{e^2d}{1 - e^2} < 0, \\
 a^2 &= \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} > 0, \\
 b^2 &= \frac{e^2d^2}{1 - e^2} > 0,
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

que es la ecuación de una elipse centrada en $(h, 0)$. Los focos están a una distancia c del centro de la elipse, $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2} > 0$, de donde, $c = -h > 0$. Con lo que vemos que el foco definido en el teorema coincide con el foco de la definición geométrica. La excentricidad, e , se puede calcular como

$$e = \frac{c}{a}. \tag{4.23}$$

b) $e > 1$ ($\Rightarrow 1 - e^2 < 0$)

En este caso la ecuación 4.20 se corresponde con la de una hipérbola con,

$$\begin{aligned}
 h &= -\frac{e^2d}{1 - e^2} > 0, \\
 a^2 &= \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} > 0, \\
 b^2 &= -\frac{e^2d^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{e^2 - 1} > 0.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Podemos calcular c , $c^2 = a^2 + b^2 = \dots = h$ como debía ser. Además podemos comprobar que $e = c/a$.

c.q.d.

Hemos probado el teorema para los tres casos reconociendo los tres tipos de cónicas, parábolas, elipses e hipérbolas, respectivamente. Para eso hemos reescrito la ecuación en polares en función de coordenadas cartesianas, ahora volvamos a la forma polar.

$$r = e(d - r \cos \theta) \Rightarrow r(1 + e \cos \theta) = ed \quad (4.25)$$

por lo que la condición que debe satisfacer un punto cualesquiera (r, θ) para pertenecer a la cónica es:

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \quad (4.26)$$

En general, la excentricidad, $e = c/a$. Podemos generalizar el estudio a otros casos, por ejemplo:

- Si la directriz está a la derecha, $x = d$,

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \quad (4.27)$$

- Si la directriz está a la izquierda, $x = -d$

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} \quad (4.28)$$

- Si la directriz es paralela al eje x , $y = \pm d$,

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta} \quad (4.29)$$

La **Circunferencia** se puede pensar como un caso especial de la elipse en el que $c = 0$, es decir, donde los dos focos coinciden. En polares,

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \quad \text{pero } e = c/a = 0. \quad (4.30)$$

¿Cómo se reconcilia esto con la ecuación de la circunferencia en polares que es claramente $r = \text{cte}$?

Necesitamos que $d \rightarrow \infty$ de tal modo que el producto: $ed \rightarrow \text{cte}$.

4.2 Límite de una función

Definición 4.5: Sea una función $y = f(x)$ definida en un cierto dominio $A \subset \mathbb{R}$, y sea p un punto de acumulación de A , que puede o no pertenecer a A . Sea $b \in \mathbb{R}$ un punto que puede pertenecer o no al recorrido de la función.

La función $y = f(x)$ **tiende al límite** b (se escribe: $y \rightarrow b$) cuando x tiende a p (se escribe $x \rightarrow p$), lo que se escribe como:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b \quad (4.31)$$

si $\forall \varepsilon > 0$ (por pequeño que sea), $\exists \delta > 0$ | $\forall x \stackrel{(x \neq p)}{\in} A$ que satisfaga $|x - p| < \delta$, se verifica la desigualdad,

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \quad (4.32)$$

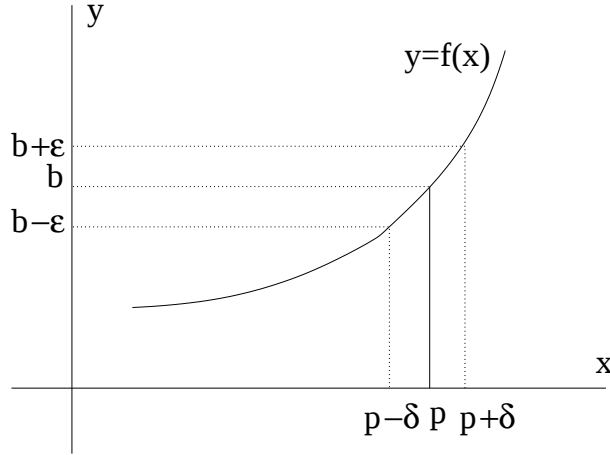


Figura 4.8: Representación gráfica del concepto de límite.

Dicho con otras palabras,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad | \quad \text{si } x \in B_0(p, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_0(b, \varepsilon). \quad (4.33)$$

Nota:

- p ha de ser un punto de acumulación, pero no es necesario que $p \in A$.
- Tampoco es necesario que b pertenezca al recorrido de $f(x)$, ver figura 4.9.

Gráficamente se puede ver en la figura 4.8.

Ejemplo 4.2: Probar que:

$$\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5 = 7. \quad (4.34)$$

Consideremos cualquier $\varepsilon > 0$,

$$|f(x) - 7| < \varepsilon \Rightarrow |4x - 5 - 7| < \varepsilon \Rightarrow 4|x - 3| < \varepsilon \quad (4.35)$$

con lo que si consideramos sencillamente un $\delta = \varepsilon/4$ tendremos que

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ cogiendo } \delta = \varepsilon/4 \Rightarrow |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon \quad (4.36)$$

que era lo que necesitábamos probar.

Ejemplo 4.3: Probar que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4. \quad (4.37)$$

La función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ no está definida en $x = 2$, esto no supone ningún problema ya que para definir el límite sólo necesitamos que esté definida para valores tan cercanos a 2 como queramos, como es el caso. Necesitamos demostrar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad | \quad$ se satisface:

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon \quad \text{si : } |x - 2| < \delta. \quad (4.38)$$

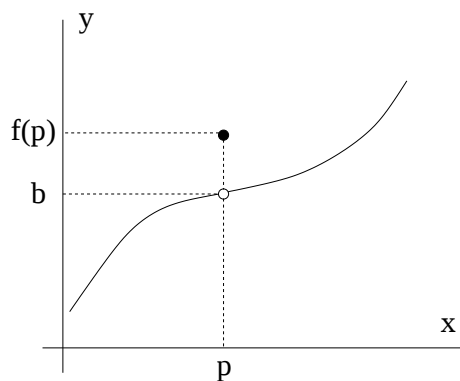


Figura 4.9: El límite no tiene por qué pertenecer al recorrido de f .

Pero, si

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} - 4 \right| = |x + 2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \varepsilon \quad (4.39)$$

con lo que basta un $\delta = \varepsilon$ para que se verifique, con lo que existe el límite de la función en el punto, $x=2$, y es igual a 4.

Definición 4.6: La función $f(x)$ **tiende al límite** b cuando $x \rightarrow \infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad | \quad \forall x > N \quad (4.40)$$

se satisface:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad (4.41)$$

y se denota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b. \quad (4.42)$$

Definición 4.7: La función $f(x)$ **tiende a** ∞ cuando $x \rightarrow a$ si

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad \forall x \neq a \text{ con } |x - a| < \delta \quad (4.43)$$

se tiene que

$$|f(x)| > M \quad (4.44)$$

y se denota,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \quad (4.45)$$

Si la función tiende a infinito sólo tomando valores positivos (en la definición anterior cambiando $|f(x)| > M$ por $f(x) > M$) se escribe,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty. \quad (4.46)$$

Análogamente se puede construir la definición de,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. \quad (4.47)$$

Ejemplo 4.4: Probar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (4.48)$$

Veamos, si $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x)| = \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} > M$ si

$$\delta^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow \delta < \frac{1}{\sqrt{M}}. \quad (4.49)$$

Así pues dado cualquier $M > 0$, tenemos que si $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ se cumple que si $|x| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

Ejemplo 4.5:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \quad (4.50)$$

con lo que,

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x| > 1/\varepsilon \quad (4.51)$$

Por tanto si escogemos $N = \frac{1}{\varepsilon}$ tenemos que se satisface la desigualdad para cualquier $|x| > N$.

4.2.1 Límites laterales

Definición 4.8: *Límite por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto a . $f(x)$ tiende a b_1 cuando $x \rightarrow a^-$, si se cumple:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad | |f(x) - b_1| < \varepsilon \quad \text{si } a - \delta < x < a \quad (4.52)$$

y se escribe,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1. \quad (4.53)$$

Definición 4.9: *Límite por la derecha de la función $f(x)$ en el punto a . $f(x)$ tiende a b_2 si $x \rightarrow a^+$ si se cumple,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad | |f(x) - b_2| < \varepsilon \quad \text{si } a < x < a + \delta \quad (4.54)$$

y se escribe,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2. \quad (4.55)$$

Definición 4.10: *Existe el límite de la función $f(x)$ en el punto a si y sólo si:*

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b. \quad (4.56)$$

4.2.2 Funciones acotadas; monótonas

Definición 4.11: *Se dice que la función $f(x)$ está acotada en el dominio de definición de la variable x , A , si,*

$$\exists M > 0 \quad | |f(x)| \leq M \quad \forall x \in A. \quad (4.57)$$

Si no existe tal M la función no está acotada en el dominio.

- La función $f(x)$ está acotada cuando $x \rightarrow a$ si

$$\exists \delta > 0 \quad | |f(x)| < M \quad \text{si } x \in B(a, \delta). \quad (4.58)$$

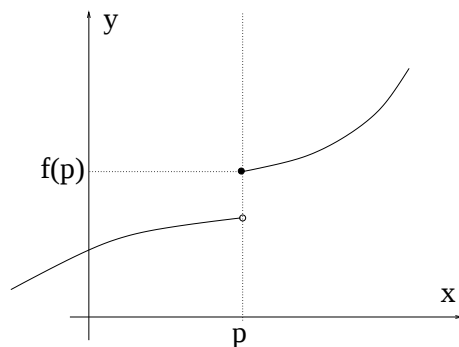


Figura 4.10: Los límites por la izquierda y la derecha pueden existir y no coincidir, entonces $\nexists \lim_{x \rightarrow p} f(x)$.

- La función $f(x)$ está acotada cuando $x \rightarrow \infty$ si

$$\exists N > 0 \quad | \quad \forall |x| > N \quad f \text{ está acotada.} \quad (4.59)$$

Definición 4.12: Se dice que la función $f(x)$ es monótona creciente si:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{si } x_1 \leq x_2. \quad (4.60)$$

4.3 Infinitésimos

Definición 4.13: La función $\alpha(x)$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow a$ si,

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0. \quad (4.61)$$

Definición 4.14: La función $\alpha(x)$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow \infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0. \quad (4.62)$$

Ejemplo 4.6:

- $(x - 1)^2$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow 1$.
- $1/x$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow \infty$.

Teorema 4.2: Si la función $f(x)$ se puede expresar como la suma de un número b y de un infinitésimo cuando $x \rightarrow a$, $\alpha(x)$, entonces

$$f(x) = b + \alpha(x) \quad (4.63)$$

tenemos,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (4.64)$$

recíprocamente, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ entonces se puede escribir, $f(x) = b + \alpha(x)$ con $\alpha(x)$ infinitésimo cuando $x \rightarrow a$.

Análogamente para $\lim_{x \rightarrow \infty}$.

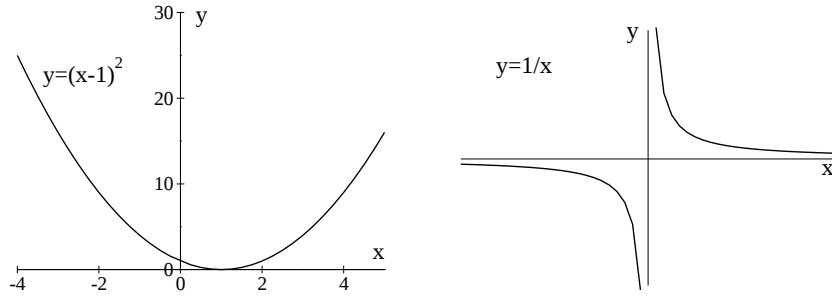


Figura 4.11: Infinitésimo en $x \rightarrow 1$ (izquierda), e infinitésimo en $x \rightarrow \infty$ (derecha).

Demostración. Consideremos los dos casos, $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$:

($\Rightarrow$)

$$f(x) = b + \alpha(x) \Rightarrow |f(x) - b| = |\alpha| \quad (4.65)$$

pero sabemos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$ lo que implica que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \quad (4.66)$$

($\Leftarrow$) Definimos $\alpha(x) = f(x) - b$, entonces se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \quad |f(x) - b| < \varepsilon \quad \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon. \quad (4.67)$$

c.q.d.

Teorema 4.3: Si $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ pero se tiene que $\alpha(x) \neq 0$ para $x \neq a$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty. \quad (4.68)$$

Demostración.

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad |0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |\alpha(x)| < \varepsilon \quad (4.69)$$

definimos,

$$M = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad |0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |1/\alpha(x)| > M. \quad (4.70)$$

c.q.d.

4.3.1 Propiedades de los infinitésimos

- La suma finita de infinitésimos es un infinitésimo

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha_k(x) = 0 \quad (4.71)$$

entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0. \quad (4.72)$$

- El producto de un infinitésimo en $x \rightarrow a$ por una función acotada en un entorno de a también es un infinitésimo cuando $x \rightarrow a$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \\ |f(x)| < M \quad \forall x \in B(a, r) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot f(x) = 0. \quad (4.73)$$

- Si $\alpha(x)$ es infinitésimo cuando $x \rightarrow a$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$ entonces,

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} \quad (4.74)$$

es infinitésimo.

4.3.2 Comparación de infinitésimos

Dados dos infinitésimos, $\alpha(x), \beta(x)$, $x \rightarrow a$

- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = A = \text{finito} \neq 0$, se denominan **infinitésimos del mismo orden**.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, se denominan **infinitésimos equivalentes**, $\alpha \sim \beta$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, entonces $\beta(x)$ es un **infinitésimo de orden superior** a $\alpha(x)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)^k} = A = \text{finito} \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\beta(x)$ es un **infinitésimo de orden k** respecto de $\alpha(x)$.

Teorema 4.4: $\alpha(x), \beta(x)$ son infinitésimos equivalentes $\Leftrightarrow \alpha - \beta$ es un infinitésimo de orden superior respecto de α y β .

Demostración.

$(\Rightarrow) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta - \alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) = 1 - 1 = 0$ y $\beta - \alpha$ es de orden superior a β (del mismo modo se podría hacer para α).

$(\Leftarrow) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta - \alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$.

c.q.d.

Ejemplo 4.7:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 16x}{x} = 16$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\sin x} = 4$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$ x^3 es infinitésimo de orden 3 respecto de x .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- Notación: $\alpha = x + O(x^3)$.

4.4 Teoremas fundamentales sobre límites

Teorema 4.5: Sean $f(x), g(x)$ funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$ y con los siguientes límites,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b. \quad (4.75)$$

Se tiene:

(1) suma (resta)

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b. \quad (4.76)$$

(2) producto

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b. \quad (4.77)$$

(3) cociente (si $b \neq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}. \quad (4.78)$$

(4) potencia

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow p} f(x)]^n \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.79)$$

Demostración. Probemos a modo de ejemplo el caso (2), veamos, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} f(x) = a &\Rightarrow f(x) = a + \alpha(x) \text{ con } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b &\Rightarrow g(x) = b + \beta(x) \text{ con } \lim_{x \rightarrow b} \beta(x) = 0, \end{aligned} \quad (4.80)$$

por tanto,

$$f(x) \cdot g(x) = ab + a\beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x) \quad (4.81)$$

pero la segunda parte son infinitésimos, $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = ab$.

c.q.d.

4.4.1 Cálculo explícito de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

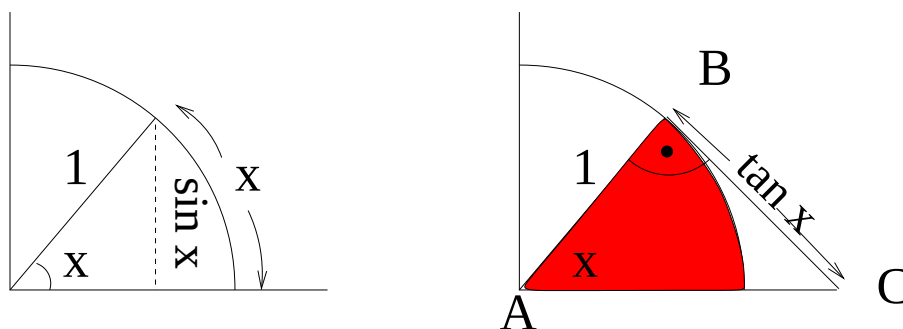
Probemos primero el siguiente teorema.

Teorema 4.6: Dadas tres funciones $f(x), g(x), h(x)$ tales que,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (4.82)$$

y cumpliendo que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$,

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b. \quad (4.83)$$

Figura 4.12: Relación entre x , $\sin x$ y $\tan x$.

Demostración. Tenemos como hipótesis que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow p} f(x) = b &= \lim_{x \rightarrow p} h(x) \\
 &\Rightarrow \\
 \forall \varepsilon \exists \delta_1, \delta_2 \quad & \text{si} \quad |x - p| < \delta_1 \quad | & |f(x) - b| < \varepsilon \\
 & |x - p| < \delta_2 \quad | & |h(x) - b| < \varepsilon \\
 \text{sea } \delta &= \min(\delta_1, \delta_2) \\
 &\Rightarrow \\
 -\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon & \quad -\varepsilon < h(x) - b < \varepsilon \\
 &\Rightarrow \\
 -\varepsilon < f(x) - b \leq g(x) - b \leq h(x) - b < \varepsilon. & \quad (4.84)
 \end{aligned}$$

c.q.d.

La función, $\frac{\sin x}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$, sin embargo vamos a ver que existe el límite y es 1.

Teorema 4.7:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4.85)$$

Demostración. (geométrica) Si consideramos, $0 < x < \pi/2$, tenemos siempre que (ver figura 4.12) :

$$\sin x \leq x. \quad (4.86)$$

Observemos ahora además que $x \leq \tan x$ en el mismo intervalo (notar, que el área del triángulo ABC es $(\tan x)/2$ y siempre es mayor que la sección de círculo (en rojo), cuyo área es $x/2$, ver figura 4.12) , con lo que,

$$\sin x \leq x \leq \tan x \Rightarrow \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad (4.87)$$

de donde (lo que ilustramos en la fig 4.13),

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x. \quad (4.88)$$

Inigualdad que también es válida en $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ ya que $\sin(x) = -\sin(-x)$ y $\cos(-x) = \cos x$. Pero entonces tomando límites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \Rightarrow 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1 \quad (4.89)$$

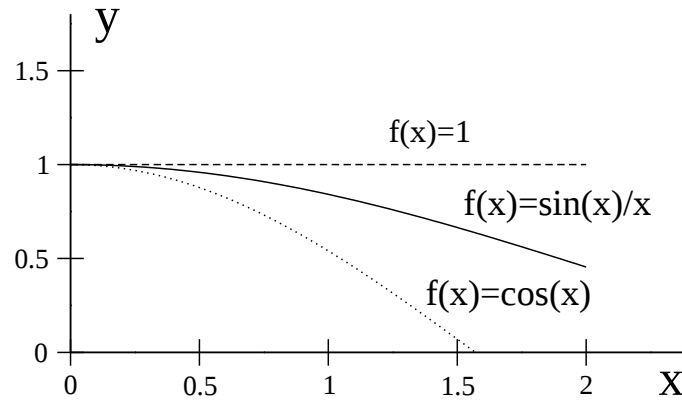


Figura 4.13: Las funciones $\sin x/x$, $\cos x$, 1, cerca del 0.

de donde el teorema 4.6 nos asegura que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (4.90)$$

c.q.d.

