

TEXTOS DOCENTS

259

FONAMENTS MATEMÀTICS PER A PSICOLOGIA

Maribel Peró Cebollero
Jaume Turbany Oset

Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament
Facultat de Psicologia



UNIVERSITAT DE BARCELONA



TEXTOS DOCENTS

259

FONAMENTS MATEMÀTICS PER A PSICOLOGIA

Maribel Peró Cebollero
Jaume Turbany Oset

Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament
Facultat de Psicologia

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



Peró, Maribel (Peró Cebollero)

Fonaments matemàtics per a psicologia. -- (Textos docents ; 259)

ISBN 978-84-475-3297-1

Annexos. Bibliografia

A la portada: Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament.

Facultat de Psicologia

I. Turbany i Oset, Jaume II. Universitat de Barcelona. Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament III. Títol IV. Col·lecció: Textos docents (Universitat de Barcelona)

1. Matemàtica 2. Probabilitats 3. Estadística matemàtica 4. Matrius (Matemàtica) 5. Problemes i exercicis

© PUBLICACIONS I EDICIONS DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA, 2008

Adolf Florensa, s/n; 08028 Barcelona; tel: 934 035 442; fax: 934 035 446;

comercial.edicions@ub.edu; www.publicacions.ub.es

1a edició: Edicions UB, 2002

1a edició: Publicacions i Edicions UB, 2008

Dipòsit legal: B-31231-2008

ISBN: 978-84-475-3297-1

Impressió: Gráficas Rey, S.L.

Imprès a Espanya / Printed in Spain

PRESENTACIÓ

Sempre és un compromís escriure la presentació d'un llibre, però en aquest cas augmenta la dificultat per tractar-se d'un text docent, i escrit, damunt, per dos amics i a més a més companys de viatge acadèmic i professional. Malgrat això, per a nosaltres, és una oportunitat magnífica de fer palesos alguns detalls a propòsit del text, dels seus autors i, en definitiva, del projecte que rau a sota de les pàgines impreses. Potser per seguir una línia -diguem-ne metodològica- per situar-nos, cal començar pel bloc més ampli.

Aquest text és un exponent extraordinari del que ha de ser un material docent amb voluntat d'utilitat. I no pas una utilitat generalitzada i inespecífica, que podria també justificar-lo, sinó una utilitat concreta i especialment important: l'anivellació de coneixements en els alumnes de nou ingrés a l'ensenyament de Psicologia de la Universitat de Barcelona. Anivellar, en efecte, com a resposta efectiva a les dificultats docents que es deriven de l'existència de múltiples vies d'accés que es donen en l'ensenyament al qual va dirigit. És obvi, si es coneix bé el món de l'accés a la universitat, que el fet que diverses vies es puguin trobar conjuntament en un primer curs d'un ensenyament universitari, genera especials dificultats en la docència, especialment en aquelles assignatures de primer semestre. En el cas que ara ens ocupa, es dona la més difícil combinació. L'assignatura d'Anàlisi de Dades en Psicologia, a la qual es vincula el contingut d'aquest text, es troba en el primer semestre del primer curs i en aquest entorn, hi poden arribar estudiants de totes les vies d'accés. Com assenyalen els propis autors, els coneixements previs dels estudiants de matemàtiques i estadística són diversos i poc homogenis; no especialment com a resultat de les excessivament gastades deficiències dels continguts del batxillerat, sinó més aviat com a resultat de la barreja inevitable de perfils acadèmics que es produeix en aquesta assignatura (i amb característiques pròpies en d'altres), semestre, curs i ensenyament.

En segon lloc, cal parlar dels continguts. En aquest punt la selecció dels autors és molt acurada i pensant constantment a crear un espai senzill i comú de discurs matemàtic. És especialment important deixar-se dur pel propi text i pels seus continguts i la seva ordenació. Podem pensar en un petit passeig matemàtic i estadístic per tal d'arribar a disposar d'un marc de referència sòlid i clar que permeti als estudiants seguir la docència d'aquesta i d'altres assignatures que la segueixen d'una forma més àgil, fàcil i amb bon èxit. Per posar un símil senzill, podria dir-se que aquest llibre és una excel·lent selecció de requisits, delicadament ordenats, per aconseguir un àpat equilibrat i amb garantia de bona digestió.

Finalment hem de confessar al lector que no som gaire capaços d'escriure alguna cosa intel·ligent a propòsit dels nostres companys i autors. Comprendran que qualsevol frase pot semblar un panegíric fruit de la conveniència o que una referència breu pot ser entesa com la finalització feixuga d'una feina encarregada. Per tant, ens limitarem a declarar la nostra enveja més sana per no haver estat nosaltres els impulsors d'un projecte com aquest, per no haver pogut compartir amb ells els moments, segur que engrescadors i divertits, que han pogut viure en crear aquest text i també, per què no, per no gaudir de poder llegir la presentació del llibre que algú hagués fet amb un to semblant

a la que nosaltres hem escrit i, finalment, i molt més important i irrenunciable, per no poder sentir la satisfacció del fet docent ben fet, harmònic amb l'esperit universitari, amb l'esforç de millora i qualitat de la Universitat de Barcelona com a institució d'educació superior de prestigi.

Montserrat Freixa Blanxart
Joan Guàrdia Olmos
Professors del Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament
Facultat de Psicologia
Divisió de Ciències de la Salut
Universitat de Barcelona

Barcelona, febrer de 2002

Si he vist més lluny que no pas els altres, és perquè m'he enfilat damunt les espatlles dels gegants.

Isaac Newton (1642 – 1727)

No es un tópico decir que nuestro mundo es cada vez más complejo. En efecto, la complejidad de un sistema –el cerebro, por ejemplo- aumenta con el grado de interconexión, con la mayor dificultad para encontrar subsistemas aislados. Un mundo mejor interconectado es, pues, un sistema complejo y al mismo tiempo frágil e inestable. La matemática será, cada vez más, un instrumento de poder cuya fuerza se está subestimando peligrosamente, en amplias capas de la sociedad la matemática sigue viéndose como inútil o una elucubración ociosa.

Jaume Agudé, suplement “Ciencia y Tecnología” de *La Vanguardia*, 30 de gener de 1993.

PRÒLEG

L'elaboració d'aquest text ha vingut donada per la necessitat de cobrir un buit en alguns aspectes de la formació matemàtica, que presenten certs estudiants, quan es matriculen al nostre ensenyament de Psicologia.

Atès el caràcter particular de la nostra disciplina científica, les idees prèvies que tenen els estudiants sobre la Psicologia són molt diverses (podríem parlar de Psicologies i no de Psicologia). En efecte, mentre que un alumne que es matricula a Dret, Química o qualsevol Enginyeria té normalment una idea bastant clara dels continguts que trobarà en la llicenciatura, no passa el mateix en el nostre ensenyament on a vegades no té tan clar quines són les matèries que anirà trobant.

Dins d'aquesta situació alguns estudiants, que potser tenen una idea més “filosòfica” de la psicologia, i per tant que procedeixen d'una formació poc matemàtica, es veuen sorpresos amb el bon nombre d'assignatures de caire metodològic que es van trobant al llarg del seu currículum.

És per omplir aquest buit que es va impulsar la creació de l'assignatura Fonaments Matemàtics en què s'imparteixen algunes de les bases matemàtiques necessàries per poder seguir amb aprofitament assignatures com ara l'Anàlisi de Dades en Psicologia.

La present edició d'aquest text, que teniu a les vostres mans, NO és, per tot el que s'ha dit anteriorment, un manual, sinó en tot cas unes “pinzellades” matemàtiques sense les quals se'ns faria difícil poder entendre matèries de la carrera que precisen d'una base matemàtica prèvia.

El text està estructurat en quatre temes, evidentment se'n podrien haver afegit molts altres, però aquells que pugui necessitar l'alumne de cursos superiors i assignatures especialitzades, els pot trobar en qualsevol dels bons manuals de matemàtiques que es troben en el mercat.

El primer apartat “Introducció al llenguatge matemàtic” constitueix una mena de “calaix de sastre” on hi trobareu teoria de conjunts (allò que fa un temps s'anomenava de forma tan elegant matemàtica moderna), junt amb algunes nocions d'operadors i introducció a les representacions gràfiques cartesianes.

El segon tema fa referència a la probabilitat, veritable “bèstia negra” de molts dels nostres estudiants. En aquest cas s'ha intentat tractar-ho de la forma més senzilla possible, però que a la vegada ens serveixi per poder entendre millor distribucions teòriques de probabilitat, com ara la llei normal, que són de coneixement bàsic en estadística.

El tercer apartat està dedicat a l'estadística descriptiva bàsica. Potser aquest tema és el més conegut de tots quatre, el seu ús està molt difós fins i tot en el domini públic. En efecte, els mitjans de comunicació en van plens, d'estadístiques, representacions gràfiques, etc., encara que això també es pot convertir en una trampa, ja que molts cops, aquesta utilització de l'estadística és plena

d'inexactituds¹. D'altra banda, tot i que la majoria de programes de matemàtiques previs a la llicenciatura inclouen l'estudi de l'estadística, aquesta matèria acostuma a estar en els últims apartats del temari i molts cops, o bé s'hi arriba de forma precipitada o simplement no es fa per manca de temps.

L'últim tema està dedicat a l'àlgebra matricial. Potser aquest és l'apartat en què l'alumne trobarà una menor aplicació immediata, però li serà de molta utilitat en assignatures de cursos més avançats de la llicenciatura, en què intervé l'anàlisi de múltiples variables.

Tots els temes s'han intentat exposar amb el màxim nombre d'exemples i d'exercicis perquè entenem que aquesta és la millor manera que l'estudiant vagi assimilant correctament tots aquests continguts.

No volem acabar aquesta presentació sense haver agraït, molt especialment, el suport que ens han donat els professors Montserrat Freixa, Joan Guàrdia, Juan Antonio Amador, Xavier Rifà i Pere Batallé; tots ells, d'una forma o d'una altra, ens han impulsat a l'elaboració d'aquest text.