4.5 Continuidad

Definición 4.15: (Continuidad) $f(x)$ es **continua en el punto** $x = a$ si se cumplen simultáneamente:

- (1) $f(x)$ está definida en un entorno de a : $B(a, \delta)$, que incluye el punto a ($a \in A$, dominio de f) (a no es un punto aislado).
- (2) $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y es finito, y coincide con $f(a)$,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (4.91)$$

Definición 4.16: (Definición alternativa de continuidad:) Suponemos $f(x)$ definida en x_0 y en un entorno $B(x_0, r)$, sea $y_0 = f(x_0)$. Consideremos un punto $x_0 + \Delta x \in B(x_0, r)$, entonces la función será: $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, donde formalmente lo único que hemos hecho es definir:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (4.92)$$

La función $f(x)$ es **continua en el punto** $x = x_0$ si está definida en un entorno de x_0 (incluido x_0) y si,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (4.93)$$

que se puede expresar como

- (1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definición 4.17: Una función es continua en un intervalo (a, b) si lo es en cada uno de los puntos del intervalo.

Teorema 4.8: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en x_0 con $g(x_0) \neq 0$ y sean α y μ dos números reales cualesquiera, se tiene que,

- $\alpha f(x) + \mu g(x)$ es también continua en x_0 .
- $f(x)/g(x)$ es también continua en x_0 .
- $f(x) \cdot g(x)$ es también continua en x_0 .

Demostración. La demostración es sencilla, léase factible, a la vista de la propia definición de continuidad y de las propiedades de los límites. c.q.d.

4.5.1 Discontinuidades

$f(x)$ es **discontinua** en el punto x_0 si no es continua, lo que puede ocurrir:

- (i) Si $f(x_0)$ no está definida.
- (ii) Si $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (o es infinito).
- (iii) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Existen varios tipos de discontinuidad

- Discontinuidad evitable

Se dice si $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$, para evitarla se podría redefinir $f(a)$ como $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

- Discontinuidad inevitable (esencial)

- De salto: $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ pero no son iguales.
- Oscilantes, cuando no existen uno o ambos límites laterales.
- Infinita, cuando uno o ambos límites laterales son $\pm\infty$.

En las figuras 4.14, 4.15 se muestran ejemplos.

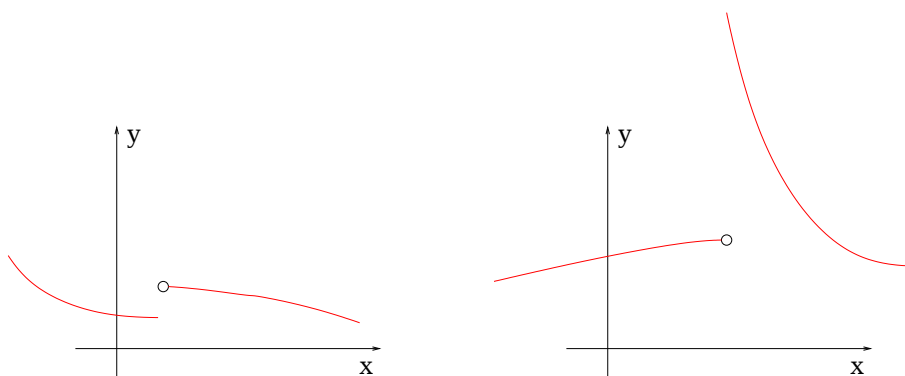


Figura 4.14: Dos tipos de discontinuidad esenciales, de salto (izquierda) e infinita (derecha).

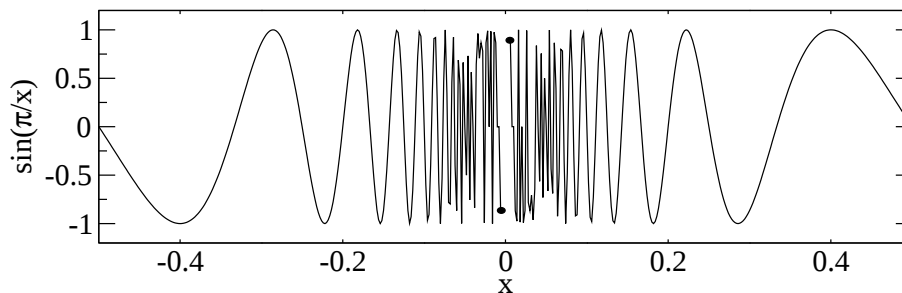


Figura 4.15: El tercer tipo de discontinuidad esencial: oscilante.

4.5.2 Funciones continuas en un intervalo

Definición 4.18: Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el intervalo $[a, b]$ si satisface las siguientes condiciones,

i) Si es continua en x , $\forall x \in (a, b)$.

ii) Es continua por la derecha en a , esto lo definimos como:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (4.94)$$

iii) Es continua por la izquierda en b ,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad b - \delta < x < b \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon. \quad (4.95)$$

4.5.3 Propiedades de las funciones continuas en un intervalo

Teorema 4.9: Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ al menos un punto } x_1 \in [a, b] & | \quad f(x) \leq f(x_1) \equiv M \quad \forall x \in [a, b]. \\ \exists \text{ al menos un punto } x_2 \in [a, b] & | \quad f(x) \geq f(x_2) \equiv m \quad \forall x \in [a, b]. \end{cases} \quad (4.96)$$

M es el valor máximo de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y m es el valor mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

No demostraremos el teorema, sin embargo la interpretación geométrica es sencilla.

Nota: Es importante que el dominio sea cerrado, de no ser así f podría ser continua y acotada y no tener máximo, un ejemplo, $f(x) = x$ en el intervalo $(0, 1)$.

Teorema 4.10: Teorema de Bolzano: Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y es tal que

$$f(a)f(b) < 0 \quad (4.97)$$

entonces se tiene que $\exists$ como mínimo un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Nota: La interpretación gráfica es de nuevo sencilla. Nótese que una posible demostración constructiva podría pensarse subdividiendo el intervalo $[a, b]$ sucesivas veces manteniendo siempre que en los extremos de los nuevos intervalos de menor tamaño se tenga que la función cambia de signo. Habría que probar que la intersección de todos esos conjuntos no es vacía, y es de hecho un punto. Así, se puede ir acotando la zona en la que la función cambia de signo y por tanto, al ser continua, donde cruza al cero.

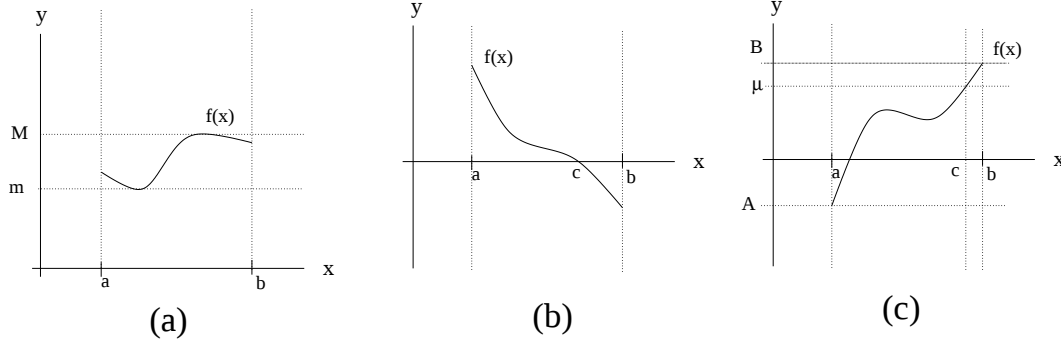


Figura 4.16: Ilustración de los tres teoremas para funciones continuas en un intervalo $[a, b]$. (a) Existencia de máximo y mínimo, (b) Teorema de Bolzano y (c) Teorema del valor medio.

Teorema 4.11: Teorema del valor medio: Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y es tal que $f(a) = A$ y $f(b) = B$ con $A \neq B$, entonces:

$$\forall \mu \in (A, B) \quad \exists c \in [a, b] \quad | \quad f(c) = \mu. \quad (4.98)$$

Demostración. Aplicar el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - \mu$, supongamos que $A < B$, entonces $A < \mu < B$, se puede ver que, $g(a) = f(a) - \mu < 0$ y además $g(b) = f(b) - \mu > 0$ lo que implica que existe un c tal que

$$g(c) = 0 = f(c) - \mu. \quad (4.99)$$

c.q.d.

En la figura 4.16 se ilustran los tres teoremas.

4.6 Continuidad uniforme

Ahora presentaremos una condición más fuerte que la de continuidad, denominada continuidad uniforme y demostraremos que es equivalente en intervalos cerrados y acotados.

Definíamos continuidad del siguiente modo. Si $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en todos los puntos del dominio A , lo que es equivalente a:

$$\forall a \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad \text{si } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (4.100)$$

En general, a cada ε le corresponderá un número δ que dependerá de ε y también del punto a . Es decir, si la función es continua en su dominio A , no es de esperar que dado un $\varepsilon > 0$, el mismo valor δ sirva para todos los valores del dominio. Pero esto podría ocurrir.

Definición 4.19: Continuidad Uniforme

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **uniformemente continua en A** si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x, x_0 \quad | \quad |x - x_0| < \delta. \quad (4.101)$$

Ejemplo 4.8: $f(x) = 4x$ es uniformemente continua en $A = (0, 1)$.

Dado un $\varepsilon > 0$ si cogemos $\delta = \varepsilon/4$ se tiene,

$$|f(x) - f(x_0)| = 4|x - x_0| < 4\delta = 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \quad (4.102)$$

Ejemplo 4.9: $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua en $A = (0, 1)$.

Consideremos, $\varepsilon = 1$, veamos, para cualquier $\delta > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad | \quad \delta > 1/n > 0$, (ver el Teorema 1.11) así pues si ahora cogemos $x = 1/n$ e $y = 1/(n+1)$ se cumple,

$$|x - y| = |1/n - 1/(n+1)| = 1/(n(n+1)) < 1/n < \delta \quad (4.103)$$

y al mismo tiempo,

$$|f(x) - f(y)| = 1 \geq \varepsilon, \quad (4.104)$$

con lo que es imposible que se satisfagan las premisas de la definición de continuidad uniforme.

Ejemplo 4.10: $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua en $A = (a, 1)$, $1 > a > 0$.

Veamos, dado un $\varepsilon > 0$, basta con coger $\delta = a^2\varepsilon$, entonces vemos que para cualquier x, y tales que $|x - y| < \delta$ se tiene,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} < \frac{|x - y|}{a^2} < \frac{\delta}{a^2} \stackrel{\delta = a^2\varepsilon}{=} \frac{a^2\varepsilon}{a^2} = \varepsilon \quad (4.105)$$

con lo que hemos probado que $\forall x, y \in (a, 1) \quad | \quad |x - y| < \delta$ y $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ con δ dependiente de ε pero no del punto en cuestión dentro del intervalo.

Ejemplo 4.11: $f(x) = x^2$. Esta función es continua en $A = [0, 1]$, ¿será también uniformemente continua dentro de dicho intervalo? Consideremos un $p \in A$ y un $x \in A$,

$$|f(x) - f(p)| = |x^2 - p^2| = |(x - p)(x + p)| < \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq p \leq 1 \end{cases} 2|x - p| < \varepsilon \quad (4.106)$$

así vemos que si escogemos $\delta = \varepsilon/2$ se verifica que

$$|f(x) - f(p)| < 2\delta = 2\varepsilon/2 = \varepsilon, \quad (4.107)$$

cuando $|x - p| < \delta$.

4.6.1 Teorema de Heine Cantor

Teorema 4.12: Sea $f : A \rightarrow B$, sea $S \subset A$ un subconjunto compacto (cerrado y acotado) y supongamos que f es continua en S

$$\Rightarrow \quad (4.108)$$

f es uniformemente continua en S .

Ejemplo 4.12:

- $f(x) = x^2$ en $(0, 1)$ y $[0, 1]$.
- $f(x) = 1/x$ en $(0, 1)$ (no se cumple).

4.7 Cálculo de límites

4.7.1 Resolución de indeterminaciones

Hay límites en los que no es fácil intuir el valor del límite de una función. Un ejemplo sería,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2}) - \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x}) = \infty - \infty \quad (4.109)$$

en tal caso se dice que hay una **indeterminación**. Podríamos recalcularlo del siguiente modo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})} = 0.\end{aligned}\quad (4.110)$$

Las indeterminaciones pueden clasificarse del siguiente modo:

$$\infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 \quad (4.111)$$

1) **Indeterminaciones:** $0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

(son todas equivalentes, basta ver que $0/0 \rightarrow 0 \cdot 1/0 \rightarrow 0 \cdot \infty \dots$)

Se pueden intentar calcular utilizando la **regla de L'Hôpital** que veremos en detalle en la sección 5.8.

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad (4.112)$$

si existe el $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ entonces se cumple que,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4.113)$$

En el caso de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty$ la reescribimos como,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}. \quad (4.114)$$

2) **Indeterminaciones:** $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Se determinan tomando el logaritmo de $f(x)^{g(x)}$ y haciendo después el límite que será del tipo $0 \cdot \infty$, recordando,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (4.115)$$

Ejemplo 4.13: Indeterminación 1^∞

Si

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} &= 1^\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [1 + f(x) - 1]^{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}} \right)^{\frac{1}{f(x)-1}} \right]}_{=e}^{g(x)[f(x)-1]}\end{aligned}\quad (4.116)$$

Donde hemos usado,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}} \right)^{\frac{1}{f(x)-1}} \right] \left[u = \frac{1}{f(x)-1} \right] \lim_{u \rightarrow \infty} (1 + 1/u)^u = e. \quad (4.117)$$

La habríamos transformado en una indeterminación tipo $g(x)[f(x) - 1] = \infty \cdot 0$, que podría ser resoluble, pasando a tener:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty = e^b \quad \text{con } b = \lim_{x \rightarrow a} g(x)[f(x) - 1]. \quad (4.118)$$

Ejemplo 4.14: Varios casos:

(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty. \quad (4.119)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1. \quad (4.120)$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x2^x}{2 + x3^x}\right)^{1/x} &= 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (h(x) - 1)g(x)} \\ h(x) &= \frac{2 + x2^x}{2 + x3^x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ g(x) &= \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \\ &\text{con lo que} \\ \lim_{x \rightarrow 0} (h(x) - 1)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x2^x - 2 - x3^x}{2 + x3^x}\right) \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2^x - 3^x)}{2 + x3^x} \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 3^x)}{2 + x3^x} = \frac{1 - 1}{2} = 0 \end{aligned} \quad (4.121)$$

y así nuestro límite original es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x2^x}{2 + x3^x}\right)^{1/x} = e^0 = 1. \quad (4.122)$$

3) Indeterminaciones $\infty - \infty$

Un ejemplo de este tipo es $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - x)$.

En general puede reescribirse como,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)}{\frac{1}{f(x)}} \quad (4.123)$$

y tratarlas como indeterminaciones tipo $\frac{0}{0}$ (L'Hopital) o $(\infty \cdot 0)$.

CAPÍTULO 5

DERIVADAS

En este tema vamos a estudiar el concepto de derivada de una función, piedra angular del cálculo diferencial. Básicamente, el concepto de derivabilidad de una función en un punto requiere que la función sea “más regular” en ese punto que ser sencillamente continua.

Grosso modo si continua era una función cuyo grafo se podía realizar sin levantar el lápiz del papel, derivable será una función continua que además no tenga cambios *bruscos* de comportamiento. Esto puede reescribirse como que derivables son las funciones que pueden aproximarse localmente por líneas rectas.

Desde el punto de vista físico, o en general de modelización de procesos naturales, la derivada mide el cambio o la variación de la función respecto de la variable. Así si tenemos un móvil, un coche por ejemplo, que recorre una carretera, si medimos el espacio recorrido en función del tiempo, podemos ver que la derivada de la función se corresponde con el concepto de velocidad instantánea. Para medir la velocidad en la práctica tendremos que medir intervalos de tiempo y ver cuanto ha recorrido el móvil en dicho tiempo, así obtendremos medidas medias de la velocidad. El concepto de velocidad instantánea surge cuando hacemos dichos intervalos temporales utilizados para medir muy pequeños, tendentes a cero.

5.1 Derivada de una función en un punto

Definición 5.1: Sea $f(x)$ una función real definida en un intervalo abierto (a, b) , sea $c \in (a, b)$, llamamos **derivada** de $f(x)$ en el punto c al límite siguiente:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad (5.1)$$

si este límite **existe y es finito** se dice que la función $f(x)$ es derivable en el punto c y se denota,

$$f'(c) \equiv \frac{df}{dx}(c). \quad (5.2)$$

Que $f'(c)$ exista quiere decir que:

- $\exists \lim_{x \rightarrow c^\pm} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ y coinciden.
- $f(x) - f(c)$ y $x - c$ son infinitésimos del mismo orden cuando x tiende a c , si $f'(c) \neq 0$.
- **Derivabilidad implica continuidad**, veamos, si $\exists f'(c)$ entonces,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(c)(x - c) = 0 \quad (5.3)$$

de donde, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ que es la definición de función continua en un punto c .

- Una definición de derivada equivalente es¹:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \quad (5.4)$$

Definición 5.2: Si $f(x)$ es derivable para cualquier $c \in (a, b)$ podemos construir una nueva función $f'(c) \quad \forall c \in (a, b) \Rightarrow f'(x)$ definida en todos aquellos puntos en los que f es derivable. Dicha función se denomina **derivada de $f(x)$** .

Esa función podríamos en principio derivarla de nuevo y construir una nueva función $f''(x)$ y en general²,

$$f^{(n)}(x) = \left. \frac{df^{(n-1)}}{dx} \right|_c \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

5.2 Interpretación geométrica de la derivada

Recordemos la definición de derivada:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad (5.6)$$

entonces si x está cerca³ de c podremos escribir,

$$f(x) \approx y = f(c) + f'(c)(x - c) \quad (5.7)$$

que no es más que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto c . Para comprobar esto podemos ver cómo el cociente que define la derivada tiende a la pendiente de la curva en el punto c . En la figura 5.1 vemos dicho ángulo. Utilizando la definición equivalente,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (5.8)$$

podemos observar como al hacer tender h a cero tiende a ser la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto, $\tan \alpha = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Dicho de modo formal

¹Basta considerar $x = c + h$ en la definición 5.1.

²El caso $n = 0$ se define como, $f^{(0)}(x) = f(x)$.

³Rigurosamente, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$.

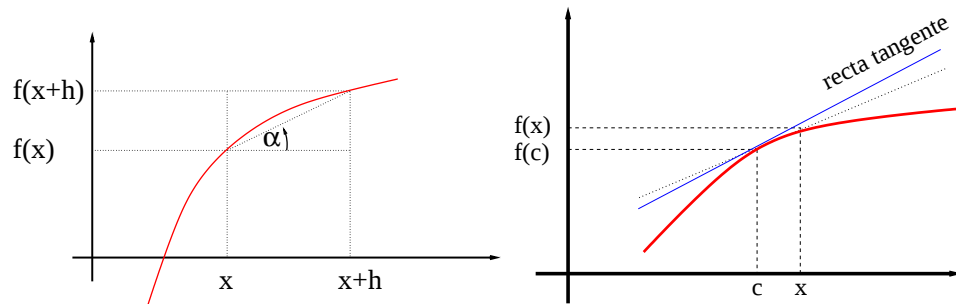


Figura 5.1: Interpretación geométrica. La tangente del ángulo α tiende a $f'(x)$ a medida que h tiende a 0.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon \quad (5.9)$$

con lo que si existe la derivada en c podremos aproximar la función alrededor de c por su recta tangente. Esta aproximación será tanto mejor cuanto más pequeño sea el ε que consideremos, lo que se corresponderá con que cojamos δ también cada vez menores.

Ejemplo 5.1: ¿Existe la derivada en el origen de la función $f(x) = |x|$?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1 \\ &\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

por lo que la función no es derivable en $x = 0$. Así pues no podemos aproximar la función valor absoluto de x por una recta en un entorno del cero, como se puede ver en la figura 5.2, dicha recta sería distinta cerca del cero por la izquierda que cerca del cero por la derecha.

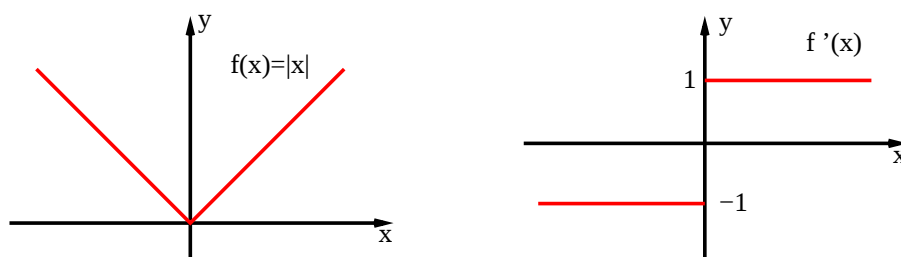


Figura 5.2: La función $f(x) = |x|$ (izquierda) y su derivada (derecha).

5.3 Derivadas de funciones elementales

- $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

lo que es válido $\forall x$

$$f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}. \tag{5.12}$$

Recordemos el binomio de Newton,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} a^{n-i} b^i \tag{5.13}$$

con

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{5.14}$$

- $f(x) = \sin(x)$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
 &\text{recordemos} \\
 \sin a - \sin b &= 2 \cos\left[\frac{1}{2}(a+b)\right] \sin\left[\frac{1}{2}(a-b)\right] \\
 \text{con lo que} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin h/2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \frac{\sin(h/2)}{h/2} \\
 &\stackrel{\sin(x) \sim x, x \rightarrow 0}{=} \cos(x).
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Se escribe,

$$f'(x) = \cos(x) \quad \frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x). \tag{5.16}$$

- $f(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
 &\text{recordemos} \\
 \cos a - \cos b &= -2 \sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right] \sin\left[\frac{1}{2}(a-b)\right] \\
 \text{con lo que} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin h/2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-) \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \frac{\sin(h/2)}{h/2} \\
 &\stackrel{[\sin(x) \sim x, x \rightarrow 0]}{=} -\sin(x).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Teorema 5.1: Sean f y g dos funciones continuas y derivables en $c \in (a, b)$, entonces,

$$\begin{aligned} f + g \\ f \cdot g \\ f/g \quad g(c) \neq 0 \\ \lambda f \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \text{cte}) \end{aligned} \tag{5.18}$$

son también derivables en el punto c y las derivadas vienen dadas por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} (f + g)'(c) &= f'(c) + g'(c) \\ (f \cdot g)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c) \\ (f/g)'(c) &= \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2} \\ (\lambda f)'(c) &= \lambda f'(c). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Demostración.

• **Producto**

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \lim_{x \rightarrow c} g(c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= f(c)g'(c) + f'(c)g(c). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Nótese que el último paso de la demostración puede darse ya que sabemos tanto que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en c como que son derivables en c .

• **Cociente**

Al ser una función continua tenemos que si $g(c) \neq 0$, $\exists B(c, r)$ tal que $g(x) \neq 0$ dentro de dicha bola⁴. En dicha bola se cumple,

$$(1/g)'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1/g(x) - 1/g(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{1}{g(x)g(c)} \frac{g(c) - g(x)}{x - c} \right] = -\frac{1}{g(c)^2} g'(c) \tag{5.21}$$

Una vez probado basta considerar $(f/g)'$ como $(f \cdot 1/g)'$

c.q.d.

Ejemplo 5.2: Utilizar dichas reglas para, por ejemplo, calcular la derivada de $f(x) = \tan x$.

5.4 Regla de la cadena

Teorema 5.2: Sea f una función definida en un intervalo abierto S y sea g una función definida en $f(S)$. Consideremos la **función compuesta**, (ver figura 5.3), $g \circ f$ definida en S a través de la expresión,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{5.22}$$

⁴Esto puede probarse sin mas que considerar un $\varepsilon = g(c)/2$ al aplicar la definición de continuidad en $x = c$.

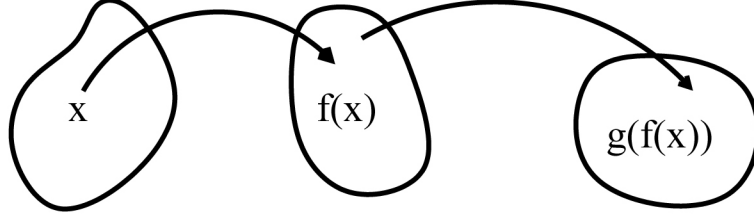


Figura 5.3: Representación de la función compuesta $g(f(x))$.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow f(S) \rightarrow g(f(S)) \\ x &\rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x)) \\ x &\rightarrow g(f(x)). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Entonces se tiene que,

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c), \quad (5.24)$$

o, escrito de otra forma,

$$\frac{d(g \circ f)}{dx} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = g(y) \\ y = f(x) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}. \quad (5.25)$$

Demostración. Veamos, al ser $f(x)$ derivable en c y $g(y)$ derivable en $f(c)$ podemos escribir⁵,

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) &\sim f'(c)(x - c) \\ g(f(x)) - g(f(c)) &\sim g'(f(c))[f(x) - f(c)] \sim g'(f(c))f'(c)(x - c) \end{aligned} \quad (5.26)$$

de donde tenemos que

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c) \sim g'(f(c))f'(c)(x - c) \quad (5.27)$$

lo que quiere decir que

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c) \quad (5.28)$$

c.q.d.

Ejemplo 5.3: Calcular la derivada de:

$$y = \sin(x^2 \cos(x)) \quad (5.29)$$

tendríamos, llamando, $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2 \cos(x)$ que sus derivadas son: $f'(x) = \cos(x)$ y $g'(x) = 2x \cos(x) - x^2 \sin(x)$ entonces la derivada de la función,

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x))g'(x) = \cos(x^2 \cos(x))[2x \cos(x) - x^2 \sin(x)]. \quad (5.30)$$

Recordemos que encontrar la función derivada es un problema bien definido y que es relativamente sencillo de programar, se podrían pensar múltiples métodos de programar un computador para que encuentre la derivada de una función en un punto.

⁵Recordemos que $\alpha(x) \sim \beta(x)$ significa que son infinitésimos equivalentes, en nuestro caso en el punto $x = c$.

5.5 Función inversa; función implícita. Derivadas laterales y diferencial

5.5.1 Función inversa y su derivada

Teorema 5.3: Sea la función $y = f(x)$ continua y biunívoca en $[a, b]$ y derivable en $x_0 \in (a, b)$, entonces se puede definir la función inversa, f^{-1} tal que

$$x \xrightarrow{f} y \quad y \xrightarrow{f^{-1}} x. \quad (5.31)$$

Entonces se tiene que para cualquier $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) \neq 0$ y siendo $y_0 = f(x_0)$, tendremos,

$$(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0). \quad (5.32)$$

Que puede escribirse como,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \quad (5.33)$$

Demostración. La demostración se puede hacer de dos formas,

- A través de la definición⁶:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (5.34)$$

- Utilizando la regla de la cadena

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (5.35)$$

derivando

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x). \quad (5.36)$$

c.q.d.

Ejemplo 5.4: Por ejemplo podría utilizarse para obtener,⁷,

$$(\arcsin(x))' \quad -1 < x < 1 \quad (5.37)$$

sabemos que,

$$(\arcsin(\sin(x)))' = (x)' = 1, \quad (5.38)$$

pero utilizando la regla de la cadena,

$$\arcsin'(\sin(x)) \cos(x) = 1 \Rightarrow \arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} \quad (5.39)$$

si ahora realizamos el cambio de variable,

$$z = \sin(x) \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - z^2} \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (5.40)$$

de donde,

$$(\arcsin(z))' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (5.41)$$

⁶Al ser y continua en x_0 hacer x tender a x_0 es equivalente a hacer y tender a y_0 .

⁷Nótese que en el intervalo considerado la función $\sin(x)$ es biunívoca.

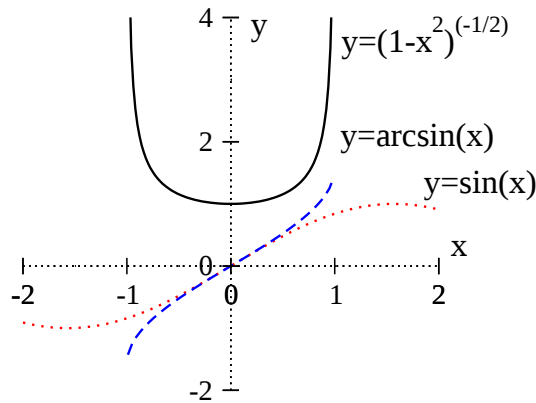


Figura 5.4: Gráfica de la función $\arcsin(x)$, su derivada y la función $\sin(x)$.

5.5.2 Derivada de la función implícita

Supongamos que nos dan una relación del tipo, $F(x, y) = 0$, esto es, tendremos una relación que nos liga los valores de x e y . De tal modo que si fijamos los valores de x los valores de y no serán ya arbitrarios sino que vendrán determinados por dicho x . Así pues dicha relación se dice que define de forma implícita la función $y = f(x)$. En algunos casos la relación puede definir varias funciones, por ejemplo,

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (5.42)$$

es una relación que define de forma implícita las funciones,

$$y_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \quad y_2(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (5.43)$$

No siempre se puede pasar de la forma implícita a la forma explícita, por ejemplo la relación:

$$y - 3x^2 - 3\sin(y) = 0, \quad (5.44)$$

no permite escribir y como función de x , $y = f(x)$, de forma explícita. Sin embargo cualquier función explícita sí que se puede escribir en forma implícita, por ejemplo,

$$f(x) = 4x^2 - \sin(x) \quad (5.45)$$

puede escribirse trivialmente como,

$$y - 4x^2 + \sin(x) = 0. \quad (5.46)$$

La derivada de la función implícita se puede obtener del siguiente modo, por ejemplo, para el caso anterior,

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (5.47)$$

derivando toda la igualdad respecto de x obtendremos,

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow y' = -x/y \quad (5.48)$$

con lo cual en general podemos obtener la derivada de la función implícita como función de x y de y .

Otro ejemplo,

$$y^2 - 4ax = 0 \quad (5.49)$$

derivando tenemos

$$2yy' = 4a \Rightarrow y' = 2a/y = \pm 2a/(2\sqrt{ax}) = \pm \sqrt{\frac{a}{x}}. \quad (5.50)$$

5.5.3 Derivadas laterales e infinitas

Hasta ahora hemos definido la derivada de una función $f(x)$ en un punto c interior al dominio (a, b) ,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{finito}. \quad (5.51)$$

Ahora ampliaremos este concepto para incluir,

- 1) Los extremos del intervalo.
- 2) El caso en el que la recta tangente a la curva sea vertical, el límite será infinito.

Definición 5.3: Derivada Lateral. Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Diremos que f admite **derivada lateral por la derecha** en a si,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv f'_+(a) \exists \text{ y es finito}. \quad (5.52)$$

Análogamente, diremos que f admite **derivada lateral por la izquierda** en b si,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \equiv f'_-(b) \exists \text{ y es finito}. \quad (5.53)$$

Definición 5.4: Derivada infinita. Si $c \in (a, b)$ diremos que tiene derivada infinita ($\Rightarrow$ la recta tangente es vertical):

$$f'(c) = +\infty \quad \text{si} \quad f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty \quad (5.54)$$

(análogamente para $-\infty$).

5.5.4 Diferencial de una función

Veamos, si una función es derivable tenemos,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5.55)$$

llamemos a $\Delta x = h$, y definamos,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x), \quad (5.56)$$

con lo que la derivada es ahora,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (5.57)$$

Entonces seguro que la función $\Delta f/\Delta x$ se puede escribir como, (esto lo vimos en el Teorema 4.2)

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \quad (5.58)$$

con $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Por tanto,

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad (5.59)$$

con lo que hemos escrito Δf como la suma de dos términos, uno de ellos proporcional a Δx y el resto de orden como mínimo $(\Delta x)^2$.

Definición 5.5: Se define el **diferencial de una función**, df , como la parte del incremento que es proporcional a Δx ,

$$df = df(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x. \quad (5.60)$$

Notemos que si $f(x) = x$ tendremos,

$$dx = 1\Delta x \quad (5.61)$$

que se toma como definición del diferencial de la variable independiente dx , por tanto,

$$df = f'(x) dx. \quad (5.62)$$

Nota:

- Entonces utilizando el concepto de diferencial podemos reescribir la regla de la cadena del siguiente modo: $y = f(x)$ y $z = g(y)$,

$$g'(x) = g'(y)f'(x) \quad g'(x) = g'(y)\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx}. \quad (5.63)$$

- Si $f'(x) = 0$ entonces $df(x) = 0$ lo que significa que f no es sensible a cambios infinitesimales de la variable x .

5.6 Análisis de la variación de funciones

5.6.1 Crecimiento, extremos (máximo y mínimo)

Teorema 5.4: Sea f continua y derivable, definida en el intervalo abierto (a, b) , entonces f es localmente monótona creciente en un punto $c \in (a, b)$ si,

$$f'(c) > 0. \quad (5.64)$$

Demostración. Introducimos la función auxiliar, $f^*(x)$, definida como,

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{si } x \neq c \\ f'(c) & \text{si } x = c. \end{cases} \quad (5.65)$$

$f^*(x)$ es continua en (a, b) , entonces al ser $f^*(c) > 0$ se tiene,

$$\Rightarrow \exists B(c, \varepsilon) \subset (a, b) \quad | \quad f^*(x) > 0 \quad \forall x \in B(c, \varepsilon) \quad (5.66)$$

entonces es fácil ver que

$$\begin{aligned} \text{si } x > c &\Rightarrow f(x) > f(c) \\ \text{si } x < c &\Rightarrow f(x) < f(c) \end{aligned} \quad (5.67)$$

por lo que f es monótona creciente. (De igual modo se puede probar que si $f'(x) < 0$ entonces la función es monótona decreciente).

c.q.d.

Definición 5.6: f , definida en $I \subset \mathbb{R}$ tiene un máximo local en el punto a si,

$$\exists B(a, \varepsilon) \subset I \quad | \quad \forall x \in B(a, \varepsilon) \Rightarrow f(x) \leq f(a). \quad (5.68)$$

Definición 5.7: f , definida en $I \subset \mathbb{R}$ tiene un *mínimo local* en el punto a si,

$$\exists B(a, \varepsilon) \subset I \quad | \quad \forall x \in B(a, \varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq f(a). \quad (5.69)$$

Nos referiremos a extremos locales de la función $f(x)$ para englobar tanto máximos como mínimos locales.

Teorema 5.5: Sea f definida en (a, b) , si f tiene un extremo local en el punto $c \in (a, b)$ y f es derivable en c ($\exists f'(c)$ finita),

$$\Rightarrow f'(c) = 0. \quad (5.70)$$

Demostración. Con las condiciones del teorema, si $f'(c) > 0$ hemos probado que sería creciente con lo que no podremos tener un extremo en dicho punto. Análogamente si $f'(c) < 0$ la función sería localmente decreciente y no podría tener un extremo en dicho punto. Así pues, ya que una de las hipótesis es que la derivada exista en dicho punto no queda otra posibilidad que $f'(c) = 0$.

c.q.d.

- El inverso no es cierto. Ejemplo, $f(x) = x^3$, en el intervalo $(-1, 1)$, podemos ver que $f'(0) = 0$, sin embargo la función no tiene ni mínimo ni máximo local en dicho punto.

En la figura 5.5 vemos un ejemplo en el que está indicado explícitamente el signo de la derivada en las distintas regiones.

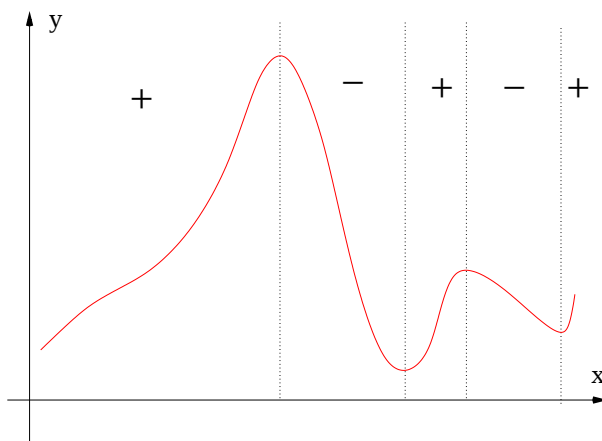


Figura 5.5: Derivadas positivas y negativas indican regiones donde la función crece o decrece respectivamente.

5.7 Teoremas del valor medio para derivadas

5.7.1 Teorema de Rolle

Teorema 5.6: Sea f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y con $f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \quad | \quad f'(c) = 0. \quad (5.71)$$

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$ sabemos que existen M y m que son los valores máximo y mínimo de f en dicho intervalo $[a, b]$, ver sección 4.5.3. Sean c_1 y c_2 pertenecientes a $[a, b]$ cumpliendo, $f(c_1) = M$ y $f(c_2) = m$.

- Si el máximo y el mínimo se encontraran en los extremos del intervalo, entonces, $M = m = f(a) = f(b)$ por lo que la función sería constante en el intervalo, y entonces $f'(c) = 0$ en cualquier $c \in (a, b)$.
- Si uno o ambos, c_1 y c_2 , pertenecen a (a, b) entonces hemos probado que $f' = 0$ en dicho punto.

c.q.d.

Nota: Obsérvese que hemos impuesto derivabilidad en todo (a, b) .

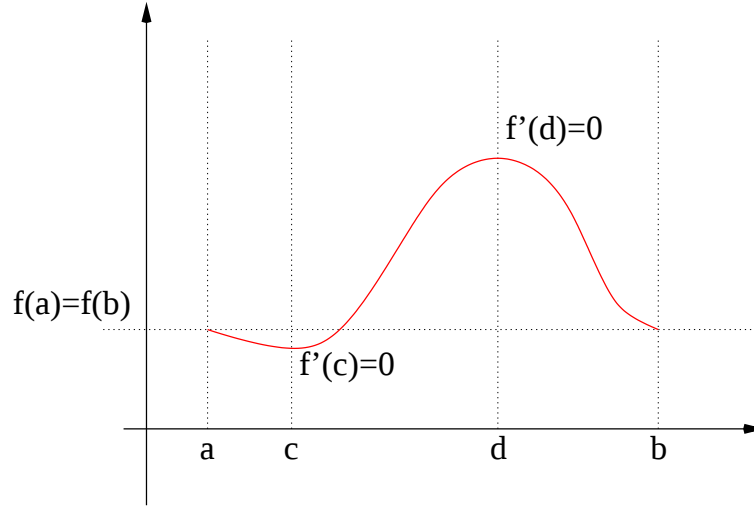


Figura 5.6: Visualización del teorema de Rolle.

5.7.2 Teorema del valor medio generalizado, de Cauchy

Teorema 5.7: Sean f, g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , supongamos que $\nexists x \in (a, b) \mid f'(x), g'(x)$ sean infinitas simultáneamente. Entonces,

$$\exists c \in (a, b) \mid [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \quad (5.72)$$

Demostración. Definimos una función $h(x)$,

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x), \quad x \in [a, b], \quad (5.73)$$

se cumple entonces que $h(a) = h(b)$, y además $h(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por serlo f y g , entonces por el teorema de Rolle, tenemos que

$$\exists c \in (a, b) \mid h'(c) = 0 \Rightarrow [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \quad (5.74)$$

Nota: Con las condiciones del teorema nos aseguramos que $h'(x)$ está definida en (a, b) ya que no puede haber ningún tipo de indeterminación $\infty - \infty$, lo máximo que podría ocurrir es que $h'(x) = \infty$.

c.q.d.

Teorema del valor medio de Lagrange

Teorema 5.8: Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces,

$$\exists c \in (a, b) \quad | \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (5.75)$$

Demostración. Apliquemos el teorema del valor medio generalizado a $f(x)$ y $g(x) = x$. En la figura 5.7 se observan las implicaciones geométricas del teorema. c.q.d.

Ejemplo 5.5: Utilizando el concepto de velocidad media el teorema por ejemplo nos dice que si un vehículo recorre una distancia de 100 km en 1 hora, seguro que en algún punto c del trayecto se tiene que la velocidad instantánea es de 100 km/h.