També ens trobem en deute amb els alumnes que en cursos anteriors han seguit la nostra assignatura, i que gràcies a les seves preguntes i suggeriments, ens han ajudat a millorar les primeres versions dels documents en què es basa aquest llibre.

Maribel Peró (mpero@psi.ub.es)
Jaume Turbany (jturbany@psi.ub.es)

Dept. de Metodologia de les Ciències del Comportament
Facultat de Psicologia – Divisió de Ciències de la Salut – Universitat de Barcelona

Barcelona, febrer de 2002

“Espero que els nostres néts m'estaran agraïts, no només per les coses que he explicat aquí, sinó també per les que he omès intencionadament amb la finalitat de deixar-los el plaer de descobrir-les.”

René Descartes (1596 - 1650)

¹ Per il·lustrar aquest aspecte i d'una forma molt amena, us recomanem la lectura de qualsevol dels llibres publicats per Tusquets de John Allen Paulos; segur que en traureu molt de profit, en particular:
Paulos, J.A. (1990). *El hombre anumérico*. Metatemas, 20. Barcelona: Tusquets.
Paulos, J.A. (1996). *Un matemático lee el periódico*. Metatemas, 44. Barcelona: Tusquets.

ÍNDEX

TEMA 1. INTRODUCCIÓ AL LLENGUATGE MATEMÀTIC	3
1.1. ÀLGEBRA DE CONJUNTS	3
1.1.1. Principals operacions amb conjunts	5
1.1.2. Alguns conjunts importants	6
1.1.3. Principals lleis de l'àlgebra de conjunts	7
1.1.4. Diagrames de Venn	7
1.1.5. Conjunt producte	11
1.2. OPERADORS SUMATORI, PRODUCTE I DIFERÈNCIA.....	12
1.2.1. Operador sigma	12
1.2.2. Operador pi	16
1.2.3. Operador delta	16
1.3. TÈCNIQUES DE RECOMPTE.....	17
1.3.1. Nombres combinatoris	17
1.3.2. Variacions	18
1.3.3. Permutacions	19
1.4. REPRESENTACIONS GRÀFIQUES	19
1.5. ACTIVITATS PRÀCTIQUES	22
 TEMA 2. PROBABILITATS.....	27
2.1. ESPAI MOSTRAL I ÀLGEBRA DE PROBABILITAT	27
2.1.1. Concepte de probabilitat	28
2.1.2. Teoremes	30
2.2. PROBABILITAT CONDICIONADA I INDEPENDÈNCIA	31
2.2.1. Probabilitat condicionada	31
2.2.2. Independència	32
2.2.3. Teorema de probabilitat total	33
2.2.4. Teorema del producte	34
2.3. TEOREMA DE BAYES	34
2.4. VARIABLES ALEATÒRIES	35
2.4.1. Variables aleatòries discretes	35
2.4.2. Variables aleatòries contínues	37
2.5. MODELS DE PROBABILITAT	39
2.5.1. Models de probabilitat per a variables aleatòries discretes: binomial i Poisson.....	39
2.5.2. Models de probabilitat per a variables aleatòries contínues: distribució normal o de Gauss-Laplace	42
2.5.3. Aproximació a la normal de les distribucions binomial i Poisson	45
2.6. ACTIVITATS PRÀCTIQUES	47
 TEMA 3. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA BÀSICA.....	61
3.1. TIPUS DE VARIABLES I ESCALES DE MESURA.....	61

3.2. DESCRIPCIÓ D'UNA VARIABLE QUALITATIVA	63
3.2.1. Obtenció de la taula de freqüències	63
3.2.2. Descripció gràfica: diagrama de barres i ciclograma	65
3.3. DESCRIPCIÓ CONJUNTA DE DUES VARIABLES QUALITATIVES: CONSTRUCCIÓ D'UNA TAULA DE CONTINGÈNCIA.....	68
3.4. DESCRIPCIÓ D'UNA VARIABLE QUANTITATIVA	69
3.4.1. Indicadors resum	70
3.4.2. Descripció gràfica:	78
3.5. DESCRIPCIÓ CONJUNTA DE DUES VARIABLES QUANTITATIVES: COVARIÀNCIA I COEFICIENT DE CORRELACIÓ DE PEARSON.....	83
3.6. ACTIVITATS PRÀCTIQUES	86
TEMA 4. ÀLGEBRA MATRICIAL	93
4.1. CONCEPTE DE Matriu	93
4.2. PRINCIPALS TIPUS DE Matrius	93
4.3. OPERACIONS AMB Matrius	95
4.3.1. Suma de matrius	95
4.3.2. Multiplicació de matrius per un escalar	95
4.3.3. Multiplicació de matrius	96
4.3.4. Traça d'una matriu	97
4.4. DETERMINANT D'UNA Matriu	97
4.4.1. Menors complementaris i adjunts	99
4.5. Matriu INVERSA	101
4.5.1. Càlcul de la inversa d'una matriu	102
4.6. CÀLCULS ESTADÍSTICS UTILITZANT L'ÀLGEBRA MATRICIAL	103
4.7. UTILITZACIÓ DE Matrius EN LA RESOLUCIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS	107
4.8. ACTIVITATS PRÀCTIQUES	109
BIBLIOGRAFIA	115
ANNEX: TAULES D'ESTADÍSTICA.....	117

TEMA 1. INTRODUCCIÓ AL LENGUATGE MATEMÀTIC

"¿Com explicar que les matemàtiques, un producte de la ment humana, independent de l'experiència, s'adapti tan admirablement bé als objectes de la realitat?"
Albert Einstein (1879 – 1955)

Aquest primer capítol constitueix un calaix de sastre on té cabuda un determinat nombre de conceptes necessaris per al desenvolupament de temes posteriors. De fet, molts dels conceptes que s'expliquen en aquest tema podrien estar en el capítol de probabilitats a manera d'introducció. El capítol es pot diferenciar clarament en dos grans apartats, d'una banda tot el que fa referència a l'àlgebra de conjunts i d'altra banda conceptes de caire operatiu, com poden ser l'operador sumatori, els nombres combinatoris, etc.

1.1. ÀLGEBRA DE CONJUNTS

S'entén per conjunt tota llista o col·lecció d'objectes perfectament definida. Cadascun dels objectes que formen part del conjunt rep el nom d'*element*.

La definició de quins són els elements que formen part d'un conjunt es pot fer per extensió o bé per comprensió. La definició per extensió implica l'enumeració de tots i cadascun dels elements que formen part del conjunt, mentre que la definició per comprensió implica l'establiment d'una regla lògica que ens permeti determinar quins són els elements que formen part d'aquell conjunt.

Per exemple, el conjunt A queda definit per extensió i per comprensió de la manera següent:

Extensió: $A = \{a, e, i, o, u\}$

Comprensió: $A = \{x : x \text{ és una vocal de l'alfabet castellà}\}$

Alguns dels símbols molt emprats en l'àmbit de l'àlgebra de conjunts són el de pertinença, el d'igualtat i el de subconjunt. A continuació s'explica el que vol dir cadascun d'ells.

- Es diu que $a \in A$ si l'element a forma part del conjunt A .
Si es defineix el conjunt A com: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, es pot dir que $3 \in A$.
- Es diu que $A = B$ quan A i B són el mateix conjunt.
Si es defineix el conjunt A com: $A = \{1, 2, 3\}$ i el conjunt B com: $B = \{1, 2, 3\}$, es pot dir que $A = B$.
- Es diu que $A \subset B$ si el conjunt A és un subconjunt del conjunt B . És a dir que A és un subconjunt de B si tots els elements del conjunt A estan inclosos al conjunt B . Això últim quedaria simbolitzat de la manera següent: si $a \in A$ implica que $(\Rightarrow) a \in B$.

Un exemple de subconjunts seria el que es pot formar entre el conjunt dels nombres naturals ($\mathbf{N}$), el dels enters ($\mathbf{Z}$) i el dels reals ($\mathbf{R}$). $\mathbf{N}$ són tots els enters positius (sense incloure el 0), $\mathbf{Z}$ són tots els nombres enters, tant positius com negatius inclòs el 0, i $\mathbf{R}$ són tots els nombres reals (enters i trencats). En conseqüència $\mathbf{N}$ és un subconjunt de $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Z}$ és un subconjunt de $\mathbf{R}$. Aquesta relació queda expressada a continuació:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$$

Per definir els elements que formen part d'un conjunt determinat dels nombres reals es fa a partir d'interval·ls sobre la recta real. A continuació es mostra quins són els interval·ls més usuals:

- Interval obert de a a b : (a, b) o $]a, b[= \{x: a < x < b\} \rightarrow$ Els elements a i b no estan inclosos en l'interval.
Exemple: l'interval $(2, 11)$ recull tots els nombres reals que van de 2 a 11 però sense incloure aquests dos valors.
- Interval tancat de a a b : $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\} \rightarrow$ Els elements a i b estan inclosos en l'interval.
Exemple: l'interval $[2, 11]$ recull tots els nombres reals que van de 2 a 11 inclusivament.
- Interval obert-tancat de a a b : $(a, b]$ o $]a, b] = \{x: a < x \leq b\} \rightarrow$ L'element a no pertany a l'interval, però l'element b sí.
Exemple: l'interval $(2, 11]$ recull tots els nombres reals que van de 2 a 11 sense incloure el 2 però incloent l'11.
- Interval tancat-obert de a a b : $[a, b)$ o $[a, b[= \{x: a \leq x < b\} \rightarrow$ L'element a pertany a l'interval, però l'element b no.
Exemple: l'interval $[2, 11)$ recull tots els nombres reals que van de 2 a 11 incloent el 2 però sense incloure l'11.