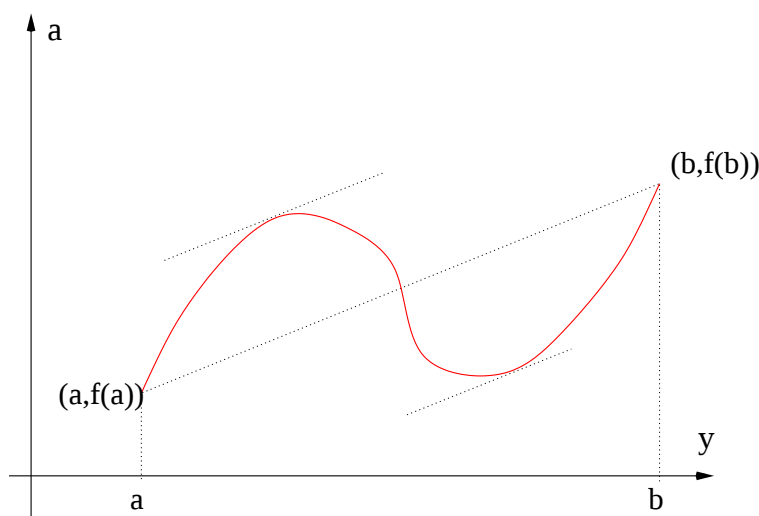


Figura 5.7: Visualización del teorema del valor medio de Lagrange, con las condiciones del teorema existen puntos tales que su pendiente es paralela a la recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.

5.8 Reglas de L'Hopital

En el tema anterior hemos estudiado teoremas que nos permiten obtener límites de funciones y operaciones entre ellos. Vimos como en algunos casos aparecían indeterminaciones. Para resolver algunas de ellas, en la práctica muchas de ellas, citamos la regla de L'Hopital. En esta sección veremos por qué funciona la regla de L'Hopital y cuales son las condiciones necesarias para poder aplicarla.

5.8.1 Regla de L'Hopital

Teorema 5.9: Sean f, g definidas en $[a, b]$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Supongamos que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Si $f(a) = g(a) = 0$ (lo que implica que f y g son infinitésimo en a , ya que son continuas, o sea, que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = f(a) = g(a) = 0$), entonces,

$$\text{si } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.76)$$

Demostración. Estaríamos en las condiciones del teorema 5.7, consideremos un $x \in (a, b)$ y apliquemos el teorema al intervalo $[a, x]$,

$$\exists \xi \in (a, x) \quad | \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (5.77)$$

como $f(a) = g(a) = 0$ nos queda sencillamente,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (5.78)$$

Si ahora tomamos el límite cuando $x \rightarrow a \Rightarrow \xi \rightarrow a$, ya que $a < \xi < x$, por lo que tendremos,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.79)$$

c.q.d.

Nota:

1) La regla también se puede utilizar cuando

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad \text{con } g'(x) \neq 0 \quad \forall x > M \quad (5.80)$$

basta hacer el cambio de variable, $t = \frac{1}{x}$. Recordemos,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \quad | \quad |f(x) - a| < \varepsilon \text{ siempre que } x > M. \quad (5.81)$$

Demostración. Sea $F(t) = f(1/t)$ y $G(t) = g(1/t)$, entonces si $t = 1/x$ tendremos que $F(t)/G(t) = f(x)/g(x)$. Si nuestro límite es en $x \rightarrow +\infty$ entonces $t \rightarrow 0^+$. Consideremos,

$$F'(t) = \frac{-1}{t^2} f'(1/t) \quad G'(t) = \frac{-1}{t^2} g'(1/t) \quad (5.82)$$

con lo que $G'(t) \neq 0$ si $0 < t < 1/M$. Si $x = 1/t$ es $x > M$ entonces se tiene que

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (5.83)$$

ya que el factor $-1/t^2$ se simplifica, con lo que si

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)/g'(x) &= L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} F'(t)/G'(t) = L \\ &\stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t)/G(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x). \end{aligned} \quad (5.84)$$

c.q.d.

2) Si $f(a) = g(a) = 0$ y $f'(a) = g'(a) = 0$ y las funciones f' y g' satisfacen las hipótesis entonces tendríamos,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots \quad (5.85)$$

y se podría generalizar a la derivada n-ésima siempre que se cumplan las hipótesis.

Ejemplo 5.6:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} &= \frac{0}{0} \\
\text{derivamos una vez} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} &= \frac{0}{0} \\
\text{derivamos dos veces} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} &= \frac{0}{0} \\
\text{derivamos tres veces} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} &= 2
\end{aligned} \tag{5.86}$$

por lo que la regla de L'Hopital asegura que,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = 2. \tag{5.87}$$

- 3) La regla también puede aplicarse incluso si las funciones f y g no estuvieran definidas en a , siempre que se cumpla que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- 4) La regla puede extenderse a los casos:
- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.
 - (iii) En ambos casos se tiene que si

$$\exists \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{5.88}$$

- 5) La regla no puede aplicarse si no se tiene una indeterminación. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{6 + 2x} = \frac{7}{10} \neq \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2} = 2. \tag{5.89}$$

Ejemplo 5.7: Un caso en el que queda patente que la no existencia del límite del cociente de las derivadas no implica la no existencia del límite del cociente de las funciones es el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos(x)}{x} \tag{5.90}$$

este límite es fácil de calcular⁸ y es 1. Sin embargo el límite de las derivadas,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin(x)}{1} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) \tag{5.92}$$

que no existe, es oscilante.

⁸Veamos,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\cos(x)}{x} \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x) \frac{1}{x} = 1 \tag{5.91}$$

ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x) \frac{1}{x}$ es el límite de un infinitésimo, $1/x$, por una función acotada, $\cos(x)$.

5.9 Fórmula de Taylor

En esta sección presentaremos una de las propiedades más importantes de las funciones derivables n veces: la posibilidad de aproximar cualquier función en un entorno por un polinomio de grado n . El grado del polinomio está relacionado con el número de veces que la función es derivable.

Recordemos la interpretación geométrica de la derivada, si $f(x)$ es derivable en un punto a de su dominio, podemos aproximar la función en ese punto por la recta tangente a la curva en ese punto, cuya ecuación es:

$$\text{Recta tangente } (x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (5.93)$$

Ahora bien, cabe preguntarse si somos capaces de construir aproximaciones polinómicas de la curva original tales que no sólo tengan la misma tangente en un punto sino también otras derivadas de orden superior. Cuantas más derivadas coincidan mejor será la aproximación.

La idea es encontrar una combinación lineal de funciones del tipo $(x - a)^n$ tales que

$$f(x) \approx \sum_n c_n (x - a)^n. \quad (5.94)$$

Para encontrar dicha combinación lineal tenemos que ser capaces de encontrar los c_n y además poder probar que se trata de una aproximación, de tal modo que la diferencia entre nuestra combinación lineal y la función sea pequeña.

5.9.1 Fórmula de Taylor

Definición 5.8: Si f es una función real diferenciable en (a, b) y $x_0 \in (a, b)$, diremos que la función polinómica $P_n(x)$ es una **aproximación local de grado n de f** en un entorno de x_0 si se verifica,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad (5.95)$$

es decir, la diferencia $f(x) - P_n(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $(x - x_0)^n$ en el punto x_0 .

Ejemplo 5.8: El polinomio de segundo grado, $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$ es una aproximación de segundo orden de la función $f(x) = e^x$ en el origen (ver figura 5.8), ya que,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x + x^2/2)}{x^2} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{2x} \stackrel{L'Hopital}{=} \frac{e^x - 1}{2} = 0. \quad (5.96)$$

Definición 5.9: **Funciones de clase C^n** son funciones derivables n veces en un intervalo (a, b) y con todas las derivadas continuas en el intervalo (a, b) , se escribe

$$f \in C^n((a, b)). \quad (5.97)$$

Definición 5.10: Si f es una función real derivable n veces en (a, b) y $x_0 \in (a, b)$ se denomina **polinomio o desarrollo de Taylor** de f en x_0 al polinomio $T_n(f, x_0)$,

$$T_n(f; x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (5.98)$$

Se cumple que,

$$\begin{aligned} T'_n(f, x_0)(x_0) &= f'(x_0) \\ T''_n(f, x_0)(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(m)}(f, x_0)(x_0) &= f^{(m)}(x_0) \quad \forall m \leq n. \end{aligned} \quad (5.99)$$

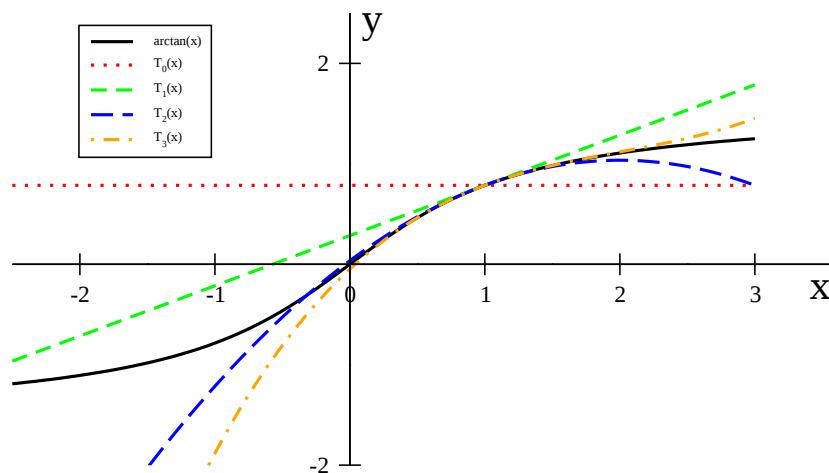


Figura 5.8: Aproximaciones locales de la función arcotangente en el punto $x_0 = 1$; $T_0(x) = \pi/4$, $T_1(x) = T_0(x) + \frac{x-1}{2}$, $T_2(x) = T_1(x) - \frac{(x-1)^2}{4}$ y $T_3(x) = T_2(x) + \frac{(x-1)^3}{12}$.

Teorema 5.10: Si f es una función derivable n veces en (a, b) , con todas sus derivadas continuas, y consideramos un punto $x_0 \in (a, b)$, el polinomio de Taylor de orden n , $T_n(f; x_0)(x)$, es una aproximación local de grado n de f en x_0 .

Demostración. Veamos,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \quad (5.100)$$

si estudiamos el límite de las derivadas k -ésimas, vemos que todas tienen indeterminación $0/0$ excepto la n -ésima, para la que,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0, \quad (5.101)$$

con lo que la regla de L'Hopital nos asegura que,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0. \quad (5.102)$$

c.q.d.

Así hemos probado que el polinomio de Taylor de grado n es una aproximación local de grado n en el punto x_0 . A la función $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ se la denomina **resto** y es el error en la aproximación de $f(x)$ por el polinomio $T_n(x)$ en el punto x .

5.9.2 Teorema de Taylor

Teorema 5.11: Si f es una función de clase C^{n+1} en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y x_0 es un punto del intervalo entonces, para cada $x \in (a, b)$ existe $\xi \in (a, b)$ tal que,

$$f(x) - T_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{\text{Residuo de orden } n \text{ de } f \text{ en } x_0} \quad \text{con } \xi = x_0 + (x - x_0)\theta \quad 0 < \theta < 1 \quad (5.103)$$

donde $T_n(x) \equiv T_n(f; x_0)(x)$.

Nota: La forma de escribir ξ es una forma sintética de escribir que ξ cumple $x < \xi < x_0$ o $x_0 < \xi < x$.

Demostración. Dado el punto $x_0 \in (a, b)$ suponemos fijo el punto x , consideremos que cumplen $a < x_0 < x < b$. Definimos la función de la variable t ,

$$\begin{aligned} \phi(t) = & f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{1}{2!}f''(t)(x-t)^2 \right. \\ & \left. + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right], \quad t \in [x_0, x] \end{aligned} \quad (5.104)$$

que cumple,

$$\phi(x) = 0, \quad \phi(x_0) = f(x) - T_n(x). \quad (5.105)$$

Calculemos la derivada,

$$\begin{aligned} \phi'(t) = & - \left[f'(t) + (-1)f'(t) + f''(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t)(-1) \right. \\ & \left. + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right], \end{aligned} \quad (5.106)$$

se puede observar que al derivar, cada término genera dos términos. Uno de ellos cancela al anterior. Finalmente sólo nos queda un término,

$$\phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \quad t \in [x_0, x]. \quad (5.107)$$

Consideremos ahora la función $g(t)$ definida en $[x_0, x]$, continua en $[x_0, x]$ y derivable en (x_0, x)

$$g(t) = (x-t)^{n+1} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ g(x_0) = (x-x_0)^{n+1} \end{cases} \quad (5.108)$$

así pues podemos aplicar el teorema del valor medio de Cauchy (ver la sección 5.7) que nos asegura que

$$\exists \xi \in (x_0, x) \quad | \quad \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\phi'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (5.109)$$

con lo que si sustituimos los valores que sabemos, $\phi(x) = 0$, $\phi(x_0) = f(x) - T_n(x) \equiv R_n(x)$, $g(x) = 0$, $g(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$,

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (5.110)$$

de donde finalmente,

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad (5.111)$$

Si el punto x estuviera a la izquierda de x_0 podríamos hacer una derivación análoga, con lo que finalmente podremos escribir la **fórmula de Taylor con resto**:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi = x_0 + \theta(x-x_0) \text{ con } 0 < \theta < 1. \quad (5.112)$$

c.q.d.

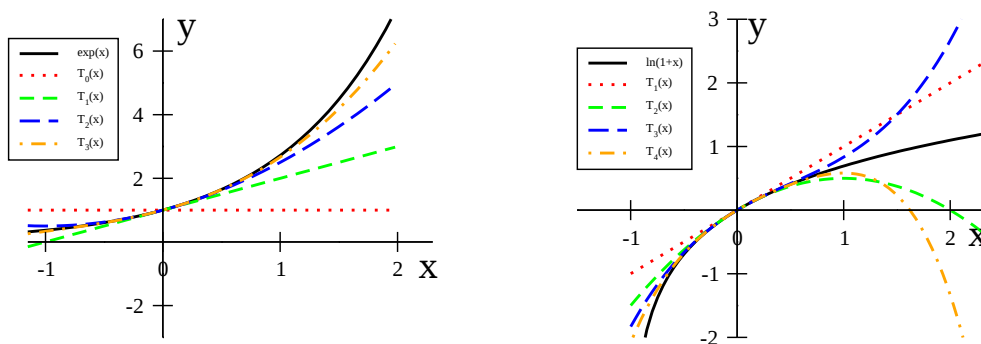


Figura 5.9: Desarrollos de Taylor de las funciones $\exp(x)$, y $\ln(1+x)$ alrededor del punto $x_0 = 0$.

Nota: Hay dos casos particulares que reciben especial atención:

Definición 5.11: Si el punto x_0 es el origen tenemos la **fórmula de Maclaurin**,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (5.113)$$

con $\xi = \theta x$ y $0 < \theta < 1$.

Definición 5.12: (Fórmula de Taylor en notación incremental) Si escribimos el punto en el que calculamos la función como $x = x_0 + h$ tendremos,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots + h^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (5.114)$$

con $0 < \theta < 1$.

5.9.3 Ejemplos de uso

- $f(x) = e^x$

La función es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$, veamos, $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $\dots$, $f^{(n)}(x) = e^x$, de donde $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$, de donde la fórmula de Maclaurin será,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + e^\xi \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (5.115)$$

con $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. En la figura 5.9 comparamos la función exponencial con algunos de sus polinomios de Taylor.

Ejemplo 5.9: Busca el valor del número e con un error menor que 10^{-3} utilizando la fórmula de Maclaurin de la función exponencial.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \underbrace{\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}}_{\text{Residuo}} e^\xi \quad \xi < 1. \quad (5.116)$$

En este caso nos piden que aproximemos el valor de e^x en el punto $x = 1$, $e^1 = e$. Para eso podemos acotar el residuo del siguiente modo. Sabemos que

$$\xi < 1 \Rightarrow e^\xi < e \Rightarrow e^\xi < 3, \quad (5.117)$$

con lo que podemos asegurar que,

$$R_n = e^\xi \frac{1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0.001. \quad (5.118)$$

Basta coger $n = 6$ (ya que $3/7! = 0.000595 < 0.001$) y entonces tenemos,

$$e^1 \approx 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + 1/6! = 2.71805 \quad (e = 2.7182818\dots). \quad (5.119)$$

• $f(x) = \sin(x)$

También es infinitamente derivable en $\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, $f''(x) = -\sin(x) = \sin(x + \pi)$, $\dots$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$, por lo que es claro que

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{si } n \text{ par} \quad (5.120)$$

y tenemos $n = 1, \dots$,

$$\sin(x) = x - x^3 \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{\sin(\theta x + (2n+1)\pi/2)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (5.121)$$

con $0 < \theta < 1$.

Ejemplo 5.10: Encuentra el valor del $\sin 35^\circ$ con un error menor de 0.001. Podemos acotar el resto del siguiente modo, el ángulo 35 grados se corresponde con 0.61086524 radianes, que es menor que 1. El resto será entonces,

$$\left| \frac{\sin(\theta x + (2n+1)\pi/2)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| < \left| \frac{1}{(2n+1)!} \right| \quad (5.122)$$

si queremos que el error sea menor que 0.001 bastará,

$$\left| \frac{1}{(2n+1)!} \right| \leq 0.001 \quad (5.123)$$

vamos probando y $1/7! = 0.0001984127$, con lo que basta coger $n = 3$ (polinomio de orden $2n - 1 = 5$) tendríamos entonces el polinomio,

$$T_5(x) = x - x^3 \frac{1}{3!} + x^5 \frac{1}{5!}, \quad T_5(0.61086524) = 0.5735827 \quad (5.124)$$

que podemos comparar con su valor real $\sin 35^\circ = 0.57357644$. En la figura 5.10 se muestran la función $\sin(x)$ junto a algunos de sus polinomios de Taylor en torno a $x_0 = 0$.

• $f(x) = \cos(x)$

Tenemos

$$\cos(x) = 1 - x^2 \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2} + \frac{\cos(\theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n} \quad (5.125)$$

con $n = 1, \dots$, y $0 < \theta < 1$. Ver figura 5.10.

- $f(x) = \ln(1+x)$ ($x > -1$)

Es indefinidamente derivable en un entorno del 0, las derivadas son,

$$f^{(k)} = (\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (5.126)$$

por lo que la fórmula de Maclaurin correspondiente es,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}. \quad (5.127)$$

- Otra aplicación: $f(x) = \arctan(x)$

Veamos su primera derivada. Utilicemos la derivada de la función inversa (ver la sección 5.5.1), en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$ la función es biunívoca, tenemos entonces,

$$(\arctan(\tan x))' = (x)' = 1 = (\arctan)'(\tan x) \tan'(x) = (\arctan)'(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} \quad (5.128)$$

con lo que si definimos una variable, $z = \tan x$, tenemos,

$$(\arctan)'(z) = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+z^2} \quad (5.129)$$

la segunda derivada,

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}. \quad (5.130)$$

Se puede ver que el desarrollo queda,

$$T(x) = \sum_{n=1}^n \frac{(-1)^{(n+1)}}{2n-1} x^{2n-1}. \quad (5.131)$$

Así por ejemplo tendríamos una bonita fórmula:

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots \quad (5.132)$$

que, sin entrar en detalles sobre convergencia, es una serie que converge, lentamente, a $\pi/4$.

5.9.4 Enlaces externos

Puedes ver algunas de las series en: (en inglés)

<http://mathworld.wolfram.com/MaclaurinSeries.html>

<http://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html>

Utilizando el programa de cálculo simbólico **Mathematica** se pueden obtener series de Taylor utilizando el comando `Series`, aquí por ejemplo para el desarrollo de Taylor del $\sin[x]$ alrededor del punto $x = 2.5$ de tercer orden,

```
Series[Sin[x],{x,2.5,3}]
```

Un ejemplo usando este programa lo puedes ver en la figura 5.11.

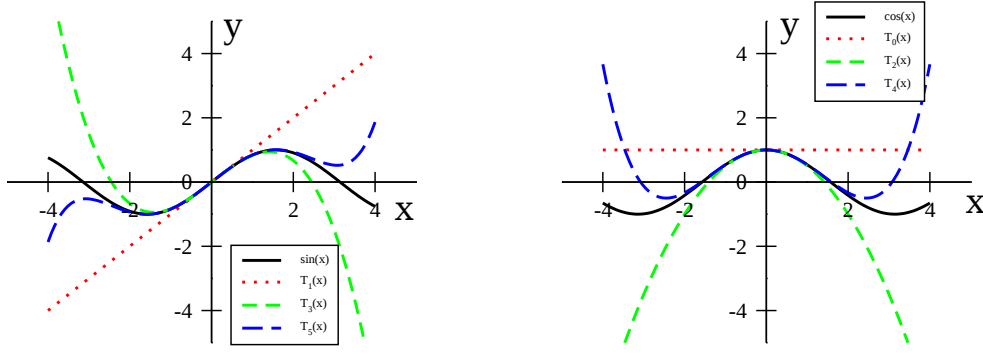


Figura 5.10: Desarrollos de Taylor de las funciones $\sin(x)$, y $\cos(x)$ alrededor del punto $x_0 = 0$.

5.9.5 Extremos locales

Como vimos en la sección 5.6.1 una condición necesaria para que la función f derivable en (a, b) tenga un extremo local en un punto $x_0 \in (a, b)$ es que

$$f'(x_0) = 0. \quad (5.133)$$

Ahora estableceremos una condición suficiente y además veremos si podemos precisar la naturaleza del extremo.

Teorema 5.12: Sea $f \in C^n(a, b)$ y que en $x_0 \in (a, b)$ verifica,

$$\begin{cases} f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{cases} \quad (5.134)$$

entonces podemos afirmar que:

1) Si n es par y

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo local en } x_0. \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo local en } x_0. \end{cases} \quad (5.135)$$

2) Si n es impar entonces f tiene un punto de inflexión en x_0 .

Demostración. Con las condiciones del enunciado la función f cumple las hipótesis del teorema de Taylor, ver sección 5.9.2, por tanto en un entorno de x_0 , $x \in B(x_0, \varepsilon)$ tenemos,

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{=0 \text{ por hipótesis}} \quad (5.136)$$

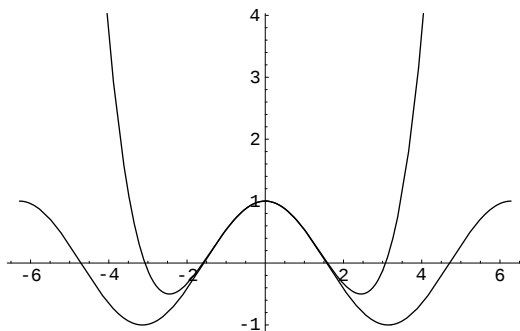
con $\xi = x_0 + (x - x_0)\theta$, $0 < \theta < 1$. Así que basta estudiar el comportamiento del residuo $R_{n-1}(x, \xi)$, veamos,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \quad (5.137)$$

el signo de $f(x) - f(x_0)$ dependerá del signo del residuo, que además dependerá de n , veamos, seguro que $\exists B(x_0, \varepsilon)$ en la que,

Grafica del Coseno de x junto con su desarrollo de Maclaurin de orden 4.

```
Plot[Evaluate[{Cos[x], Normal[Series[Cos[x], {x, 0, 4}]]}], {x, -2 π, 2 π};
```



Grafica del Coseno de x junto con su desarrollo de Taylor de orden 4 centrado en $x=1.3$

```
In[1]:= Plot[Evaluate[{Cos[x], Normal[Series[Cos[x], {x, 1.3, 4}]]}], {x, -2 π, 2 π};
```

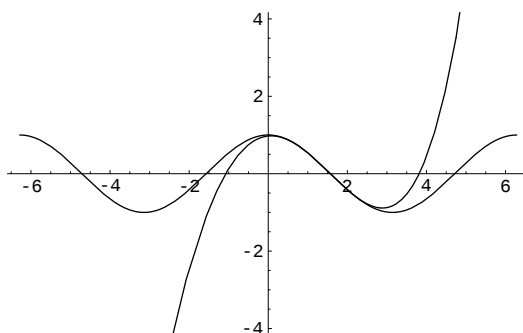


Figura 5.11: Ejemplos utilizando el programa Mathematica. Arriba, polinomio de Taylor de grado 4 alrededor de $x = 0$. Abajo, polinomio de Taylor de grado 4 alrededor del punto $x = 1.3$.

- (i) Si n es par, $(x - x_0)^n > 0$ y $f^{(n)}(x_0) > 0$ entonces⁹,

$$\forall x \in B(x_0, \varepsilon) \quad | \quad R_{n-1}(x, \xi) > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \quad (5.138)$$

por lo que x_0 tendrá un mínimo local en x_0 .

- (ii) Si n es par, $(x - x_0)^n > 0$ y $f^{(n)}(x_0) < 0$ entonces,

$$\forall x \in B(x_0, \varepsilon) \quad | \quad R_{n-1}(x, \xi) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \quad (5.139)$$

por lo que x_0 tendrá un máximo local en x_0 .

- (iii) Si n es impar entonces el signo de $(x - x_0)^n$ cambia si tenemos $x > x_0$ o $x < x_0$ por lo que no habría ni máximo ni mínimo, tendríamos un punto de inflexión: $f(x)$ crece si $f^{(n)}(x_0) > 0$ y decrece si $f^{(n)}(x_0) < 0$.

c.q.d.

Ejemplo 5.11:

⁹Obsérvese que la continuidad de $f^{(n)}$ nos garantiza que si $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces $\exists B(x_0, r)$ tal que si $x \in B(x_0, r)$ entonces $f^{(n)}(x)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(x_0)$. Al hacer Taylor para dicho x tendremos que $\xi \in B(x_0, r)$ y también se cumple que $f^{(n)}(\xi)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(x_0)$. Es por eso que basta estudiar el signo de $f^{(n)}(x_0)$.

1.- $f(x) = \sin(x^4)$ en $x_0 = 0$

veamos las derivadas,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x^3 \cos(x^4) \\f''(x) &= 12x^2 \cos(x^4) - (4x^3)^2 \sin(x^4) \\f'''(x) &= 24x \cos(x^4) - 64x^9 \cos(x^4) - 144x^5 \sin(x^4) \\f^{(IV)}(x) &= 24 \cos(x^4) - 1152x^8 \cos(x^4) - 816x^5 \sin(x^4) + 256x^{12} \sin(x^4)\end{aligned}$$

Observamos que todas son nulas, siendo la primera no nula la cuarta derivada, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, $f^{iv}(0) = 24 > 0$ como además n es par, $n = 4$, tenemos que $f(x)$ tiene un mínimo local en el origen

2.- $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$

Tenemos, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, ahora la primera derivada no nula es la tercera, n es pues impar luego tenemos un punto de inflexión.

CAPÍTULO 6

INTEGRACIÓN

6.1 Integral indefinida

En el tema anterior tras definir el concepto de derivada de una función en un punto vimos que bajo ciertas circunstancias se podía definir una función a la que llamábamos derivada. Así pues, dada una función $f(x)$ buscábamos obtener su derivada, $f'(x)$. Vimos que este proceso es fácil de describir en forma de algoritmo y en muchos casos era sencilla de encontrar, utilizando las reglas y teoremas del tema anterior, por ejemplo, la regla de la cadena.

Ahora consideraremos el problema inverso,

Definición 6.1: Dada una función $f(x)$ veremos si podemos encontrar una función $F(x)$ tal que cumpla que $F'(x) = f(x)$. A esta función $F(x)$ se la denomina **primitiva** de la función $f(x)$.

Ejemplo 6.1: Encontrar una función primitiva de la función $f(x) = x$. Vista la definición podemos ver que $F(x) = x^2/2$ es primitiva ya que $\forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que $F'(x) = x = f(x)$. Pero al mismo tiempo podemos comprobar que no es única, así una función $G(x) = F(x) + C$ con C constante, también cumple que $G'(x) = f(x)$.

Teorema 6.1: Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ entonces su diferencia es una constante.

Demostración. Tenemos, $F_1'(x) = f(x)$ y $F_2'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$, entonces, si

$$\phi(x) = F_1(x) - F_2(x) \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad (6.1)$$

lo que implica que,

$$\phi'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = C. \quad (6.2)$$

c.q.d.

Definición 6.2: Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ entonces la expresión $F(x) + C$ con C constante se denomina integral indefinida de $f(x)$ y se denota,

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C. \quad (6.3)$$

Teorema 6.2: Toda función $f(x)$ continua en $[a, b]$ tiene una función primitiva y por tanto tiene integral indefinida.

(no lo demostramos)

Corolario 6.3: De la definición 6.1 junto con la definición 5.5 tenemos,

- 1.) $(\int f(x) \, dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$
- 2.) $d(\int f(x) \, dx) = F'(x) \, dx$, de donde $dF(x) = f(x) \, dx.$
- 3.) $\int \underbrace{f(x) \, dx}_{= dF(x)} = F(x) + C$, de donde $\int dF(x) = F(x) + C.$

6.1.1 Algunas integrales indefinidas

Antes de estudiar los métodos de integración daremos una tabla de integrales elementales. Comprobar que estas fórmulas son correctas es sencillo, basta derivar el segundo miembro y ver que coincide con el integrando del primero.

$$\int u^\alpha \, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \quad (6.4)$$

$$\int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + C, \quad (6.5)$$

$$\int \sin(u) \, du = -\cos(u) + C, \quad (6.6)$$

$$\int \cos(u) \, du = \sin(u) + C, \quad (6.7)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(u)} \, du = \tan(u) + C, \quad (6.8)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(u)} \, du = -\cotan(u) + C, \quad (6.9)$$

$$\int e^u \, du = e^u + C, \quad (6.10)$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C, \quad (6.11)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \arcsin(u) + C, \quad (6.12)$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} \, du = \arctan(u) + C, \quad (6.13)$$

$$\int \frac{1}{a^2 - u^2} \, du = \frac{1}{2a} \ln \left(\left| \frac{a+u}{a-u} \right| \right) + C. \quad (6.14)$$

6.1.2 Propiedades de la integral indefinida

Para cualquier $a \neq 0, b, \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene,

$$1.) \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

$$2.) \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

$$3.) \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

$$4.) \int f(x+b) dx = F(x+b) + C.$$

utilizando (3. y 4.) tenemos, $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$

6.2 Métodos de Integración

6.2.1 Cambio de variable o substitución

Si tenemos la integral de $f(x)$,

$$\int f(x) dx, \quad (6.15)$$

podemos realizar un cambio de variable,

$$x = \varphi(t) \quad dx = \varphi'(t) dt, \quad (6.16)$$

donde $\varphi(t)$ es una función continua, derivable y con inversa. Entonces tendremos,

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (6.17)$$

Para probar esto basta derivar ambos términos respecto de x ,

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x), \quad (6.18)$$

la derivada del segundo término es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right) &\stackrel{\text{Regla de la cadena}}{=} \frac{d}{dt} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right) \frac{dt}{dx} \\ &= f[\varphi(t)] \varphi'(t) \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)] = f(x) \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde hemos usado la derivada de la función inversa,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\varphi'(x)}. \quad (6.20)$$

Ejemplo 6.2:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right] = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin(t) + C = \arcsin(e^x) + C. \quad (6.21)$$

Ejemplo 6.3:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln(|t|) + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \quad (6.22)$$

Ejemplo 6.4:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^3+1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right] = \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3} \sqrt{t} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + C. \quad (6.24)$$

Ejemplo 6.5:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3x-7} dx &= \left[\begin{array}{l} t = 3x-7 \\ dt = 3 dx \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \ln|t| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|3x-7| + C. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Ejemplo 6.6: Calcular¹,

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx \quad (6.26)$$

utilizando los cambios:

- (a) $x^2 + 1 = u$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{u-1}{u^3} du \\ &= -\frac{1}{2u} + \frac{1}{4u^2} = \frac{-2u+1}{4u^2} = -\frac{1+2x^2}{4(1+x^2)^2} + C \end{aligned} \quad (6.27)$$

- (b) $x = \tan(\theta)$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx &= \left[\begin{array}{l} x = \tan(\theta) \\ dx = \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta \end{array} \right] = \int \sin^3(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{\sin^4(\theta)}{4} + C = \frac{\sin^4(\arctan(x))}{4} + C \end{aligned} \quad (6.28)$$

¿Coinciden ambas primitivas (6.27) y (6.28) ?

6.2.2 Integración por partes

Consideremos dos funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$, utilizando la fórmula para la derivada del producto, ver Eq. (5.20),

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (6.29)$$

de donde integrando ambos miembros tendremos,

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx \quad (6.30)$$

¹Tomado del libro de G. H. Hardy, Ex, XLIX

con lo que,

$$\int uv' \, dx = uv - \int vu' \, dx. \quad (6.31)$$

Recordando la definición de diferencial, $df(x) = f'(x) \, dx$,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du, \quad (6.32)$$

que se denomina **fórmula de integración por partes**.

Es útil por ejemplo aplicada a estos casos,

$$\begin{aligned} & \int P(x)e^x \, dx, \\ & \int P(x)\sin(x) \, dx, \\ & \int P(x)\cos(x) \, dx, \\ & \int P(x)\ln x \, dx, \end{aligned}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de cualquier grado.

Ejemplo 6.7:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x \, dx \right] \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ejemplo 6.8:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right] = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \left[\begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x \, dx \end{array} \right] = x \arcsin x - \int \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{t} + C \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Ejemplo 6.9:

$$\begin{aligned} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ dv = dx \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{l} du = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \\ v = x \end{array} \right] \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Ejemplo 6.10:

$$\begin{aligned}
\int x \sin(x) \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x & \rightarrow \, du = dx \\ dv = \sin(x) \, dx & \rightarrow \, v = -\cos(x) \end{array} \right] \\
&= -x \cos(x) - \int (-\cos(x)) \, dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C. \quad (6.36)
\end{aligned}$$

6.2.3 Integrales racionales

Estudiaremos integrales del tipo,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx \quad (6.37)$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios y el grado de $P(x)$ menor que el grado de $Q(x)$. Veamos distintos casos,

- $I_1 = \int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx.$

transformemos el denominador en suma o diferencia de cuadrados,

$$\begin{aligned}
a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a \left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2 \right]
\end{aligned} \quad (6.38)$$

donde

$$\pm k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{4a^2}(4ac - b^2). \quad (6.39)$$

Estudiemos las raíces de $Q(x)$,

$$Q(x) = ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \begin{cases} \text{si } b^2 - 4ac > 0 \rightarrow \text{raíces reales} \\ \text{si } b^2 - 4ac < 0 \rightarrow \text{raíces complejas} \end{cases}. \quad (6.40)$$

La integral será entonces,

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2} \, dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2 \pm k^2} \, dt \quad (6.41)$$

donde en el último paso hemos hecho el cambio de variable,

$$t = x + \frac{b}{2a} \quad dx = dt \quad (6.42)$$

de donde, según el signo tendremos,

$$\begin{cases} +k^2 & \rightarrow \frac{1}{ak} \arctan(t/k) + C = \frac{1}{ak} \arctan\left(\frac{x+b/2a}{k}\right) + C \\ -k^2 & \rightarrow -\frac{1}{2ak} \ln \left| \frac{k+t}{k-t} \right| + C = -\frac{1}{2ak} \ln \left| \frac{k+x+b/2a}{k-x-b/2a} \right| + C \\ k=0 & \rightarrow -\frac{1}{at} + C = -\frac{1}{ax+b/2} + C \end{cases} \quad (6.43)$$

De forma análoga podríamos transformar la integral,

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \, dt \quad \text{o} \quad \int \frac{1}{\sqrt{k^2 \pm t^2}} \, dt. \quad (6.44)$$

Ejemplo 6.11: Obtener la integral de

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+2)^2 + 6} dx = \left[\begin{array}{l} t = x + 2 \\ dt = dx \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 6} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan(t/\sqrt{6}) + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Asimismo podemos calcular la integral,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + (B - \frac{Ab}{2a})}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \underbrace{\frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx}_{=I_4} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \underbrace{\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx}_{=I_1} \end{aligned} \quad (6.46)$$

la segunda ya sabemos resolverla, para la primera basta hacer,

$$t = ax^2 + bx + c \quad dt = (2ax + b) dx \quad (6.47)$$

y se convierte en,

$$I_4 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2 + bx + c| + C. \quad (6.48)$$

- Recordemos las integrales de fracciones elementales propias que conocemos hasta el momento,

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C \\ \text{(II)} \quad & \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = \frac{A}{1-k} (x-a)^{-k+1} + C, \quad k \neq 0, 1 \\ & = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \geq 2) \\ \text{(III)} \quad & \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = I_3 \\ \text{(IV)} \quad & \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx \quad \text{ver por ejemplo el texto de Piskunov} \end{aligned} \quad (6.49)$$

Analicemos ahora el caso más general:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

- 1) $Q(x)$ tiene raíces reales simples
- 2) $Q(x)$ tiene raíces reales múltiples
- 3) $Q(x)$ tiene raíces complejas simples
- 4) $Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples (no lo daremos)

- 1) $Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, α_i **raíces reales simples**. Entonces se puede escribir,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}, \quad \text{donde } A_i = \text{cte} \quad (6.50)$$

por tanto,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A_1 \ln|x - \alpha_1| + A_2 \ln|x - \alpha_2| + \dots + A_n \ln|x - \alpha_n| \quad (6.51)$$

para obtener los números A_i basta ver que,

$$P(x) = A_1(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) + A_2(x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) + \dots \quad (6.52)$$

con lo que tendremos,

$$\begin{aligned} P(\alpha_1) &= A_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_n) \\ P(\alpha_2) &= A_2(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_n). \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.53)$$

Ejemplo 6.12:

$$I = \int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} dx \quad (6.54)$$

primero observamos que $x = 1$ es raíz del denominador, así pues $Q(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$, para obtener el polinomio de segundo grado podemos hacer,

$$\begin{aligned} (x-1)(ax^2+bx+c) &= x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \\ ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c &= x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \\ ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c &= x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \end{aligned} \quad (6.55)$$

de donde

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b - a &= -3 \\ c - b &= -13 \\ -c &= 15 \\ \Rightarrow a = 1, b = -2, c = -15 &\Rightarrow Q(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 15) \\ x = 2 \pm \sqrt{\frac{4+60}{2}} = 1 \pm 4 &= \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases} \\ \Rightarrow Q(x) &= (x-1)(x+3)(x-5). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Ahora ya podemos aplicar las fórmulas ya que tenemos que $Q(x)$ sólo tiene raíces reales simples.

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x-5} dx + \int \frac{C}{x+3} dx \quad (6.57)$$

con $x^2 - x + 1 = A(x-5)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-5)$,

$$\begin{aligned} x = 1 &\quad 1 = A(-4)(4) \Rightarrow A = -1/16 \\ x = 5 &\quad 21 = B(4)(8) \Rightarrow B = 21/32 \\ x = -3 &\quad 13 = C(-4)(-8) \Rightarrow C = 13/32 \end{aligned} \quad (6.58)$$

y la integral queda,

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} dx = -\frac{1}{16} \ln|x-1| + \frac{21}{32} \ln|x-5| + \frac{13}{32} \ln|x+3| + C.$$

- 2) $Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_n)^{k_n}$, α_i **raíces reales múltiples**. Entonces se puede escribir,

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - \alpha_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x - \alpha_1)} \\ &+ \frac{A_1^{(2)}}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \frac{A_2^{(2)}}{(x - \alpha_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x - \alpha_2)} \\ &\dots + \dots \\ &+ \frac{A_1^{(n)}}{(x - \alpha_n)^{k_n}} + \frac{A_2^{(n)}}{(x - \alpha_n)^{k_n-1}} + \dots + \frac{A_{k_n}^{(n)}}{(x - \alpha_n)} \end{aligned} \quad (6.59)$$

así que todas las integrales serán de la forma,

$$\int \frac{A}{(x - \alpha_i)^n} dx = A \frac{(x - \alpha_i)^{-n+1}}{-n+1} \quad \text{si } n \neq 1. \quad (6.60)$$

Las constantes pueden determinarse utilizando un procedimiento similar al caso de raíces simples, notando que en este caso es necesario resolver un sistema de ecuaciones con $k_1 k_2 \dots k_n$ incógnitas. El sistema de ecuaciones puede obtenerse igualando los coeficientes de cada potencia de x a ambos lados de la igualdad que resulta de multiplicar la ecuación (6.60) por $Q(x)$.