Els símbols de pertinença, igualtat i subconjunt tenen les seves negacions, que són:

- $a \notin A$. El que vol dir que l'element a no forma part del conjunt A .
Continuant amb l'exemple en què s'ha definit A com: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, es pot dir que $8 \notin A$.
- $A \neq B$. El que vol dir que el conjunt A no és igual al conjunt B , els elements del conjunt A no són els mateixos que els del conjunt B .
Exemple: si es defineix A com: $A = \{1, 3, 5\}$ i B com: $B = \{1, 2, 3\}$, es pot dir que $A \neq B$.
- $A \not\subset B$. El que vol dir que el conjunt A no és un subconjunt del conjunt B . És a dir, un o més elements del conjunt A no estan inclosos al conjunt B .
Exemple: si es defineix A com: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i B com: $B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$, es pot dir que $A \not\subset B$.

Tots els conjunts són subconjunts d'un conjunt fix anomenat *conjunt universal*, U . Aquest conjunt conté tots els elements possibles (infinitos).

En contraposició al conjunt universal, existeix el conjunt buit, $\emptyset$, que és aquell conjunt que no té elements. El conjunt buit és un subconjunt de qualsevol conjunt.

L'expressió següent resumiria l'expressat en les últimes línies:

$$\emptyset \subset A \subset U$$

1.1.1. Principals operacions amb conjunts

- **Diferència ($A - B$).** El conjunt diferència entre el conjunt A i el conjunt B està format pels elements que corresponen al conjunt A però que no formen part del conjunt B .

Exemple: donats els conjunts:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ i } B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

La diferència entre el conjunt A i el B està formada pels elements: $\{2, 4, 6\}$

Aquesta diferència queda definida per l'expressió següent:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

S'ha de tenir en compte que la diferència entre dos conjunts no compleix la llei commutativa, el que queda expressat com:

$$A - B \neq B - A$$

Així doncs, $B - A$ està format pels elements: $\{7, 9\}$, és a dir aquells elements que pertanyen al conjunt B però no al conjunt A ($B - A = \{x \mid x \in B \text{ i } x \notin A\}$).

Operacions força habituals amb conjunts són la *unió* ($\cup$) i la *intersecció* ($\cap$).

- **Unió ($\cup$).** La unió de dos conjunts està formada per l'agrupació dels elements de tots dos conjunts.

Exemple: donats els conjunts:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ i } B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

La unió dels dos conjunts és: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

La unió de dos conjunts queda definida per l'expressió següent:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

- **Intersecció ($\cap$).** La intersecció de dos conjunts està formada pels elements que pertanyen alhora als dos conjunts.

Exemple: donats els conjunts:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ i } B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

La intersecció dels dos conjunts és: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$

La intersecció de dos conjunts queda definida per l'expressió següent:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Aquestes dues operacions que s'han exemplificat per al cas de treballar amb dos conjunts, es poden utilitzar en el cas de treballar amb més de dos conjunts i es poden utilitzar també combinades entre si.

Exemple: donats els conjunts

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

- El primer pas és fer l'operació de dins del parèntesi: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
- El segon pas és fer la unió del conjunt resultant de la intersecció anterior i el conjunt C:

$$C \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$(C \cup A) \cap B = \{1, 3, 5\}$$

- El primer pas és fer l'operació de dins del parèntesi: $C \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
- El segon pas és fer la intersecció del conjunt resultant de la unió i el conjunt B: $(C \cup A) \cap B = \{1, 3, 5\}$

1.1.2. Alguns conjunts importants

D'altra banda existeixen un seguit de tipus de conjunts importants a tenir en compte:

- **Conjunt complementari (A^C).** És aquell conjunt format per tots els elements del conjunt universal menys els que pertanyen al conjunt A ($U - A$). El conjunt complementari del conjunt A queda definit per l'expressió següent:

$$A^C = \{x \mid x \in U \text{ i } x \notin A\}$$

- **Complement relatiu de B amb referència a A ($A \setminus B$).** És el conjunt que està format per tots els elements que pertanyen a A però que no pertanyen a B . En realitat és la diferència entre el conjunt A i el conjunt B ($A - B$). Queda definit per l'expressió següent:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

- **Conjunts disjunts.** Es diu que dos o més conjunts són disjunts quan no tenen elements en comú, és a dir, la intersecció és igual al conjunt buit ($A \cap B = \emptyset$).

Donats els conjunts:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Es pot dir que els conjunts B i C són disjunts perquè no tenen elements en comú, però el conjunt A no, perquè té elements en comú tant amb el conjunt B com amb el C .

1.1.3. Principals lleis de l'àlgebra de conjunts

Les lleis bàsiques de l'àlgebra de conjunts queden recollides en la taula següent:

Tipus	Lleis
Associativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutativa:	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De complement:	$A \cup A^c = U$ $U^c = \emptyset$ $A \cap A^c = \emptyset$ $\emptyset^c = U$
De Morgan:	1a llei: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 2a llei: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

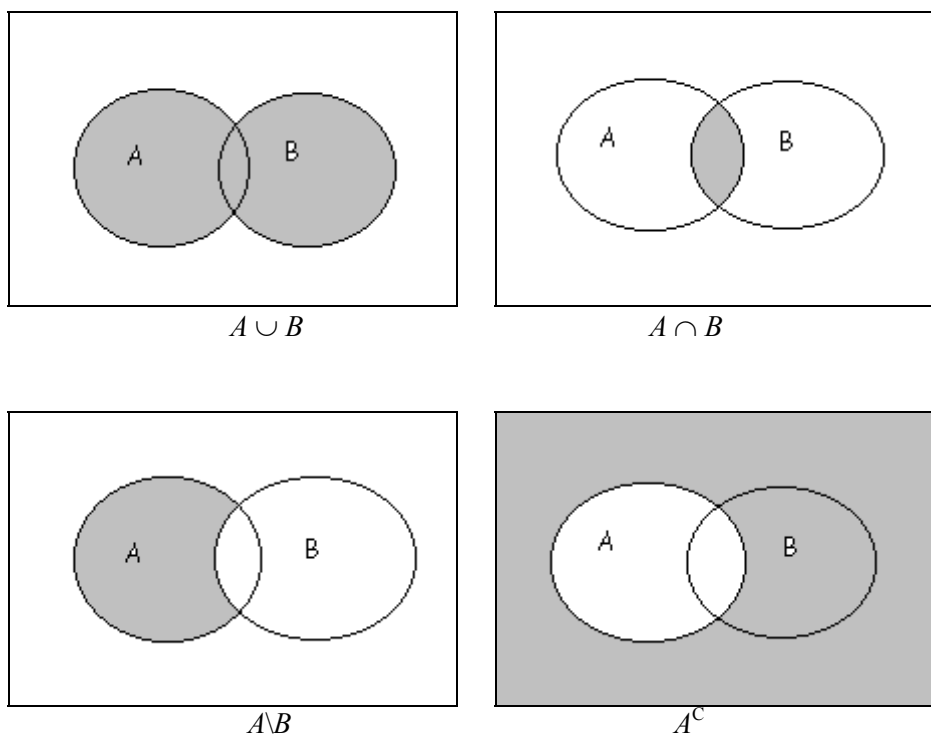
1.1.4. Diagrames de Venn

Els diagrames de Venn (John Venn, 1834-1923) són un tipus de representació gràfica que permeten expressar mitjançant dibuixos diferents operacions o expressions amb conjunts.

Les operacions d'unió, intersecció, així com el complementari relatiu i el complementari queden representats a continuació a partir de diagrames de Venn.



John Venn

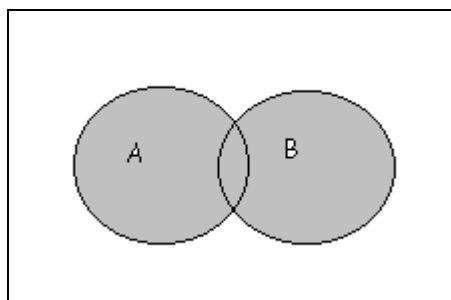


La comprovació de les lleis de Morgan (Augustus de Morgan, 1806 – 1871) a partir de diagrames de Venn es mostra a continuació:

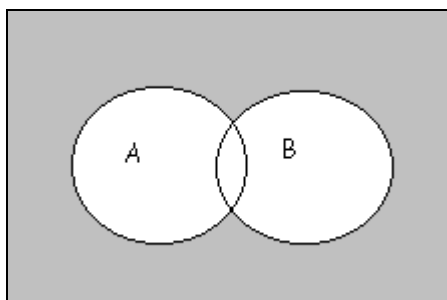
▪ **Primera llei:** $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Els passos per construir el diagrama de Venn per a l'expressió de l'esquerra de la igualtat, és a dir $(A \cup B)^C$, són:

1r. Representar la unió dels dos conjunts $(A \cup B)$:

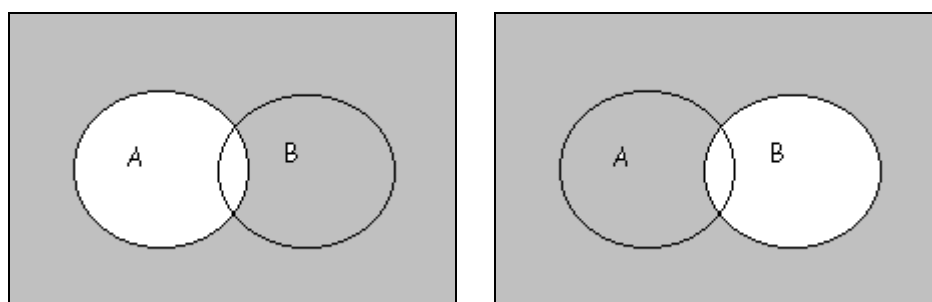


2n. Representar el complementari d'aquesta unió $(A \cup B)^C$ que correspon a la part no pintada de la figura anterior:

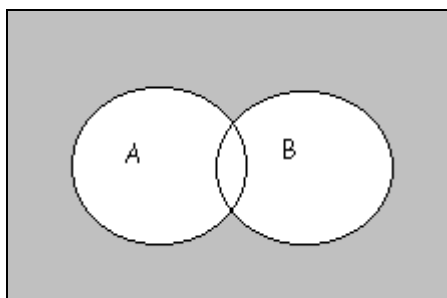


Els passos per construir el diagrama de Venn per l'expressió de la dreta de la igualtat $A^C \cap B^C$ són:

1r. Representar el complementari de A (A^C) i el de B (B^C):