Ejemplo 6.13: Calcular la integral,

$$\int \frac{x+1}{(x-3)^2(x-2)} dx \quad (6.61)$$

[Solución: $-4/(x-3) + 3 \ln(|x-2|/|x-3|)$.]

- 3) **raíces complejas simples**, las raíces aparecen por parejas, $\alpha_k \pm i\beta_k$, $k = 1, n$, podemos escribir,

$$[x - (\alpha_k + i\beta_k)][x - (\alpha_k - i\beta_k)] = (x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2 \quad (6.62)$$

de donde,

$$Q(x) = [(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2][(x - \alpha_2)^2 + \beta_2^2] \dots [(x - \alpha_n)^2 + \beta_n^2] \quad (6.63)$$

Ejemplo 6.14:

$$\int \frac{1}{x^3 - 1} dx \quad (6.64)$$

$x = 1$ es una solución trivial y puede verse que, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, las raíces del segundo término son,

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \pm i\beta \quad (6.65)$$

con lo que, $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$, y se tiene,

$$x^3 - 1 = (x - 1)[(x + 1/2)^2 + 3/4] \quad (6.66)$$

y la integral queda,

$$I = \int \frac{1}{x^3 - 1} dx = \underbrace{\int \frac{A}{x-1} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{Mx+N}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx}_{I_2} \quad (6.67)$$

donde tenemos,

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x - 1) = (A + M)x^2 + (A - M + N)x + A - N \quad (6.68)$$

cuya solución es,

$$A = 1/3, \quad M = -1/3, \quad N = -2/3. \quad (6.69)$$

Así,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + C \\ I_2 &= \int \frac{-1/3x - 2/3}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{x+2}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx \\ &= \underbrace{-\frac{1}{3} \int \frac{x+1/2}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx}_{I_3} - \underbrace{\frac{1}{3} \int \frac{3/2}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx}_{I_4} \end{aligned} \quad (6.70)$$

haciendo el cambio de variable,

$$t = (x + 1/2)^2 \quad \rightarrow \quad dt = 2(x + 1/2) dx \quad (6.71)$$

tenemos,

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{3} \int \frac{1/2}{t + 3/4} dt = -\frac{1}{6} \ln|t + 3/4| = -1/6 \ln[(x + 1/2)^2 + 3/4] \\ I_4 &= -\frac{1}{3} \frac{4}{3} \int \frac{3/2}{(4/3)(x + 1/2)^2 + 1} dx = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan[2/\sqrt{3}(x + 1/2)] \end{aligned} \quad (6.72)$$

donde hemos usado el cambio, $y = 2/\sqrt{3}(x + 1/2)$.

Ejemplo 6.15: Un caso con raíces complejas múltiples

$$\int \frac{2x+3}{(1+x^2)^2} dx = \underbrace{\int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx}_{a_1} + \underbrace{\int \frac{3}{(1+x^2)^2} dx}_{a_2} \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} = \frac{-1}{1+x^2} + C \\ a_2 &= \int \frac{3}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{ojo, sumo y resto } 3x^2 \quad 3 \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx + 3 \int \frac{-x^2}{(1+x^2)^2} dx \\ &= 3 \arctan(x) - 3 \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned} \quad (6.74)$$

usamos $u = x$, $du = dx$, $dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$, $v = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}$, con lo que,

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 \arctan(x) - 3 \left[-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}x - \int -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1} dx \right] \\ &= 3 \arctan(x) + \frac{3}{2} \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{3}{2} \arctan(x) \end{aligned} \quad (6.75)$$

de donde la integral queda,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{-1}{1+x^2} + 3\arctan(x) + \frac{3}{2} \frac{x}{(1+x^2)} - \frac{3}{2} \arctan(x) + C \\ &= \frac{3}{2} \arctan(x) + \frac{3x-2}{2} \frac{1}{(1+x^2)} + C.\end{aligned}\quad (6.76)$$

6.2.4 Integrales de funciones trigonométricas

1) Integrales del tipo: $\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$

con R una expresión racional, por ejemplo, $\sin^2 x + 3 \cos(x)$ en general se pueden reducir a integrales de funciones racionales utilizando el cambio de variable,

$$\tan(x/2) = t \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \quad (6.77)$$

con ese cambio se tiene,

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{2 \tan(x/2)}{\tan^2(x/2) + 1} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) &= \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}\quad (6.78)$$

Ejemplo 6.16:

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{2 dt}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|\tan x/2| + C. \quad (6.79)$$

2) Casos especiales,

$\int R(\sin(x)) \cos(x)$ haremos el cambio $t = \sin(x)$

$\int R(\cos(x)) \sin(x)$ haremos el cambio $t = \cos(x)$

Ejemplo 6.17:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos(x)} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos(x)} \sin(x) dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x) dx \end{array} \right] = - \int \frac{1-t^2}{2+t} dt \\ &= \int \frac{t^2 - 1 - 3 + 3}{t+2} dt = \int \frac{t^2 - 4}{t+2} dt + \int \frac{3}{t+2} dt \\ &= t^2/2 - 2t + 3 \ln|t+2| + C \\ &= \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos(x) + 3 \ln|\cos(x) + 2| + C.\end{aligned}\quad (6.80)$$

Ejemplo 6.18:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos(x) dx = \int (1-t^2)t^2 dt = t^3/3 - t^5/5 + C \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.\end{aligned}\quad (6.81)$$

Ejemplo 6.19:

$$\int e^{\sin(x)} \cos(x) dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin(x)} + C. \quad (6.82)$$

Ejemplo 6.20:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\
&= \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.
\end{aligned} \tag{6.83}$$

6.3 Integral Definida

La integral definida aparece en múltiples problemas físicos en casi todas las áreas, por citar algunos: cálculos de momentos de inercia, de campos eléctricos creados por distribuciones de carga, cálculo del trabajo, etc.

En geometría se utiliza para calcular áreas de superficies (para definir el concepto de área), volúmenes de objetos, etc.

Iremos acercándonos al concepto de integral (de Riemann) a partir de definir una serie de conceptos. Terminaremos relacionando el concepto de integral definida con el cálculo de primitivas.

6.3.1 Sumas inferiores y superiores

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, y sean m y M sus valores máximo y mínimo en dicho intervalo. Consideremos una **partición** del intervalo original mediante los puntos,

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \tag{6.84}$$

la distancia entre dos puntos consecutivos, (no tienen por qué ser equidistantes)

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}. \tag{6.85}$$

Dentro de cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ llamaremos m_k al mínimo de la función en dicho intervalo y M_k al máximo de la función en dicho intervalo.

Definamos las siguientes sumas,

$$(i) \text{ **Suma inferior** } \underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

$$(ii) \text{ **Suma superior** } \overline{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

por construcción tenemos que

$$\underline{s}_n \leq \overline{s}_n \tag{6.86}$$

y además tenemos²,

$$m[b-a] \leq \underline{s}_n \leq \overline{s}_n \leq M[b-a]. \tag{6.87}$$

Sea ahora un punto arbitrario ξ_k dentro del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, al ser f continua en todo el intervalo tenemos $\exists f(\xi_k)$ y se cumple,

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \tag{6.88}$$

podemos definir

$$s_n \equiv \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad \Delta x_k > 0 \tag{6.89}$$

²Basta notar que $[b-a] = \sum_{i=1}^n \Delta x_i$ y que $m_i \geq m$ y $M_i \leq M$

y tenemos,

$$m_k \Delta x_k \leq f(\xi_k) \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k \quad (6.90)$$

con lo que al hacer las sumas tendremos siempre,

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \overline{s}_n \quad (6.91)$$

donde recordemos que s_n depende tanto de la partición considerada como de la elección de los ξ_k .

Consideremos diferentes particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $\max(\Delta x_k) \rightarrow 0$, es decir el número de subintervalos $n \rightarrow \infty$. Para cada partición tendremos la suma s_n

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (6.92)$$

Si para cualquier partición del intervalo $[a, b]$ que cumpla lo anterior, $\max(\Delta x_k) \rightarrow 0$ y para cualesquiera puntos ξ_k , se cumple que la suma s_n tiende a un mismo límite I , entonces diremos que la función $f(x)$ es integrable (Riemann) en el intervalo $[a, b]$. Al límite I se le denomina **integral definida** de la función $f(x)$ en $[a, b]$ y se designa,

$$I = \int_a^b f(x) \, dx. \quad (6.93)$$

Y podemos escribir por tanto,

$$\lim_{\max(\Delta x_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) \, dx. \quad (6.94)$$

Se utiliza la siguiente nomenclatura:

- f : integrando
- a : límite inferior
- b : límite superior
- $[a, b]$ intervalo de integración
- x variable de integración, es muda, el resultado no depende de la variable de integración, ejemplo,

$$I(a, b) = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt. \quad (6.95)$$

El que la función sea continua es condición suficiente para que la función sea integrable Riemann. Recordemos, ver sección 4.5.3, que al ser continua en $[a, b]$ la función tiene un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

Teorema 6.4: Si f es continua en $[a, b]$

$$\Rightarrow \quad (6.96)$$

f es integrable en $[a, b]$.

Demostración. (no hecha en clase)

f continua en $[a, b]$ implica, ver la sección 4.6.1, que f es uniformemente continua en $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que } \forall x, x' \in [a, b] \\ \text{si } & |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a} \end{aligned}$$

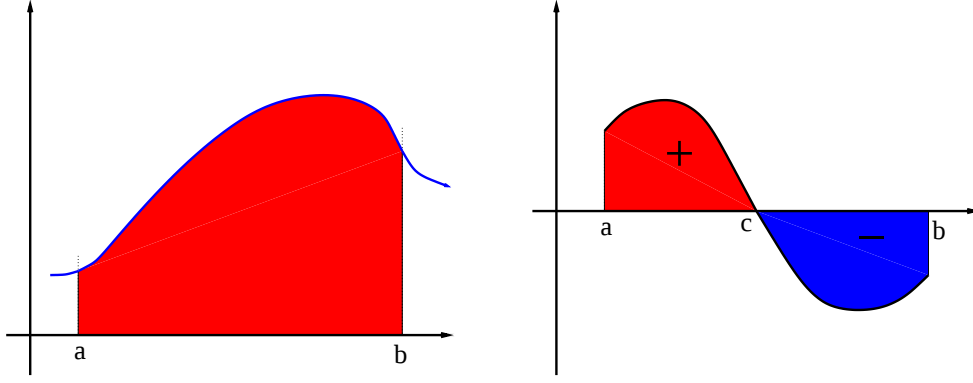


Figura 6.1: (izquierda) La integral definida de una función positiva representa el área encerrada entre la función y el eje x . (derecha) si la función tiene regiones positivas y negativas, la integral definida representa la suma algebraica de las áreas con el convenio de que en las regiones de f negativa el área es negativa.

consideremos entonces la partición, $p = \{x_0, \dots, x_n\}$ con $x_{i+1} - x_i < \delta$ eso implica que, $\forall x, x' \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ pero claro alguno de esos x y x' corresponderán con el máximo y el mínimo en dicho intervalo, $f(x) = M_i$ y $f(x) = m_i$ y por tanto,

$$\Rightarrow M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (6.97)$$

lo que implica,

$$\Rightarrow \bar{s}(f, p) - \underline{s}(f, p) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \quad (6.98)$$

c.q.d.

6.3.2 Interpretación geométrica

- Si $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx \quad (6.99)$$

representa el área comprendida entre la curva $f(x)$ y el eje x en el intervalo considerado.

- Si la función tiene regiones positivas y negativas, la integral definida representa la suma algebraica de las áreas con el convenio de que en las regiones de f negativa el área es negativa. Así con la notación de la figura 6.1, tendríamos,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b |f(x)| dx. \quad (6.100)$$

6.3.3 Propiedades de la integral definida

- (i) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- (ii) $\int_a^a f(x) dx = 0$.

$$(iii) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$(iv) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \text{ con } \lambda \text{ una constante.}$$

$$(v) \text{ si } f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b] \text{ tenemos,}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (6.101)$$

$$(vi) \text{ Si } m \text{ y } M \text{ son los valores mínimo y máximo de la función } f(x) \text{ en } [a, b] \text{ tenemos que,}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (6.102)$$

esta propiedad puede utilizarse para **estimar** el valor de una integral definida.

$$(vii) \text{ Si } f(x) \text{ es integrable en } [a, c] \text{ y en } [c, b] \text{ entonces}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (6.103)$$

$$(viii) \text{ Si } a < b \text{ se tiene } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6.3.4 Teorema del valor medio del cálculo integral

Este teorema es un caso particular de un teorema del valor medio generalizado para el cálculo integral cuyo enunciado es: sean f y g continuas en $[a, b]$ y $g(x)$ no cambia de signo en el intervalo, entonces $\exists \xi \in [a, b]$ que cumple,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (6.104)$$

Teorema 6.5: Sea f una función continua en $[a, b]$ entonces

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \left| \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi) \right|. \quad (6.105)$$

Demostración. Supongamos $a < b$, como f es continua en $[a, b]$ existen m y M , mínimo y máximo de la función en dicho intervalo respectivamente. Por la propiedad 6 de la sección anterior tenemos que,

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx}_{\mu} \leq M \quad (6.106)$$

o lo que es lo mismo, $m \leq \mu \leq M$, al ser la función f continua el Teorema 4.11 nos garantiza que $\exists \xi \in [a, b] \quad | \quad f(\xi) = \mu$ así que,

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad \xi \in [a, b]. \quad (6.107)$$

c.q.d.

6.4 Integrales y primitivas

En la primera sección hemos introducido el concepto de primitiva de una función como aquella que al derivarla nos da la función original. Ahora veremos la conexión entre primitivas e integrales definidas.

6.4.1 Primer teorema fundamental del cálculo

Teorema 6.6: Sea f continua en $[a, b]$ consideremos un $a \leq x \leq b$, con lo que seguro que f también será integrable en $[a, x]$, definamos,

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad (6.108)$$

entonces se tiene,

$$F'(x) = f(x). \quad (6.109)$$

Demostración. Consideremos un incremento arbitrario Δx del argumento x , y apliquemos la propiedad 7 de las integrales definidas,

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) \, dt = \int_a^x f(t) \, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt, \quad (6.110)$$

con lo que tendremos,

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) \, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt \end{aligned} \quad (6.111)$$

aplicando ahora el teorema del valor medio del cálculo integral, sección 6.3.4, tendremos,

$$\Delta F = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x \quad (6.112)$$

con $\xi \in [x, x + \Delta x]$, por tanto,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(\xi). \quad (6.113)$$

Ahora bien, la derivada de $F(x)$ es,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) \stackrel{\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow x}{=} \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \underbrace{\stackrel{f \text{ continua}}{=} f(x)}. \quad (6.114)$$

c.q.d.

Nota: $F(x)$ es la primitiva que satisface la condición $F(a) = 0$.

Ejemplo 6.21: (utilizando la regla de la cadena)

$$F(x) = \int_3^x t^2 \, dt, \quad F'(x) = x^2.$$

$$G(x) = \int_3^{e^{5x}} \tan(t) \, dt, \quad G'(x) = \tan(e^{5x})e^{5x}5.$$

$$H(x) = \int_{3000}^{e^{5x}} \tan(t) \, dt, \quad H'(x) = \tan(e^{5x})e^{5x}5.$$

$$I(x) = \int_a^{x^2} \arccos(t) \, dt, \quad I'(x) = \arccos(x^2)2x.$$

6.4.2 Segundo teorema fundamental del cálculo; Regla de Barrow

Llamado así por Isaac Barrow, también conocida como Fórmula de Newton-Leibniz.

Teorema 6.7: Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de la función $f(x)$ entonces,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (6.115)$$

Demostración. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ hemos visto que la diferencia entre esta y cualquier otra primitiva es una constante. Así pues consideremos la primitiva del teorema anterior, tendremos,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \quad (6.116)$$

para poder determinar C podemos utilizar cualquier valor de x ya que la igualdad anterior vale para cualquier $x \in [a, b]$. En particular:

(i) $x = a$, tendremos, $\int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$

(ii) $x = b$, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ con lo que demostramos la Regla de Barrow

c.q.d.

Se suele utilizar la notación,

$$\int_a^b f(t) dt = F(x)|_a^b = F(b) - F(a). \quad (6.117)$$

La Regla de Barrow nos permite pues calcular integrales definidas a partir de una primitiva de la función.

6.4.3 Cambio de variable en integrales definidas

Tendremos,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{y_0}^{y_1} f(g(y))g'(y) dy \quad (6.118)$$

donde hemos hecho el cambio de variable,

$$x = g(y) \quad \rightarrow \quad dx = g'(y) dy \quad (6.119)$$

y por tanto tenemos,

$$x_0 = g(y_0), x_1 = g(y_1). \quad (6.120)$$

Ejemplo 6.22:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad \left[\begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \end{array} \right] \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt \quad (6.121)$$

los límites se pueden ver fácilmente, $x = 0 \rightarrow t = 0$, $x = r \rightarrow t = \pi/2$, pero ahora la integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt &= \int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2 t dt = \frac{r^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{r^2}{2} t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{r^2}{2} \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.122)$$

6.4.4 Integración por partes

La fórmula ahora es,

$$\int_a^b u \, dv = uv|_a^b - \int_a^b v \, du. \quad (6.123)$$

Ejemplo 6.23:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin(x) \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin^2 x & \rightarrow \, du = 2 \sin(x) \cos(x) \, dx \\ dv = \sin(x) \, dx & \rightarrow \, v = -\cos(x) \end{array} \right] \\ &= \underbrace{-\sin^2 x \cos(x)|_0^{\pi/2}}_{=0} + 2 \int_0^{\pi/2} \sin(x) \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} \, dx = 2 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx}_{=-\cos(x)|_0^{\pi/2}=1} - 2 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx}_{=I} \end{aligned}$$

de donde,

$$I = 2 - 2I \Rightarrow 3I = 2 \Rightarrow I = 2/3. \quad (6.124)$$

6.5 Aplicaciones geométricas

6.5.1 Área de una figura plana

Es la primera aplicación de la integral definida. La integral definida puede utilizarse para calcular el área encerrada entre una curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje x . Lo único que hay que notar es que la integral definida de f entre a y b no es en general dicha área. Para calcularla habrá que tener cierto cuidado y notar que dicha área se corresponde en realidad con,

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx, \quad (6.125)$$

por lo que tendremos que saber donde cambia de signo la función para saber la función $|f(x)|$.

Ejemplo 6.24: Calcula el área limitada por la curva $y = \sin(x)$ y el eje x entre $[0, 2\pi]$, ver figura 6.2. Lo importante es notar que dicha área NO ES la integral definida entre 0 y 2π de la función $\sin(x)$ si no que es,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} |\sin(x)| \, dx = \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x)) \, dx \\ &= (-\cos(x))|_0^{\pi} + (\cos(x))|_{\pi}^{2\pi} = -(-1 - 1) + (1 - (-1)) = 2 + 2 = 4. \end{aligned} \quad (6.126)$$

Ejemplo 6.25: Calcula el área encerrada entre las curvas, $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = x^2$. Lo primero es hacer un esquema de la región que pretendemos calcular, en la figura 6.2 se muestra en rojo la región cuyo área queremos calcular. Los puntos de intersección entre ambas curvas se pueden obtener igualando,

$$\sqrt{x_i} = x_i^2 \Rightarrow x_i = 0, 1. \quad (6.127)$$

El área que buscamos será el área de la región delimitada por el eje x y la curva $y = \sqrt{x}$ menos el área delimitada por el eje x y la curva $y = x^2$.