2n. Representar la intersecció dels dos complementaris ($A^C \cap B^C$), que correspon a la zona que està pintada en els dos dibuixos a la vegada (el que no és ni A ni B):

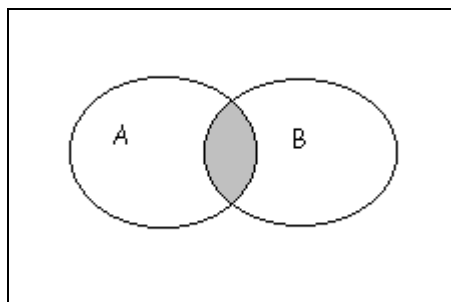


Aquesta representació és la mateixa que l'obtinguda en el segon pas de l'expressió de l'esquerra. En conseqüència queda demostrada la llei de Morgan per l'expressió: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

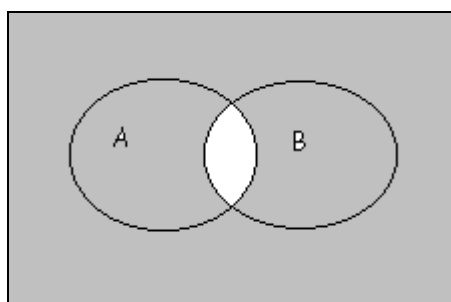
▪ **Segona llei:** $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Com en la primera llei de Morgan els passos per demostrar la igualtat en la segona llei a partir de diagrames de Venn són els mateixos. Per a l'expressió de l'esquerra són:

1r. Representar la intersecció dels conjunts A i B ($A \cap B$):

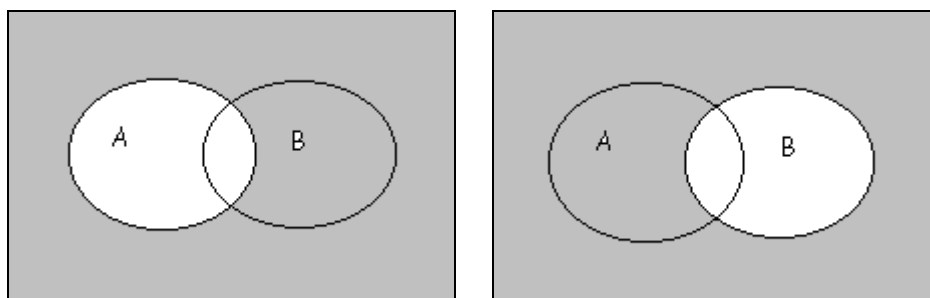


2n. Representar el complementari de la intersecció anterior $(A \cap B)^C$, que correspon a la part no pintada de la figura anterior:

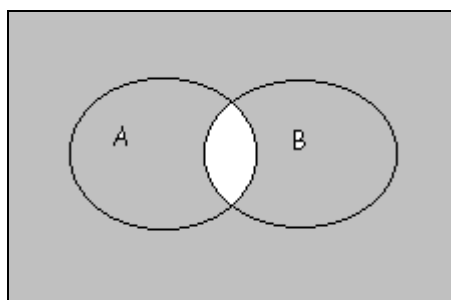


Els passos a seguir per representar la part dreta de la igualtat, $A^C \cup B^C$, són:

1r. Representar el complementari del conjunt A i el del conjunt B :



2n. Representar la unió dels dos complementaris anteriors, $A^C \cup B^C$, que correspon a la suma de les parts pintades en les dos figures anteriors:



Aquesta última figura és la mateixa que la del segon pas per a l'expressió de l'esquerra. En conseqüència queda demostrada la segona llei de Morgan, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.1.5. Conjunt producte

Donats els conjunts A i B , el conjunt producte d' A i B s'expressa com $A \times B$ i està format per totes les parelles ordenades (a, b) on $a \in A$ i $b \in B$:

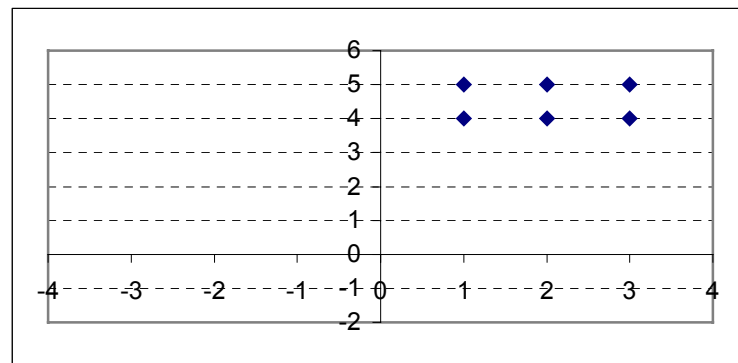
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Exemple: donats els conjunts

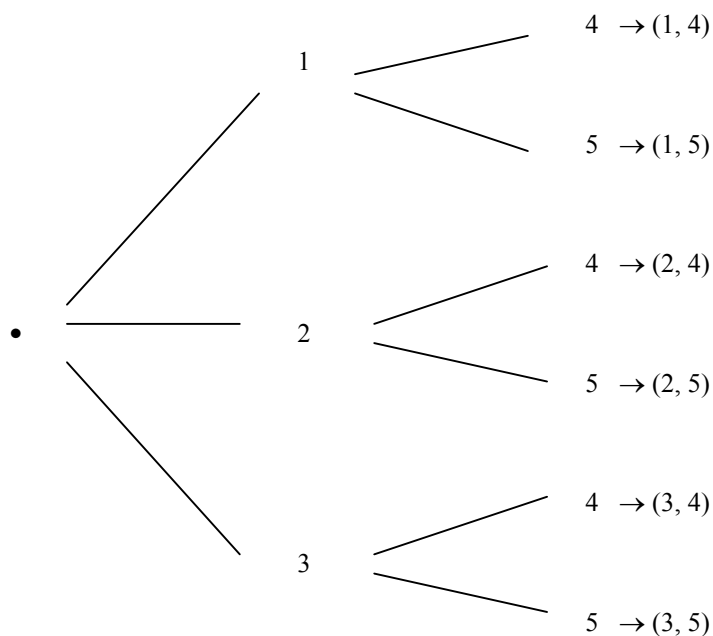
$$A = \{1, 2, 3\} \text{ i } B = \{4, 5\}$$

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4) \text{ i } (3, 5)\}$$

Aquest conjunt producte es pot representar gràficament en uns eixos de coordenades tal com es mostra a continuació:



La representació en diagrama d'arbre d'aquest conjunt producte és:



En el cas de trobar el conjunt producte de tres conjunts en comptes de parelles es disposaria de triplets:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c), a \in A, b \in B, c \in C\}$$

1.2. OPERADORS SUMATORI, PRODUCTE I DIFERÈNCIA

Es presenten tres operadors utilitzats en l'àmbit de l'estadística, a saber, l'operador sumatori, l'operador producte i l'operador diferència, sent el més usat dels tres, l'operador sumatori.

1.2.1. Operador sigma

El sumatori queda simbolitzat per la lletra grega sigma majúscula (Σ). Aquest operador indica que s'han de sumar tots els valors compresos entre dos ordres determinats.

Per exemple, el pes de cinc subjectes es mostra a la taula següent:

Subjecte	Pes (X_i)
1	53
2	62
3	55
4	70
5	66

L'expressió $\sum_{i=1}^n X_i$ indica la suma del pes des del subjecte 1 fins al subjecte 5. Aquest sumatori és: $53 + 62 + 55 + 70 + 66 = 306$

L'expressió $\sum_{i=2}^{n=4} X_i = 62 + 55 + 70 = 187$ ja que es demana sumar el pes des del subjecte 2 fins al subjecte 4.

Generalment l'operador sumatori va des del primer fins a l'últim subjecte, i per defecte s'escriu només la sigma (Σ).

És important tenir en compte l'ordre de les operacions realitzades. Algunes expressions amb el sumatori no mantenen una relació d'igualtat amb altres de semblants. A continuació es presenta una llista de les més importants a considerar:

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

Donat que:

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2$$

Per a les dades de l'exemple anterior seria:

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = 53^2 + 62^2 + 55^2 + 70^2 + 66^2 = 18934$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = (53 + 62 + 55 + 70 + 66)^2 = 306^2 = 93636$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \neq \sum_{i=1}^n X_i \cdot \sum_{i=1}^n Y_i$$

Donat que:

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i = X_1 \cdot Y_1 + X_2 \cdot Y_2 + \dots + X_n \cdot Y_n$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot \sum_{i=1}^n Y_i = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \cdot (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)$$

A la taula següent a més a més del pes es mostra l'edat dels cinc subjectes

Subjecte	Pes (X _i)	Edat (Y _i)
1	53	25
2	62	30
3	55	33
4	70	28
5	66	31

Per a aquestes dades seria:

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i = 53 \cdot 25 + 62 \cdot 30 + 55 \cdot 33 + 70 \cdot 28 + 66 \cdot 31 = 9006$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot \sum_{i=1}^n Y_i = (53 + 62 + 55 + 70 + 66) \cdot (25 + 30 + 33 + 28 + 31) = 306 \cdot 147 = 44982$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i \cdot Y_i)^2 \neq \left(\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \right)^2$$

Donat que:

$$\sum_{i=1}^n (X_i \cdot Y_i)^2 = (X_1 \cdot Y_1)^2 + (X_2 \cdot Y_2)^2 + \dots + (X_n \cdot Y_n)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \right)^2 = (X_1 \cdot Y_1 + X_2 \cdot Y_2 + \dots + X_n \cdot Y_n)^2$$

Per a les dades anteriors seria:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i \cdot Y_i)^2 &= (53 \cdot 25)^2 + (62 \cdot 30)^2 + (55 \cdot 33)^2 + (70 \cdot 28)^2 + (66 \cdot 31)^2 = \\ &1325^2 + 1860^2 + 1815^2 + 1960^2 + 2046^2 = 1755625 + 3459600 + \\ &3294225 + 3841600 + 4186116 = 16537166 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \right)^2 &= (53 \cdot 25 + 62 \cdot 30 + 55 \cdot 33 + 70 \cdot 28 + 66 \cdot 31)^2 = \\ &(1325 + 1860 + 1815 + 1960 + 2046)^2 = 9006^2 = 81108036 \end{aligned}$$

També cal tenir en compte algunes identitats que es manifesten a l'hora d'aplicar l'operador sumatori, i que es mostren a continuació:

$$\blacksquare \quad \sum_{i=1}^n c X_i = c \sum_{i=1}^n X_i$$

Donat que:

$$\sum_{i=1}^n c X_i = c X_1 + c X_2 + \dots + c X_n = c (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

$$c \sum_{i=1}^n X_i = c (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

on c és una constant qualsevol.

Si el valor de la constant es fixa a 3, a partir de les dades de l'exemple anterior es té:

$$\sum_{i=1}^n c X_i = 3 \cdot 53 + 3 \cdot 62 + 3 \cdot 55 + 3 \cdot 70 + 3 \cdot 66 = 918$$

$$c \sum_{i=1}^n X_i = 3 \cdot (53 + 62 + 55 + 70 + 66) = 918$$

$$\blacksquare \quad \sum_{i=1}^n c = n \cdot c$$

En aquest cas si la constant és 5, treballant amb una mostra de grandària 7 seria:

$$\begin{aligned} (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) &= 7 \cdot 5 \\ 35 &= 35 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)$$

Donat que:

$$\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \dots + (X_n + Y_n)$$

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \dots + (X_n + Y_n)$$

ja que per a la suma es compleix la llei associativa.

Per a les dades anteriors seria:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i &= (53 + 62 + 55 + 70 + 66) + (25 + 30 + 33 + 28 + 31) = 306 + 147 \\ &= 453 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) &= (53 + 25) + (62 + 30) + (55 + 33) + (70 + 28) + (66 + 31) = \\ &78 + 92 + 88 + 98 + 97 = 453 \end{aligned}$$

De les tres anteriors es conclou que:

$$\blacksquare \quad \sum_{i=1}^n (X_i + c) = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n c = \sum_{i=1}^n X_i + n \cdot c$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \sum_{i=1}^n (X_i + c)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 + 2 X_i c + c^2) = \\ &\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n 2 X_i c + \sum_{i=1}^n c^2 = \\ &\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 c \sum_{i=1}^n X_i + n c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 + 2 X_i Y_i + Y_i^2) = \\ &\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i + \sum_{i=1}^n Y_i^2 \end{aligned}$$

1.2.2. Operador pi

L'operador producte queda simbolitzat per la lletra grega pi majúscula (Π). El que indica aquest operador és que s'ha de multiplicar des del primer a l'últim valor de la sèrie corresponent. Tal com succeeix amb el sumatori, s'indica des de quin valor fins a quin valor s'ha de fer el producte $\prod_{i=1}^n$

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

Per a les dades emprades en l'exemple de l'operador sumatori seria:

- Variable pes: $\prod_{i=1}^n X_i = 53 \cdot 62 \cdot 55 \cdot 70 \cdot 66 = 834972600$
- Variable edat: $\prod_{i=1}^n Y_i = 25 \cdot 30 \cdot 33 \cdot 28 \cdot 31 = 21483000$

1.2.3. Operador delta

Un altre operador especialment emprat en sèries de dades longitudinals és l'operador delta, Δ . Aquest operador el que fa és restar al primer valor el segon, al segon el tercer, i així fins a l'últim valor. Per tant, es perd un valor respecte a la sèrie inicial.

$$\Delta_{i=1}^n = (X_2 - X_1, X_3 - X_2, \dots, X_n - X_{n-1})$$

Aquest operador permet detectar si la sèrie de dades és estacionària (els valors obtinguts seran de 0), si la sèrie és creixent (els valors obtinguts seran positius) o bé si la sèrie és decreixent (els valors obtinguts seran negatius).

Per exemple, es disposa de sis mesures realitzades en una persona que està dins d'un programa de reducció de pes, les mesures es mostren a continuació:

Pes: 74 – 70 – 70 – 69 – 72 – 70

$$\Delta_{i=1}^n = (70 - 74, 70 - 70, 69 - 70, 72 - 69, 70 - 72) = (-4, 0, -1, 3, -2)$$

En la sèrie anterior s'hi pot observar una certa inestabilitat.

Tal com s'ha explicat, l'operador delta implica un retard, és a dir que es resten els valors immediatament anteriors, però també es pot utilitzar per a dos retards (es resten els valors que ocupen dos posicions anteriors), tres retards (es resten els valors que ocupen tres posicions anteriors), etc.

1.3. TÈCNIQUES DE RECOMPTE

Les tècniques de recompte permeten determinar el nombre d'esdeveniments o successos sense necessitat d'enumerar-los.

1.3.1. Nombres combinatoris

Els nombres combinatoris determinen la quantitat d'agrupacions que es poden fer de n elements agafats de k en k . De forma que dues agrupacions seran diferents si un o més elements que la componen són diferents. L'expressió que s'utilitza és la següent:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

on $n!$, $k!$ i $(n-k)!$ s'anomenen factorial de n , de k i de $n-k$ respectivament i que consisteix a anar multiplicant el nombre inicial restant-ne cada vegada un fins a arribar a l'1. El seu desenvolupament és:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \\ k! &= k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1 \\ (n-k)! &= (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \dots \cdot 1 \end{aligned}$$

És important tenir en compte que:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ \frac{n!}{n! \cdot 0!} &= 1 \end{aligned}$$

La tècnica de les combinacions va ser desenvolupada per diversos autors, entre ells Pascal (Blaise Pascal, 1623-1662). A la figura adjunta es mostra el famós triangle de Pascal.

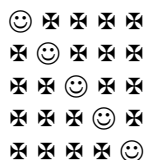
Triangle de Pascal											
n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Per exemple, si es vol determinar quantes combinacions es poden obtenir en llançar una moneda cinc cops i que només en un dels llançaments surti cara, s'ha de trobar el nombre combinatori:

$$C_5^1 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$$

El mateix valor que es representa a la taula de coeficients combinatoris de l'annex.

Aquesta situació és fàcil de reproduir gràficament i obtenir totes les combinacions possibles:



És possible que sigui la primera moneda la que surti cara i en conseqüència les quatre restants creu, o bé que sigui la segona, o la tercera, o la quarta o bé la cinquena.

Ara bé, en el cas que k sigui 2 o 3, el nombre de combinacions possibles augmenta; tant per a $k = 2$ com per a $k = 3$ és de 10. En aquestes situacions si es representa gràficament el nombre de combinacions possibles és fàcil deixar-se'n alguna, i per això són útils els nombres combinatoris. Això també succeeix quan n augmenta de valor. Per exemple el nombre de combinacions de set elements agafats de quatre en quatre és:

$$C_7^4 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

El mateix valor que es representa a la taula de coeficients combinatoris de l'annex.

1.3.2. Variacions

Les variacions permeten calcular la quantitat d'agrupacions que es poden fer de n elements agafats de k en k . Cada subgrup es diferenciarà de l'altre tant pels seus elements, com per l'ordre que ocupen.

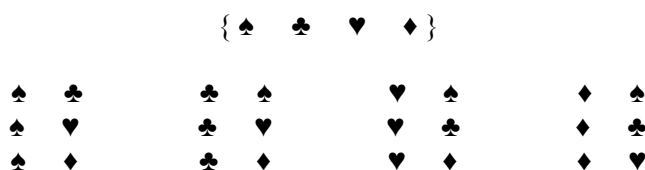
L'expressió de càlcul és la següent:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Per exemple, es vol determinar quantes variacions es poden trobar en agrupar quatre elements en subgrups de dos:

$$V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$$

Gràficament, si es pensa en les cartes d'una baralla, pot ser:



1.3.3. Permutacions

Les permutacions permeten calcular les possibles agrupacions que es poden establir entre els n elements d'un grup. Cada agrupació es diferencia de les altres per l'ordre dels n elements.

El càlcul de les permutacions es fa a partir de la fórmula següent:

$$P_n = n!$$

Per exemple, de quantes formes possibles es poden agrupar tres elements?

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Si es fa de forma gràfica:

{ \$ £ € }		
\$	£	€
\$	€	£
£	€	\$
£	\$	€
€	\$	£
€	£	\$

1.4. REPRESENTACIONS GRÀFIQUES

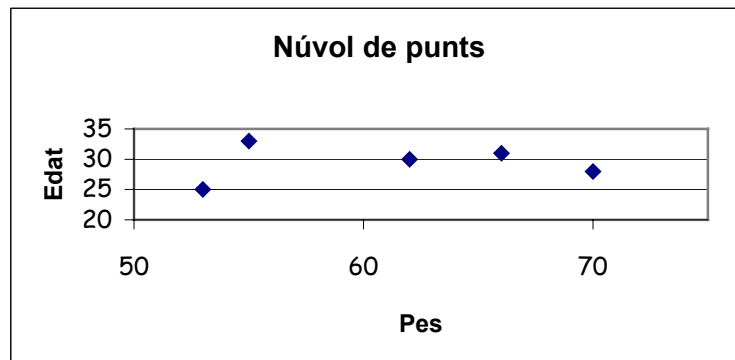
En moltes situacions pot interessar representar gràficament un conjunt de dades.

Una de les representacions gràfiques més emprades és el núvol de punts, que consisteix en la representació conjunta de dos variables quantitatives, com poden ser el pes i l'alçada, en uns eixos de coordenades. En l'eix d'abscisses o eix de les X es representen els valors d'una de les variables i en l'eix d'ordenades o eix de les Y es representen els valors de l'altra variable. El gràfic es construeix marcant els punts corresponents per a cada subjecte en els eixos en funció de les coordenades que vénen donades pels valors que tenen en les variables a representar.