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \quad (6.128)$$

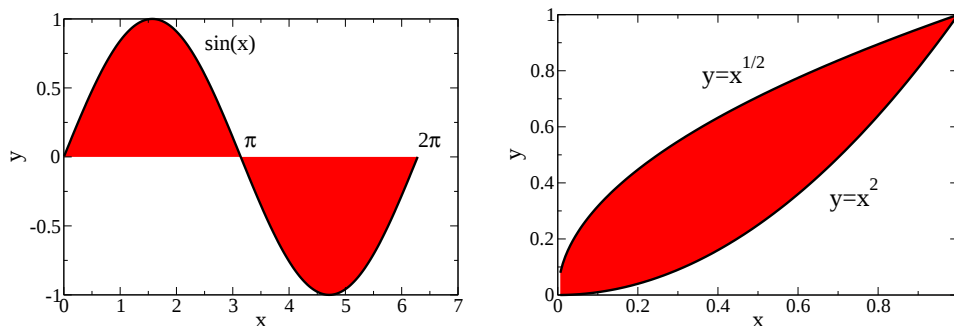


Figura 6.2: En rojo el área que pretendemos calcular en cada uno de los ejemplos.

Ejemplo 6.26: Calcula el área de la elipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.129)$$

Aprovechando la simetría de la elipse respecto del eje x , podremos calcular el área de la región positiva de la elipse y multiplicar por 2 para obtener el valor total.

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x}{a} = \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt \\ x = -a \Rightarrow t = -\pi/2 \\ x = a \Rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right] \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2b \sqrt{1 - \sin^2 t} (a \cos t) dt \\ &= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= 2ab \left. \frac{1}{2} t \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 2ab \left. \frac{1}{4} \sin 2t \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab. \end{aligned} \quad (6.130)$$

6.5.2 Longitud de un arco de curva en $\mathbb{R}^2$

Sea $f(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$. Si hacemos una partición del intervalo en $x_0, x_1, \dots, x_n$, podremos escribir la longitud de la línea poligonal inscrita en la curva como,

$$\sum_{i=1}^n \Delta \ell_i \quad (6.131)$$

y definir la longitud de arco como,

$$\ell = \lim_{\max \Delta \ell_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta \ell_i. \quad (6.132)$$

Definiendo $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, tendremos,

$$\Delta \ell_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \Delta x_i. \quad (6.133)$$

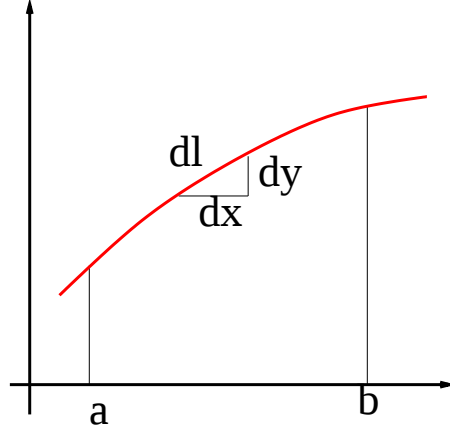


Figura 6.3: Elemento de longitud.

Ahora podemos utilizar el Teorema de Lagrange, sección 5.8, y tendremos,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i) \quad \xi_i \in [x_i, x_{i-1}], \quad (6.134)$$

y por tanto,

$$\Delta \ell_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i. \quad (6.135)$$

La longitud de la línea poligonal inscrita queda,

$$\ell_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i. \quad (6.136)$$

Ahora bien, una de las hipótesis es que $f'(x)$ es continua, por lo que la suma integral ℓ_n tiene un límite y se puede escribir,

$$\ell = \lim_{\max \Delta \ell_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (6.137)$$

Ejemplo 6.27: Obtener la longitud de una circunferencia de radio R . Calcularemos la longitud de la semi circunferencia superior y multiplicamos por 2, para obtener la longitud total. La ecuación de la curva es,

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2} \quad (6.138)$$

de donde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (6.139)$$

y la longitud será,

$$\begin{aligned} \ell &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2 \int_{-R}^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} dx = 2R \arcsin(x/R) \Big|_{-R}^R \\ &= 2R(\pi/2 - (-\pi/2)) = 2\pi R. \end{aligned} \quad (6.140)$$

6.5.3 Volumen de un objeto de sección conocida

Consideremos un objeto del cual conocemos el área de las secciones, $S(x)$, paralelas. Ver la figura 6.4. En dicho caso el volumen del objeto se puede escribir como,

$$V = \int_a^b S(x) \, dx. \quad (6.141)$$

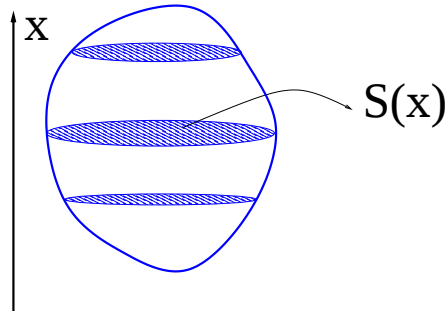


Figura 6.4: Volumen de un objeto de sección conocida, $S(x)$.

Ejemplo 6.28: Calcula el volumen de un cono de radio R y altura h . Veamos las secciones del cono son círculos cuya área es πr^2 , en el caso del cono dibujado en la figura 6.5. Podemos escribir el radio de la sección de cono como función de x ,

$$r(x) = R \left(1 - \frac{x}{h}\right) \Rightarrow r(0) = R, r(h) = 0. \quad (6.142)$$

Y podemos calcular su volumen como,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi r(x)^2 \, dx = \int_0^h \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \, dx = \pi R^2 \int_0^h \left(1 - \frac{2x}{h} + \frac{x^2}{h^2}\right) \, dx \\ &= \pi R^2 \left(x - \frac{2x^2}{2h} + \frac{x^3}{3h^2}\right) \Big|_0^h = \pi R^2 \left(h - h + \frac{h^3}{3h^2}\right) = \frac{\pi}{3} R^2 h. \end{aligned} \quad (6.143)$$

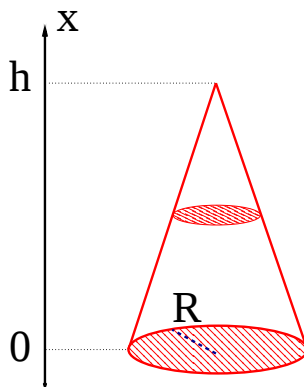


Figura 6.5: Cono de radio R y altura h .

6.5.4 Volumen de un objeto de revolución

Consideremos un objeto de revolución generado por un perfil, $y = f(x)$ al girar alrededor del eje x , ¿cuál será el volumen de dicho objeto? En la figura 6.6 vemos un objeto generado a partir de la función $y = f(x)$ al girarla alrededor del eje x . El área de cada de sección, se corresponderá al área de un círculo de radio $f(x)$, por lo que será $\pi[f(x)]^2$. El volumen del objeto podemos entonces calcularlo como en la sección 6.5.3 ya que conocemos la sección como función de x :

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx. \quad (6.144)$$

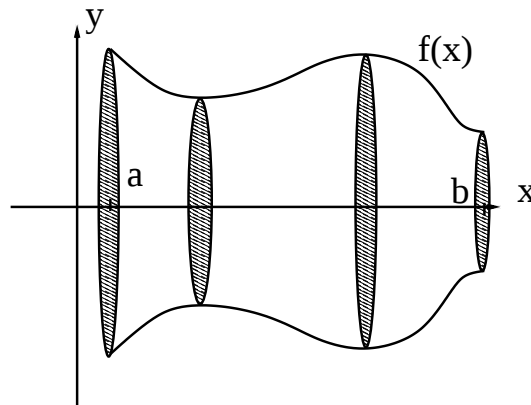


Figura 6.6: Objeto de revolución obtenido a partir de la función $f(x)$.

6.5.5 Área de un objeto de revolución

En la figura 6.7 vemos como se puede definir el elemento de área en este caso. Esencialmente tendremos que el área de la superficie de revolución se puede descomponer en el área de secciones de cono infinitesimales de lado dl y radio $f(x)$. $dS = 2\pi f(x) dl$.

Se puede calcular mediante la siguiente fórmula,

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (6.145)$$

6.6 Integrales Impropias

En esta sección vamos a generalizar el concepto de integral a intervalos que no sean cerrados, $[a, b]$ o a funciones que no estén acotadas en dicho intervalo. Llamaremos integrales impropias a dos tipos de integrales:

- (i) (primera especie): La función es acotada pero el intervalo de integración no está acotado

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad (6.146)$$

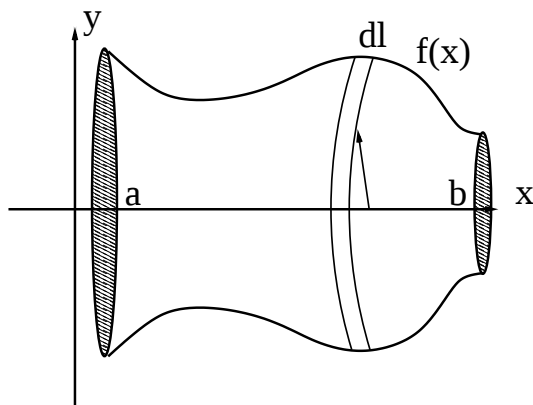


Figura 6.7: Área de un objeto de revolución.

(ii) (segunda especie): La función no está acotada y el intervalo de integración está acotado,

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty \quad c \in [a, b], \quad (6.147)$$

el integrando tiene una singularidad dentro del intervalo.

(iii) (tercera especie): Si son al mismo tiempo de primera y segunda especie.

6.6.1 Integrales impropias de primera especie

Definición 6.3: Consideramos la siguiente integral como función del extremo superior del intervalo,

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.148)$$

Denominaremos integral impropia a:

$$\int_a^\infty f(x) dx \equiv \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.149)$$

- Si este límite existe y es finito $\Rightarrow$ la integral impropia es **convergente**.
- En otro caso se dice que la integral es **divergente**.

De modo análogo definimos,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \equiv \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (6.150)$$

si el límite existe, es finito y es A , se dice,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = A. \quad (6.151)$$

También se define,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx. \quad (6.152)$$

Ejemplo 6.29:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan(x)|_0^a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, \quad (6.153)$$

converge.

Ejemplo 6.30:

$$\int_{-\infty}^{\pi/2} \cos(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\pi/2} \cos(x) dx = 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin(a), \quad (6.154)$$

no existe, divergente.

Ejemplo 6.31: Encuentra los valores de α para que converja la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (6.155)$$

Solución: Si $\alpha \neq 1$ podemos obtener una primitiva,

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \quad (6.156)$$

(i) $\alpha > 1$ tenemos,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} = \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow \text{es convergente.} \quad (6.157)$$

(ii) $\alpha < 1$,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} = \infty \Rightarrow \text{es divergente.} \quad (6.158)$$

(iii) $\alpha = 1$,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(|x|)|_1^b = \infty \Rightarrow \text{es divergente.} \quad (6.159)$$

Criterios de comparación

Teorema 6.8: Si $\forall x \geq a$ se verifica, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y $\int_a^{\infty} g(x) dx$ es convergente,

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$$

también es convergente y se tiene que $\int_a^{\infty} g(x) dx \geq \int_a^{\infty} f(x) dx$.

Teorema 6.9: si $\forall x \geq a$ se verifica $0 \leq g(x) \leq f(x)$ y $\int_a^{\infty} g(x) dx$ es divergente, $\Rightarrow$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad (6.160)$$

también es divergente.

En ambos casos es útil comparar con la integral que hemos visto antes,

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}. \quad (6.161)$$

Ejemplo 6.32: Estudia la convergencia de

$$\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx \quad (6.162)$$

podemos ver que en el intervalo considerado,

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (6.163)$$

pero

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = \infty \Rightarrow \text{NO converge} \quad (6.164)$$

lo que utilizando el Teorema 6.9 implica que,

$$\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx \quad (6.165)$$

no es convergente.

Convergencia absoluta

Teorema 6.10: Si la integral $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge entonces

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (6.166)$$

también converge. En este caso se denomina absolutamente convergente.

Ejemplo 6.33: Estudiemos la convergencia de

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx, \quad (6.167)$$

la función cambia de signo en el intervalo, estudiemos la convergencia de,

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| dx. \quad (6.168)$$

Se cumple,

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{x^3} \right|, \quad (6.169)$$

pero la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \Big|_1^{\infty} = 1/2 \quad (6.170)$$

converge, y por tanto $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| dx$ también converge, lo que implica que la integral original, $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx$ también es convergente.

Criterio del cociente

Teorema 6.11: Sean f y g dos funciones integrables en $[a, x]$, y $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0 \forall x > a$, sea

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (6.171)$$

entonces,

- 1.) Si $L = 0$ y $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ también es convergente.
- 2.) Si $L = \infty$ y $\int_a^\infty g(x) dx$ diverge, $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ también diverge.
- 3.) Si $L > 0$ finito, $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ y $\int_a^\infty g(x) dx$ tienen el mismo caracter, convergente o divergente.

Ejemplo 6.34: Estudia la convergencia de:

- $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$

6.6.2 Integrales impropias de segunda especie

Definición 6.4: Sea f integrable en $[a, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$.

Se define la integral impropia,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx, \quad (6.172)$$

si este límite existe se dice que la integral es **convergente**, si no existe se dice que es **divergente**.

- Análogamente, f integrable en $[a + \varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$ y el $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ se define,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx. \quad (6.173)$$

- Se define asimismo en el caso en el que el punto en el que la función no está acotada sea un punto interior, x_0 .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow x_0^-} \int_a^c f(x) dx + \lim_{c \rightarrow x_0^+} \int_c^b f(x) dx. \quad (6.174)$$

Ejemplo 6.35:

- $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}$ que se puede calcular,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln(x)|_\varepsilon^1 = \nexists \quad (6.175)$$

- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ que se puede obtener,

$$\lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = - \lim_{b \rightarrow 1^-} (2\sqrt{1-x})|_0^b = - \lim_{b \rightarrow 1^-} (2\sqrt{1-b} - 2) = 2 \quad (6.176)$$

- Obten los valores de α para los que la integral, $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$, es convergente.

Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow a^-} \left. \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_c^b \quad (6.177)$$

– Si $\alpha < 1$,

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \left. \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_c^b = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (6.178)$$

y la integral converge.

– Si $\alpha > 1$,

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \left. \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_c^b = \infty \quad (6.179)$$

y la integral diverge

– $\alpha = 1$, diverge.

Criterios de Comparación

Para las integrales impropias de segunda especie existen criterios de comparación, y criterio del cociente análogos a los que existen para integrales de primera especie.

6.6.3 Valor principal de Cauchy

- Para el caso de integrales impropias de primera especie doblemente infinitas,

$$\mathcal{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx. \quad (6.180)$$

Ejemplo 6.36: $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$, la integral impropia no existe, ya que queda $\infty - \infty$, sin embargo el VPC si que existe,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-c}^c = \lim_{c \rightarrow \infty} (c^2/2 - c^2/2) = 0. \quad (6.181)$$

Nota: Recordemos que para que la integral impropia exista, los dos límites han de tomarse independientemente como hacíamos en la ecuación (6.152).

- Para el caso de integrales impropias de segunda clase:

Se define del siguiente modo,

$$\mathcal{VP} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (6.182)$$

con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty. \quad (6.183)$$

Ejemplo 6.37:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 \frac{1}{(x-1)^3} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^3} dx + \int_{1+\varepsilon}^5 \frac{1}{(x-1)^3} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left. \frac{(x-1)^{-2}}{-2} \right|_{-1}^{1-\varepsilon} + \left. \frac{(x-1)^{-2}}{-2} \right|_{1+\varepsilon}^5 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right] = \frac{3}{32}. \end{aligned} \quad (6.184)$$

CAPÍTULO 7

SUCESIONES Y SERIES

7.1 Sucesiones

7.1.1 Sucesión

Definición 7.1: Sucesión

Se denomina sucesión de números reales a cualquier aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que a cada n le corresponda un número real, $f(n) = a_n$. Se escribe la sucesión del siguiente modo,

$$\{a_n\} \quad (7.1)$$

a a_n se le denomina término n -ésimo de la sucesión.

Ejemplo 7.1: $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}$, $\{x_n\} = 1/5, 3/8, 5/11, 7/14, \dots$

Ejemplo 7.2: $a_n = (-1)^n$, $\{a_n\} = -1, 1, -1, 1, \dots$

Ejemplo 7.3: Sucesión de Fibonacci (Leonardo de Pisa, sXIII) :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \quad (7.2)$$

es una sucesión definida por recurrencia. Existe una expresión cerrada para esta sucesión, obtenida mucho después,

$$x_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}} \quad (7.3)$$

donde φ satisface, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, por lo que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que es la llamada **razón áurea**, utilizada desde los griegos en arquitectura. Corresponde al cociente de dos números, a y b , tales que se tenga,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (7.4)$$

entonces se tiene, $\varphi = a/b$. Los primeros números de la sucesión son,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots \quad (7.5)$$

Definición 7.2: Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es convergente, si

$$\exists p \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad | \quad |a_n - p| < \varepsilon, \forall n > N \quad (7.6)$$

Si $\{a_n\}$ converge a p escribimos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p \quad (7.7)$$

y se dice que p es el límite de la sucesión.

Definición 7.3: Si una sucesión **no es convergente** se denomina **divergente**.

Definición 7.4: La sucesión $\{a_n\}$ está **acotada**, si

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad | \quad |a_n| < k \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.8)$$

Definición 7.5: Una sucesión se dice **de Cauchy** si cumple,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad | \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \quad (7.9)$$

Intuitivamente, implica que la distancia entre términos se hace cada vez menor.

Teorema 7.1: Una sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ sucesión de Cauchy

Demostración. Damos la demostración en uno de los dos sentidos: $(\Rightarrow)$. Al ser convergente tenemos que, (notad que sólo difiere de la definición 7.2 en el $\varepsilon/2$),

$$\exists p \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad | \quad |a_n - p| < \varepsilon/2, \forall n > N \quad (7.10)$$

y por tanto para cualesquiera $n, m > N$ tenemos,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad | \quad |a_n - p| < \varepsilon/2 ; |a_m - p| < \varepsilon/2, \forall n, m > N \quad (7.11)$$

de donde,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - p| + |a_m - p| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad (7.12)$$

que es la condición de Cauchy dada en la definición 7.5. c.q.d.

7.1.2 Algunas propiedades del álgebra de sucesiones

- (i) Si el límite de una sucesión existe, es único.
- (ii) Toda sucesión convergente está acotada, lo que implica que toda sucesión no acotada es divergente
- (iii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB. \quad (7.13)$$

- (iv) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1/b_n) = 1/B$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = A/B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda A$$

Definición 7.6: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales:

- Diremos que la sucesión es **creciente** si, $a_n \leq a_{n+1} \forall n$. Se denota $a_n \nearrow$
- Diremos que la sucesión es **decreciente** si, $a_n \geq a_{n+1} \forall n$. Se denota $a_n \searrow$.
- Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

Teorema 7.2: Si una sucesión a_n es monótona creciente (decreciente) se cumple que:

- es convergente $\Leftrightarrow$ está acotada superiormente (inferiormente)

Demostración. Una sucesión que no esté acotada es claro que no puede ser convergente, por otro lado si una sucesión converge es fácil probar que es acotada. Probemos pues que una sucesión creciente acotada es convergente.