Si es recuperen les dades emprades en l'apartat dels operadors sumatori i producte que es tornen a reproduir a continuació:

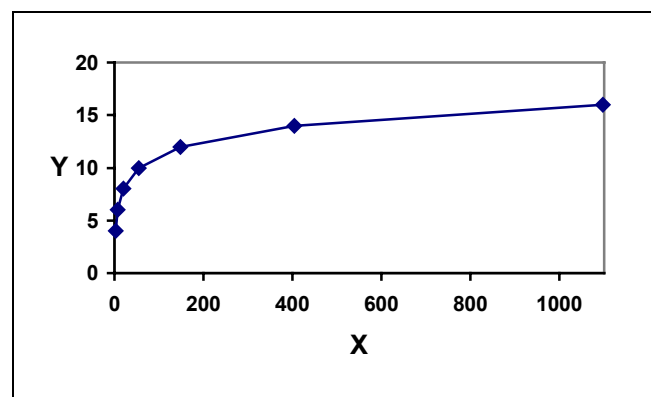
Subjecte	Pes (X_i)	Edat (Y_i)
1	53	25
2	62	30
3	55	33
4	70	28
5	66	31

La representació gràfica de les variables pes i edat conjuntament s'ha de fer a partir del núvol de punts.

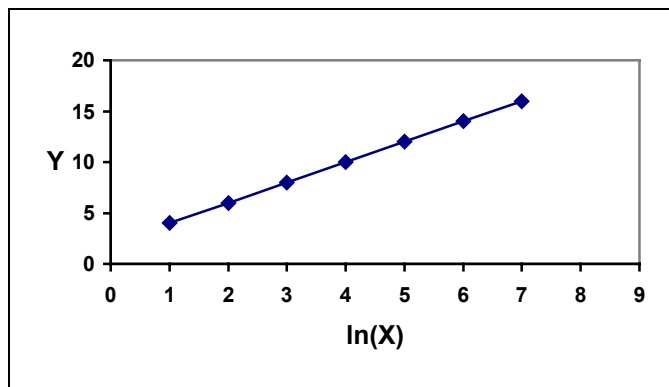


El primer punt del gràfic correspon a la representació del primer subjecte (53 kg i 25 anys) mentre que l'últim punt del gràfic correspon al quart subjecte (70 kg i 28 anys).

En fer la representació gràfica es pot veure com es comporten les dades. Per exemple en el gràfic següent es veu l'existència d'una relació no lineal entre la variable X i la variable Y.

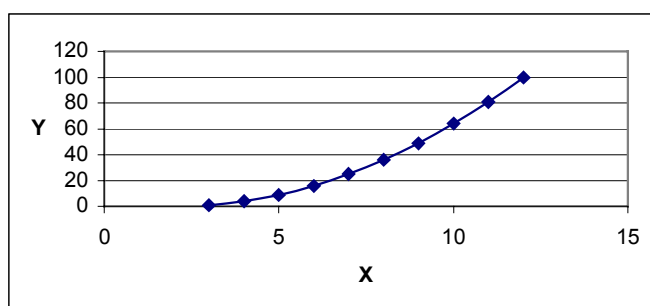


Si interessa que la relació entre les dues variables sigui lineal es pot fer una transformació de les dades. Una transformació logarítmica de la variable X, en concret el logaritme neperià ($\ln$), mostraria una relació lineal:

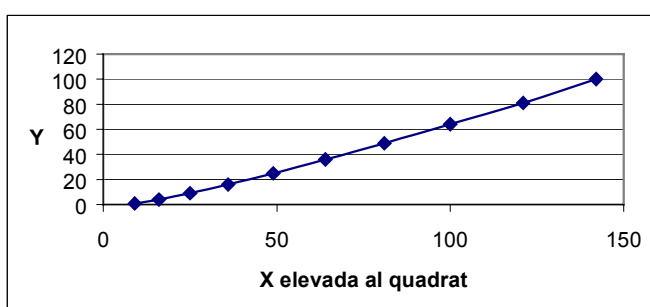


Amb aquesta transformació s'ha reduït l'escala de la variable X, fet que en termes estadístics es coneix com a reducció de la variabilitat.

Una altra representació gràfica que necessita un tipus diferent de transformació per aconseguir una relació lineal entre les dues variables es mostra a continuació:



En aquest cas la transformació adient perquè la relació sigui lineal consisteix a elevar al quadrat els valors de la variable X, sent en aquest cas la gràfica la següent:



Amb aquesta transformació s'ha augmentat l'escala de la variable X, fet que en termes estadístics s'anomena augment de la variabilitat.

Hi ha molts tipus de transformacions de les dades que es poden emprar en funció del que interressi obtenir.

Per finalitzar aquest tema es mostra una taula amb els principals símbols que hi han aparegut.

Símbol	Significat
$\in$	Pertany
$\notin$	No pertany
$\subset$	Subconjunt
$\not\subset$	No subconjunt
$=$	Igualtat
$\neq$	Desigualtat
$ $	Tal que
U	Conjunt univers
$\emptyset$	Conjunt buit
A^c	Conjunt complementari
$A \setminus B$	Complementari relatiu de B amb referència a A ($A - B$)
$\cup$	Unió
$\cap$	Intersecció
$A \times B$	Conjunt producte
$\sum_{i=1}^n X_i$	Operador sumatori
$\prod_{i=1}^n X_i$	Operador producte
$\Delta_{i=1}^n X_i$	Operador delta
C_n^k	Nombre combinatori de n elements agafats de k en k
$n!$	n factorial

1.5. ACTIVITATS PRÀCTIQUES

1. Sigui:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$D = \{a, e, i, o, u\}$$

Definiu per comprensió els conjunts anteriorment enumerats.

Solució:

$$A = \{x : x \text{ és un nombre } \mathbf{N} \text{ inferior a } 10\} \rightarrow A = \{x \in A \mid x \in \mathbf{N} < 10\}$$

$$B = \{x : x \text{ és un nombre } \mathbf{N} \text{ parell inferior a } 10\} \rightarrow B = \{x \in B \mid x \in \mathbf{N} \text{ parell} < 10\}$$

$$C = \{x : x \text{ és un nombre } \mathbf{N} \text{ senar inferior a } 10\} \rightarrow C = \{x \in C \mid x \in \mathbf{N} \text{ senar} < 10\}$$

$$D = \{x : x \text{ és una vocal}\} \rightarrow D = \{x \in D \mid x \in \text{vocal}\}$$

2. Sigui:

$$A = \{x : x^2 = 25\}$$

$$B = \{x : x \text{ és una vocal de la paraula Psicologia}\}$$

$$C = \{x : x \text{ és un nombre } \mathbf{N} \text{ inferior a } 12\}$$

$$D = \{x : x \text{ és una consonant de la paraula aprenentatge}\}$$

Definiu per extensió els conjunts anteriorment enumerats.

Solució:

$$A = \{-5, 5\}$$

$$B = \{a, i, o\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$D = \{p, r, n, t, g\}$$

3. Escriviu amb notació de conjunts.

a) a és un element del conjunt A .

b) B és un subconjunt de A .

c) El complementari de A .

d) a no pertany al conjunt B .

Solució:

a) $a \in A$

b) $B \subset A$

c) A^c

d) $a \notin B$

4. Donats els conjunts:

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12\}$$

$$B = \{3, 5, 11, 13, 15, 17\}$$

$$C = \{4, 5, 11, 21\}$$

Trobeu:

a) $A \cup B$

b) $A \cap C$

c) $B \cup C$

d) $C \cup A$

e) $B \cap A$

f) $A \setminus C$

Solució:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17\}$

b) $A \cap C = \{4, 5, 11\}$

c) $B \cup C = \{3, 4, 5, 11, 13, 15, 17, 21\}$

d) $C \cup A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 21\}$

e) $B \cap A = \{5, 11\}$

f) $A \setminus C = \{1, 2, 7, 8, 9, 12\}$; (pertanyen a A però no a C)

5. Sigui l'espai mostral Ω definit com $\Omega = \{x : x \text{ és qualsevol lletra minúscula de l'alfabet}\}$ i sigui $A = \{x : x \text{ és el conjunt de totes les consonants escrites amb minúscula}\}$. Definiu per extensió i per comprensió A^c .

Solució:

a) per extensió: $A^c = \{a, e, i, o, u\}$

b) per comprensió: $A^c = \{x : x \text{ és una vocal minúscula}\}$

6. Donats els conjunts següents:

$$A = \{11, 12, 25, 26\}$$

$$B = \{2, 4, 5, 7, 11\}$$

$$C = \{-9, -3, -2, 0, 4, 6, 7, 11, 13\}$$

Trobeu per a cadascun dels conjunts el sumatori de tots els seus elements $\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)$

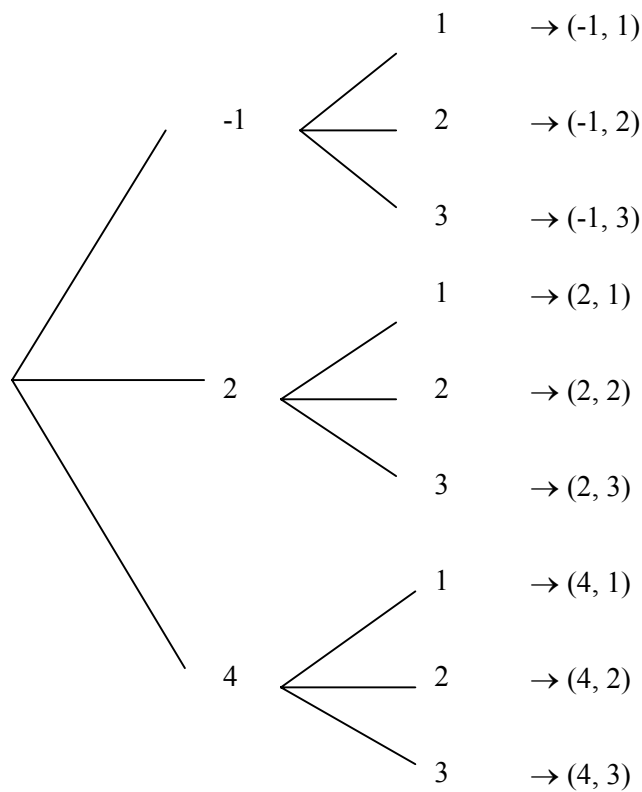
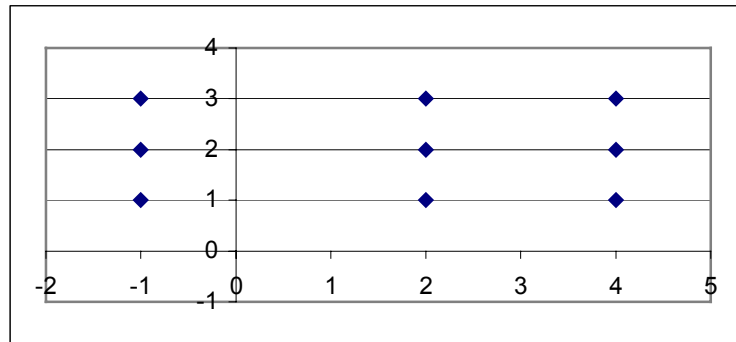
Solució:

$$a) \sum_{i=1}^{i=4} x_i = 74$$

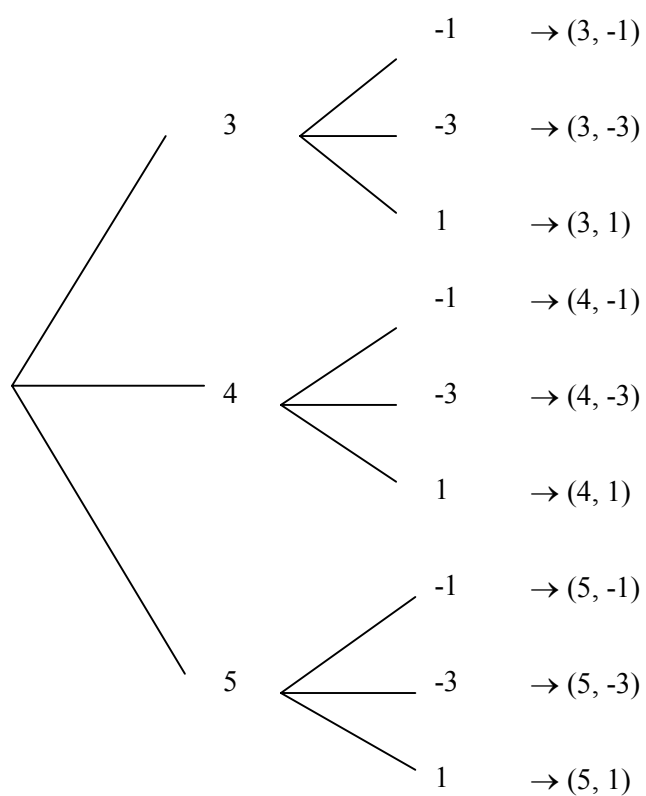
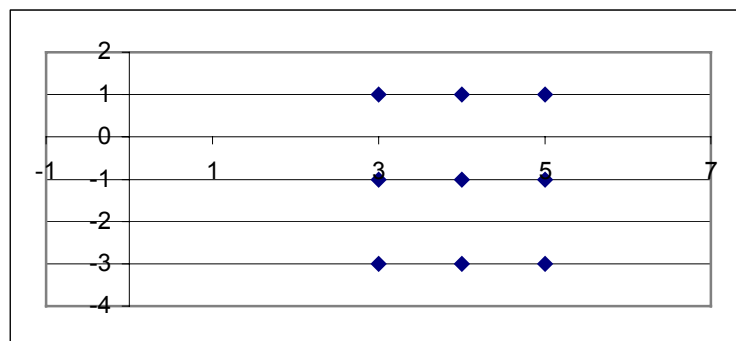
$$b) \sum_{i=1}^{i=5} x_i = 29$$

$$c) \sum_{i=1}^{i=9} x_i = 27$$

7. Donats els conjunts $A = \{-1, 2, 4\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, feu la representació gràfica i construïu el diagrama d'arbre del conjunt producte $A \times B$.



8. Donats els conjunts $A = \{3, 4, 5\}$ i $B = \{-1, -3, 1\}$, feu la representació gràfica i construïu el diagrama d'arbre del conjunt producte $A \times B$.



9. Calculeu:

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solució:

$$a) \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

$$b) \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

$$c) \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

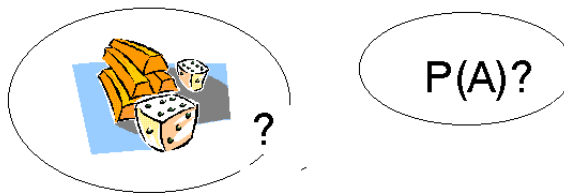
$$d) \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

TEMA 2. PROBABILITATS

“La teoria de probabilitats no és res més que el sentit comú reduït al càlcul”

Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827)

Històricament la teoria de la probabilitat va començar amb l'estudi dels jocs d'atzar, especialment els jocs de cartes i la ruleta, al començament del segle XVII, amb l'intercanvi de correspondència sobre el tema entre Pascal i Fermat (Pierre de Fermat, 1601-1665). Però la seva axiomatització no es va donar fins a la tercera – quarta dècada del segle XX, originant el que s'entén per teoria moderna de la probabilitat. Aquesta axiomatització va donar lloc a una precisió en la definició dels diferents conceptes probabilístics que encara no existia.



Blaise Pascal i Pierre de Fermat

2.1. ESPAI MOSTRAL I ÀLGEBRA DE PROBABILITAT

Es coneix com a espai mostral tot el conjunt de casos o resultats possibles. L'espai mostral també rep el nom de *conjunt mostral* i se simbolitza amb la lletra grega Ω .

Un exemple d'espai mostral són els sis resultats possibles en tirar un dau, en aquest cas:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Donat l'espai mostral Ω , es poden definir uns conjunts d'elements referits a aquest espai mostral. Els més bàsics són:

- *Succés elemental*. És un resultat que només conté un element que pertany a Ω ($a \in \Omega$). En l'exemple del dau un succés elemental pot ser el resultat 3, que pertany a Ω .
- *Succés*. Es defineix com un resultat que té un nombre determinat de successos elementals. Continuant amb l'exemple del dau, $A = \{1, 3, 6\}$ es pot definir com el succés A .
- *Succés segur*. És aquell succés que es dona sempre sigui quin sigui el resultat. En conseqüència el succés segur és igual a Ω . En l'exemple del dau el succés segur és: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
- *Succés impossible*. És aquell resultat que mai es pot donar en un espai mostral determinat. És a dir, és el conjunt buit ($\emptyset$). Per a l'exemple del dau un succés impossible podria ser: $B = \{9, 13\}$, perquè són dos valors que no es poden donar mai en tirar el dau.

2.1.1. Concepte de probabilitat

- **Definició clàssica**

Segons la definició clàssica, establerta per Laplace (Pierre Simon de Laplace, 1749-1827), la probabilitat és el quocient entre el nombre de casos favorables i el nombre de casos possibles.

$$p(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$$

El seu gran inconvenient radica en el fet que només és vàlida o aplicable en aquelles situacions en què els esdeveniments o casos possibles són equiprobables, és a dir, tots ells tenen la mateixa probabilitat de succeir.

Un exemple d'aquesta situació correspon als successos elementals que es poden donar en tirar un dau. Tots els successos elementals d'aquest espai mostral són:

succés $A = \{1\}$
succés $B = \{2\}$
succés $C = \{3\}$
succés $D = \{4\}$
succés $E = \{5\}$
succés $F = \{6\}$

En total són sis successos elementals. Si el dau no està trucat, la probabilitat que al tirar el dau surti un 4 (succés D) és la mateixa probabilitat que surti un 1 (succés A), un 5 (succés E) o qualsevol altre succés elemental. En concret, aquesta probabilitat és igual a $1/6$ (1 - cas favorable i 6 - casos possibles). Els sis successos elementals són equiprobables.

Un altre exemple correspon al llançament d'una moneda. En aquesta situació hi ha dos successos elementals:

succés $A = \{\text{cara}\}$

succés $B = \{\text{creu}\}$

La probabilitat del succés A o del succés B en llançar la moneda és $1/2$ (1 - cas favorable i 2 - casos possibles) si la moneda no està trucada.

Ara bé, la majoria de les situacions no s'ajusten a aquesta definició perquè els successos elementals no tenen la mateixa probabilitat de donar-se, és a dir, no són equiprobables. En aquestes situacions val més recórrer a la definició empírica de probabilitat.

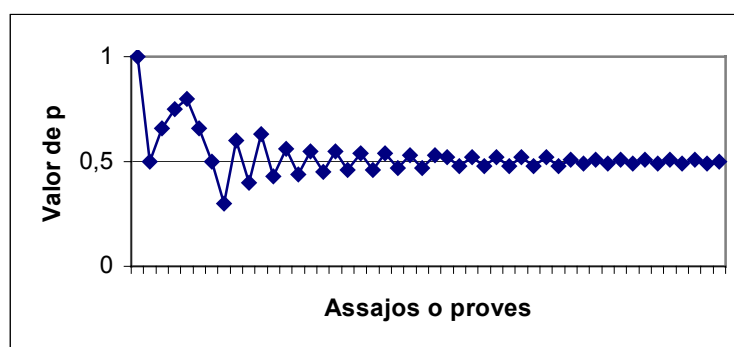
• Definició empírica

Empíricament, la probabilitat es defineix com una freqüència relativa. Si un experiment es repeteix n vegades sota les mateixes condicions, la probabilitat del succés A és igual al nombre de vegades que s'ha donat aquest succés (n_A) dividit pel nombre de vegades que s'ha repetit l'experiment (n):

$$\hat{p}(A) = \frac{n_A}{n} \rightarrow p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

En realitat, aquesta freqüència relativa s'ha de trobar quan el nombre de vegades que es repeteix l'experiment tendeix a infinit, en altres paraules, és el límit quan n tendeix a infinit. Això és degut al fet que a mesura que augmenta la n la probabilitat del succés s'estabilitza en el seu valor real.