Supongamos que la sucesión es monótona creciente, $a_n \nearrow$, sea L el supremo del conjunto, ya que es acotada seguro que tiene un supremo. Entonces tenemos que $a_n \leq L \forall n$. Por otro lado consideremos un ε positivo arbitrario. El número $L - \varepsilon$ no puede ser cota superior de todos los a_n (en ese caso sería cota superior inferior al supremo, lo que es imposible) por lo que seguro que para un N determinado se tiene,

$$L - \varepsilon < a_N \quad (7.14)$$

pero como la sucesión es creciente para valores $n \geq N$ tendremos que

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n \quad \forall n \geq N \quad (7.15)$$

lo que implica,

$$0 \leq L - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad (7.16)$$

por lo que L será el límite de la sucesión. c.q.d.

Con lo que además hemos probado que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \quad (7.17)$$

Análogamente se demuestra el caso en el que $\{a_n\}$ es monótona decreciente.

Ejemplo 7.4: Consideremos la sucesión dada por,

$$\{x_n\}, \quad x_1 = \sqrt{2}; \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} \quad \forall n \geq 2. \quad (7.18)$$

Probemos utilizando el método de inducción que la sucesión es creciente:

- 1) $x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > x_1$
- 2) Supongamos que $x_n > x_{n-1}$
- 3) Veamos si (2) implica que $x_{n+1} > x_n$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \stackrel{\text{por (2)}}{>} \sqrt{x_{n-1} + 2} = x_n \quad (7.19)$$

y al mismo tiempo que está acotada superiormente, por ejemplo por el número 3,

- 1) $x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 3$
- 2) Supongamos que $x_n < 3$

3) Veamos si (2) implica que $x_{n+1} < 3$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \stackrel{\text{por (2)}}{<} \sqrt{3 + 2} < 3. \quad (7.20)$$

Al ser acotada y creciente el teorema 7.2 nos asegura que es convergente. Veamos si somos ahora capaces de encontrar su límite cuando n tiende a infinito. Dado que existe dicho límite, podemos asegurar que $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, tal que $\forall n > N$ se cumple que $a_{n+1} - a_n < \varepsilon$. Por lo tanto dicho límite tiene que satisfacer:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + x_{n-1}} = \sqrt{2 + x} \quad (7.21)$$

de donde,

$$x^2 = 2 + x \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2. \quad (7.22)$$

Ejemplo 7.5: Un conjunto de sucesiones muy interesante son las definidas por la denominada “Ecuación logística”. Esta es una sucesión definida por recurrencia:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad n = 1, \dots, \quad (7.23)$$

con x_0 un número entre $[0, 1]$ y $0 < r < 4$. La riqueza de esta ecuación es difícil de intuir a la vista de su simplicidad. Si buscamos sus posibles límites, denominando (si existe) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, tendremos,

$$L = rL(1 - L) \Rightarrow L = 0 \text{ o } L = (r - 1)/r. \quad (7.24)$$

Lo que se observa, de modo simplificado, es:

$$\begin{array}{ll} 0 < r < 1 & x_n \rightarrow 0 \\ 1 < r < 2 & x_n \rightarrow (r - 1)/r \\ 2 < r < 3 & x_n \rightarrow (r - 1)/r \\ 3 < r < 3 + \sqrt{6} & x_n \rightarrow \text{oscila entre dos valores: no tiene límite.} \\ 3 + \sqrt{6} < r < 3.54 & x_n \rightarrow \text{oscila entre cuatro valores: no tiene límite.} \\ & \vdots \end{array} \quad (7.25)$$

En la figura 7.1 se muestran los valores entre los que oscila la sucesión como función de r .

7.2 Series

Las series surgen como generalización de la suma de un número finito de términos al caso infinito. Se trata pues de sumas infinitas que requieren ser definidas cuidadosamente y estudiadas en cada caso ya que no comparten muchas de las propiedades de la suma tradicional.

Ejemplo 7.6: Paradoja de Zenón (tomada del libro de T. Apostol, Calculus I)

Consideremos un ejemplo parecido al de la paradoja original de Zenón. Un corredor recorre a velocidad constante una distancia. En tiempo T , recorre la mitad del recorrido, en $T/2$ recorre el siguiente cuarto, en $T/4$ recorre el siguiente octavo etc. ¿Llegará el corredor a su destino si tiene que recorrer un número infinito de tramos?

Análizemos el problema del siguiente modo, tenemos que ver si podemos dotar de cierto sentido a la suma infinita,

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots \quad (7.26)$$

Por otro lado si el corredor recorre la mitad del recorrido en T y va a velocidad constante, recorrerá todo el recorrido en $2T$, por lo que intuitivamente,

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots = 2T. \quad (7.27)$$

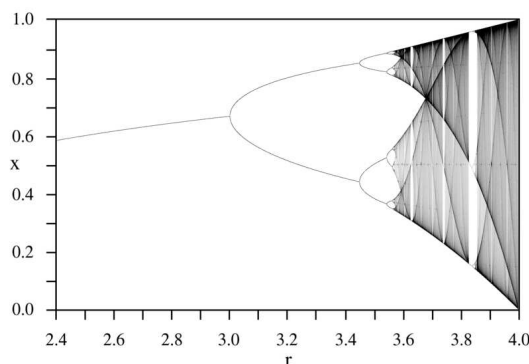


Figura 7.1: Diagrama de bifurcación de la ecuación logística. Para $x_0 = 0.25$, muestra los valores entre los que oscila el valor para n grande de la ecuación dependiendo de r . Notese que para $r < 3$ sólo hay una solución, mientras que para $r > 3$ empiezan a aparecer oscilaciones para $n \rightarrow \infty$. Figura tomada de Wikipedia.org.

La suma que buscamos es la suma,

$$T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (7.28)$$

que es la suma de una serie geométrica de razón $1/2$ y la estudiaremos en este tema.

7.2.1 Serie infinita

Definición 7.7: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales o complejos, $a_n \in \mathbb{R}$ o $a_n \in \mathbb{C}$, construimos una nueva sucesión $\{s_n\}$ del siguiente modo,

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Al par ordenado de sucesiones $(\{a_n\}, \{s_n\})$ se le denomina **serie infinita**. Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos,

- a_n término n -ésimo de la serie
- s_n suma parcial n -ésima de la serie

Definición 7.8: Se dice que una serie **converge** si la sucesión $\{s_n\}$ converge. En dicho caso se dice que la sucesión $\{s_n\}$ es sumable y al límite de la sucesión $\{s_n\}$ se le denomina **suma de la serie** y se escribe,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (7.30)$$

Se dice que una serie **diverge** si la sucesión $\{s_n\}$ diverge.

Teorema 7.3: *Supongamos una serie de términos positivos, $a_n \geq 0 \forall n$, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \{s_n\}$ está acotada superiormente.*

Demostración. (sólo $\Rightarrow$)

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \Rightarrow \quad (7.31)$$

$\{s_n\}$ es una sucesión monótona creciente y por tanto converge si está acotada superiormente (ver Teorema 7.2). c.q.d.

Teorema 7.4: Condición de Cauchy para series.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0 \exists N \mid |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \forall p = 1, 2, \dots$ y $\forall n > N$.

Demostración. (sólo $\Leftarrow$)

Consideremos la sucesión $s_n = \sum_{n=1}^n a_n$, y consideremos,

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}. \quad (7.32)$$

Esta será la distancia entre dos términos cualesquiera, si dicha distancia es menor que un ε arbitrario para n superiores a un N dado, como dice la hipótesis de la derecha, entonces la sucesión será de Cauchy y este teorema se reduce al Teorema 7.1. c.q.d.

Si en el teorema anterior consideramos $p = 1$ tenemos que una **condición necesaria**¹ (aunque no suficiente) para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja es que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (7.34)$$

Un ejemplo clásico en el que dicha condición se cumple pero que sin embargo no es convergente es la serie armónica,

$$a_n = \frac{1}{n}. \quad (7.35)$$

Se puede ver que la condición de Cauchy para series no se cumple. Consideremos $n = 2^m$ y $p = 2^m$, entonces,

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = \frac{1}{2^m + 1} + \frac{1}{2^m + 2} + \cdots + \frac{1}{2^m + 2^m} \geq \frac{2^m}{2^m + 2^m} = \frac{1}{2}, \quad (7.36)$$

que no satisface la condición de Cauchy para $\varepsilon \leq 1/2$, $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge pese a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Así pues estudiar si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ es o no cero es un buen comienzo para saber si la serie puede converger.

Ejemplo 7.7:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right)^{n^2} \quad (7.37)$$

veamos si el término general de la sucesión tiende a cero, condición necesaria para que converja la serie ya que se trata de una serie de términos positivos. En primera instancia tendremos una indeterminación tipo 1^∞ , que recordemos se podían calcular como (ver ecuación 4.118.):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right)^{n^2} = e^b \quad \text{con} \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - 1 \right), \quad (7.38)$$

¹Esta misma condición se puede obtener, sin más que notar que si la serie converge se tiene que tener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \quad (7.33)$$

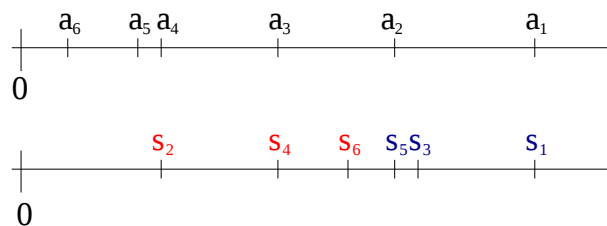


Figura 7.2: La sucesión, $\{a_n\}$, junto con la sucesión de sumas parciales, $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$. En rojo las sucesivas sumas parciales en las que se suma hasta un número par de términos, y en azul hasta un número impar de términos.

pero b puede calcularse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - 1} = 2 \quad (7.39)$$

de donde el término general tiende a $e^2 \neq 0$, por lo que la serie no converge.

7.2.2 Serie alternada

Definición 7.9: Si $a_n > 0 \forall n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad (7.40)$$

se denomina **serie alternada**.

Teorema 7.5: (de Leibniz)

Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente que converge a 0, $\Rightarrow$ la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es convergente.

Y además si llamamos S a la suma de la serie y s_n a la suma parcial n -ésima se verifica,

$$\begin{aligned} 0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1} & \quad \forall n \geq 1 \\ 0 < |S - s_n| < a_{n+1}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Demostración. (del libro de G.H. Hardy) Consideremos:

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2n-1} &= a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0 \\ s_{2n} - s_{2n-2} &= -a_{2n} + a_{2n-1} \geq 0. \end{aligned} \quad (7.42)$$

De donde la sucesión, $\{s_{2n}\}$ es creciente, y la sucesión, $\{s_{2n+1}\}$, es decreciente (ver Fig. 7.2). Al mismo tiempo tenemos, que la diferencia entre ambas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} - s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0. \quad (7.43)$$

Tenemos pues dos sucesiones, una creciente, y otra decreciente, que tienden al mismo límite, por lo tanto ambas tienden a límites, y ambos límites han de ser el mismo. c.q.d.

En la figura 7.2 se muestra una sucesión junto con la sucesión de sumas parciales de la serie alternada.

7.2.3 Convergencia absoluta

Definición 7.10: *Dos definiciones:*

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.
- Diremos que la serie **converge condicionalmente** si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge.

Teorema 7.6: *La convergencia absoluta, $\sum |a_n|$ converge, implica la convergencia de la serie, $\sum a_n$.*

Demostración. Consideremos

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \stackrel{\text{conv abs}}{<} \varepsilon \quad (7.44)$$

$\forall \varepsilon \quad \exists N, n > N$ y $\forall p \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ también satisface la condición de Cauchy, Teorema 7.4, por lo que es convergente. c.q.d.

Un ejemplo de serie que es convergente pero no absolutamente convergente es el caso de la serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad (7.45)$$

que es convergente en virtud del Criterio de Leibniz, Teorema 7.5. Sin embargo la serie de los valores absolutos es la serie armónica que hemos visto que no es convergente.

7.2.4 La serie geométrica

La serie geométrica es la siguiente,

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n. \quad (7.46)$$

Donde x debe entenderse como un parámetro, un número real cualquiera. Podemos obtener una expresión para la suma parcial s_n del siguiente modo, siempre que $|x| \neq 0$. Multiplicar por x y restando tendremos,

$$xs_n = x + x^2 + \cdots + x^{n+1} \quad (7.47)$$

y

$$(1-x)s_n = 1 - x^{n+1} \quad \Rightarrow s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \quad (7.48)$$

Si $x = 1$ tendríamos que $s_n = n + 1$ y si $x = -1$ tendremos $s_n = 0$ si n es impar y $s_n = 1$ si n es par.

¿Para qué valores de x es convergente la serie geométrica?

Veamos los distintos casos,

- $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-x}$
- $|x| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, diverge.
- $x = 1$, $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1$, diverge.
- $x = -1$, serie oscilante, $s_{2m} = 0$, $s_{2m+1} = 1$. Diverge ya que no cumple el criterio de Cauchy para series. Tampoco cumple la condición necesaria de convergencia.

7.2.5 Criterios de convergencia

Teorema 7.7: Criterio de Comparación.

Sea $a_n > 0$ y $b_n > 0$ si $\exists c > 0$ tal que,

$$\forall n \geq 1, \quad a_n < cb_n \quad (7.49)$$

$\Rightarrow$

(i) si $\sum b_n$ es convergente $\Rightarrow \sum a_n$ es convergente.

(ii) O, lo que es equivalente, si $\sum a_n$ es divergente $\Rightarrow \sum b_n$ es divergente.

Demostración. Llamemos $s_n = \sum a_n$ y $t_n = \sum b_n$, la hipótesis implica que,

$$s_n \leq ct_n. \quad (7.50)$$

Si $\sum b_n$ converge, sus sumas parciales, t_n están acotadas, llamemos M a una de las cotas, tendremos entonces,

$$s_n \leq cM, \quad (7.51)$$

por lo que s_n será también convergente ya que está acotado y es monótonamente creciente, ver Teorema 7.3. ² c.q.d.

Teorema 7.9: Criterio de Comparación por paso al límite.

Supongamos $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo n y que además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1. \quad (7.54)$$

Entonces $\sum a_n$ es convergente **si y sólo si** $\sum b_n$ converge.

Demostración. Al ser el límite del cociente igual a 1, tenemos que existe un N tal que,

$$1/2 < a_n/b_n < 3/2 \quad \forall n > N \quad (7.55)$$

Y entonces tendremos que se cumple

$$a_n < 3/2 b_n \quad b_n < 2 a_n \quad (7.56)$$

y bastará aplicar dos veces el teorema de comparación 7.7. c.q.d.

Teorema 7.10: Criterio del cociente. (Test de D'Alembert)

Supongamos $a_n > 0$, estudiemos el límite siguiente,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad (7.57)$$

donde r NO depende de n . Se tiene para $\sum_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$:

²Este teorema podría haberse probado de un modo más general.

Teorema 7.8: Sea $a_n > 0$ y $b_n > 0$ si $\exists c > 0$ tal que,

$$\exists N \quad | \quad \forall n \geq N \quad a_n < cb_n \quad (7.52)$$

$\Rightarrow$

$$(7.53)$$

- si $\sum b_n$ es convergente $\Rightarrow \sum a_n$ es convergente.

Donde sólo necesitamos exigir que se cumpla la Eq. (7.49) a partir de un **determinado** N .

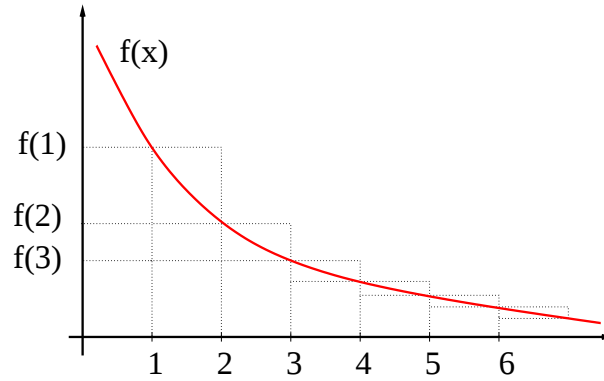


Figura 7.3: Comparación entre la integral impropia y las sumas inscritas y circunscritas.

- $r < 1$, la serie converge.
- $r > 1$, la serie diverge.
- $r = 1$, indeterminado, necesitamos utilizar otro criterio.

Teorema 7.11: Criterio integral

Sea f una función positiva decreciente, definida para todo real $x \geq 1$. Observando la figura 7.3, podemos escribir las siguientes relaciones,

$$\sum_{i=1}^n f(i) > \int_1^n f(x) dx > \sum_{i=2}^n f(i) \quad (7.58)$$

o bien,

$$\int_1^n f(x) dx + f(1) > \sum_{i=1}^n f(i) > \int_1^n f(x) dx \quad (7.59)$$

y por tanto la serie infinita converge o diverge según converja o diverja la integral impropia. Además la segunda relación nos sirve para acotar el valor de la suma si somos capaces de calcular la integral impropia correspondiente.

El criterio de la integral tiene una aplicación importante, el estudio de la convergencia de las sumas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad s \in \mathbb{R}. \quad (7.60)$$

Podemos estudiar su convergencia utilizando el criterio de la integral, tendremos que estudiar la convergencia de,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx. \quad (7.61)$$

Estas integrales impropias de primera especie las hemos estudiado explícitamente en la sección 6.6.1, tenemos que: si $s > 1$ convergen y si $s \leq 1$ divergen. Por lo que nuestra serie infinita correrá idéntica suerte,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } s > 1 \text{ converge} \\ \text{si } s \leq 1 \text{ diverge} \end{array} \right\}. \quad (7.62)$$

Dichas sumas sirven para definir una función de gran importancia denominada **Función Zeta de Riemann**, ζ , cuya definición es³,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad s > 1. \quad (7.63)$$

Euler (sXVIII) demostró una igualdad que conecta la función ζ con un producto sobre todos los números primos:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \text{primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad (7.64)$$

Teorema 7.12: Criterio de la raíz (Test de Cauchy)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \quad \forall n$, definamos,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} \quad (7.65)$$

entonces se tiene,

- si $R < 1$, la serie converge.
- si $R > 1$, la serie diverge.
- si $R = 1$, el criterio no decide, necesitamos utilizar otro.

No vemos la demostración, pero observese que con el R definido, tendremos que para n suficientemente grandes se tendrá,

$$a_n \approx R^n \quad (7.66)$$

por lo que el que $\sum a_n$ sea convergente estará intimamente relacionado con que la serie geométrica $\sum R^n$ converja. Dicha serie geométrica converge sólo si $R < 1$ como hemos visto en la sección 7.2.4

7.2.6 Series de potencias

Un conjunto de series de especial relevancia son las **series de potencias**, que pueden escribirse del siguiente modo,

$$s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_n x^n. \quad (7.67)$$

Estas han aparecido por ejemplo en la sección: 5.9. Será importante determinar para que valores de x se tiene que la serie infinita es convergente. En particular tendremos que algunas series de potencias serán convergentes para una determinada región de x y divergentes en el resto de la recta real.

Ejemplo 7.8:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (7.68)$$

converge si $x < 1$, y diverge en cualquier otro caso. Esto se puede ver aplicando el criterio del cociente. La serie converge si:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{x^n} &< 1 \\ \Rightarrow x &< 1. \end{aligned} \quad (7.69)$$

³Observa que la función $\zeta(s)$ es función de s que es el exponente, no confundir con las series geométricas de la sección 7.2.4.

Radio de Convergencia

El ejemplo anterior puede entenderse como que la serie de Taylor de la función,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (7.70)$$

converge sólo para $x < 1$. El hecho de que la función, $f(x)$, no esté acotada en el punto $x = 1$ está íntimamente relacionado con que el radio de convergencia sea 1.

Definición 7.11: *El radio de convergencia de una serie de potencias se define como el número real R tal que $\forall x < R$ se tiene que la serie de potencias es convergente.*

Se puede obtener o estimar utilizando los criterios de convergencia, por ejemplo, del criterio del cociente se tiene que la serie de potencias $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_n x^n$ es convergente si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} < 1 \quad (7.71)$$

lo que es lo mismo que,

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (7.72)$$

significando que $\forall x < R$ la serie es convergente.