En el cas de la moneda, a mesura que el nombre de llançaments tendeix a infinit la probabilitat que surti cara o bé que surti creu és 0.5 si la moneda no està trucada. Aquest valor és el mateix que el trobat a partir de la definició clàssica de probabilitat perquè els dos successos elementals són equiprobables. En el gràfic següent es mostra com podria ser l'estabilització del valor de probabilitat per a qualsevol dels dos successos elementals (cara o creu).

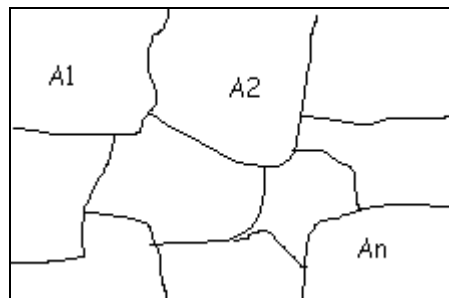


• Definició axiomàtica

La definició axiomàtica de probabilitat és deguda a Kolmogorov (Andrei Nikolaevich Kolmogorov, 1903-1987), amb què intenta resoldre el problema de l'equiprobabilitat de la definició clàssica i de l'error que és possible introduir en la definició empírica, ja que no és possible repetir els assajos a l'infinit.

Segons la definició axiomàtica, a partir d'un espai mostral determinat Ω , s'assigna a cada succés A un nombre real, simbolitzat per $p(A)$, tal que compleixi els següents axiomes:

- La probabilitat d'un succés A qualsevol oscil·la entre 0 i 1 $\rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$
- La probabilitat del succés segur és igual a 1 i la del succés impossible és igual a 0 $\rightarrow p(\Omega) = 1$ i $p(\emptyset) = 0$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ són successos mútuament excloents, llavors:
 $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$
 L'espai mostral amb n successos mútuament excloents queda representat en la figura següent:

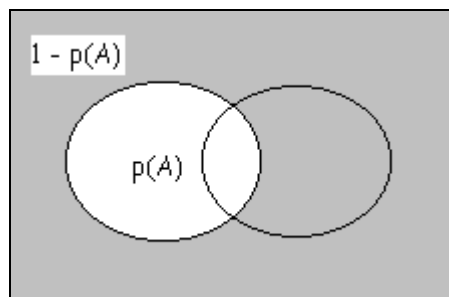


Un cop un espai mostral Ω té definides les probabilitats associades als successos elementals, es diu que constitueix un *espai de probabilitat*.

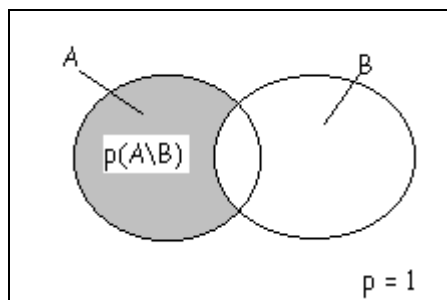
2.1.2. Teoremes

Dels axiomes anteriors es deriven els teoremes següents:

- La probabilitat que es doni el complementari del succés A és igual a 1 menys la probabilitat del succés $A \rightarrow p(A^c) = 1 - p(A)$.



- La probabilitat del complementari relatiu del succés B respecte del succés A és igual a la probabilitat del succés A menys la probabilitat de la intersecció dels dos successos $\rightarrow p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$



- Si el succés $A < \text{succés } B$, llavors $p(A) < p(B)$
- Si $A \subset B$, llavors $p(B) \geq p(A)$ i $p(B - A) = p(B) - p(A)$
- $p(A \cap B) \leq p(A \cup B)$

D'altra banda, tenint en compte les lleis de Morgan, les probabilitats associades a la intersecció dels complementaris de dos successos o a la unió dels complementaris dels dos successos queden formulades a continuació:

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \rightarrow p(A^c \cap B^c) = p[(A \cup B)^c] = 1 - p(A \cup B) \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \rightarrow p(A^c \cup B^c) = p[(A \cap B)^c] = 1 - p(A \cap B) \end{aligned}$$

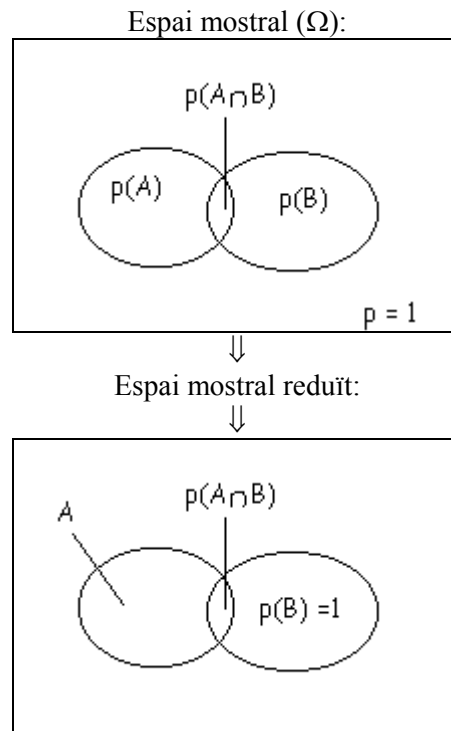
2.2. PROBABILITAT CONDICIONADA I INDEPENDÈNCIA

2.2.1. Probabilitat condicionada

Donats els successos A i B i sent la probabilitat associada al succés B superior a 0 [$p(B) > 0$], la probabilitat que es doni el succés A havent-se produït el succés B s'anomena *probabilitat condicionada d'A donat B*, [$p(A/B)$], i es defineix com:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Gràficament queda representat a continuació:



En aquesta representació gràfica s'observa clarament que l'espai mostral inicial (Ω) queda reduït només a l'espai associat al succés B , perquè se sap que aquest ha ocorregut.

Exemple: La probabilitat de ser alcohòlic a la ciutat de Barcelona és de 0.02, la de ser un ludòpata de 0.03 i la de tenir els dos problemes és de 0.005. Determinar:

- a) La probabilitat que un subjecte sigui ludòpata si se sap que és alcohòlic.

$$p(\text{ludòpata} / \text{alcohòlic}) = \frac{p(\text{ludòpata} \cap \text{alcohòlic})}{p(\text{alcohòlic})} = \frac{0.005}{0.02} = 0.25$$

La probabilitat de ser ludòpata sabent que s'és alcohòlic és de 0.25

- b) La probabilitat que un subjecte sigui alcohòlic si se sap que és ludòpata.

$$p(\text{alcohòlic} / \text{ludòpata}) = \frac{p(\text{ludòpata} \cap \text{alcohòlic})}{p(\text{ludòpata})} = \frac{0.005}{0.03} = 0.1\hat{6}$$

La probabilitat de ser alcohòlic sabent que s'és ludòpata és de 0.16

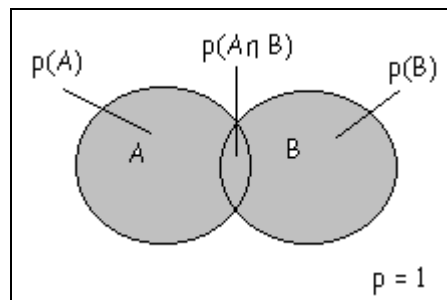
2.2.2. Independència

Donats els successos A i B , es diu que són independents quan, sabent que s'ha produït un d'ells, no es veu alterada la probabilitat inicial de l'altre succés, o sigui:

$$p(A / B) = p(A); \quad \text{o} \\ p(B / A) = p(B)$$

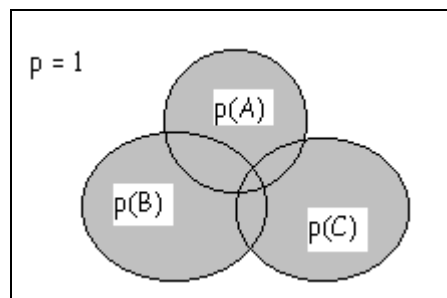
2.2.3. Teorema de probabilitat total

La probabilitat de la unió de dos successos A i B és igual a la probabilitat del succés A més la probabilitat del succés B menys la probabilitat de la intersecció dels dos successos $\rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

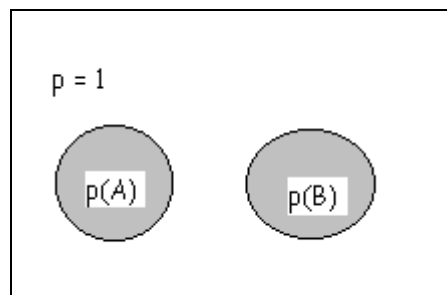


La probabilitat de la unió dels successos A , B i C és:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$



Si els successos A i B són independents o mútuament excloents la probabilitat de la unió dels dos successos és igual a la suma de la probabilitat associada al succés A i la probabilitat associada al succés $B \rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$



2.2.4. Teorema del producte

La probabilitat de la intersecció de dos successos independents és igual al producte de les probabilitats associades als dos successos $\rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

La probabilitat de la intersecció de dos successos no independents és igual al producte de la probabilitat associada al succés A per la probabilitat condicionada que es doni el succés B si s'ha donat el succés A , o el que és el mateix la probabilitat associada al succés B per la probabilitat condicionada que es doni el succés A si s'ha donat el succés B :

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) \cdot p(B/A) \\ p(A \cap B) &= p(B) \cdot p(A/B) \end{aligned}$$

2.3. TEOREMA DE BAYES

El teorema de Bayes (Thomas Bayes, 1702-1761) permet determinar quina és la probabilitat que s'hagi donat una causa determinada (A_i) si se sap que ha tingut lloc un efecte determinat (B_j), tenint en compte que hi ha diferents causes per a un mateix efecte. Aquest teorema té una àmplia aplicació en l'àmbit de l'epidemiologia, on un cop desenvolupada una malaltia qualsevol (efecte) es vol determinar la probabilitat que sigui deguda a un o més factors concrets (causa).

Matemàticament queda formulat com:

$$p(A_i / B_j) = \frac{p(A_i) p(B_j / A_i)}{p(A_1) p(B_j / A_1) + p(A_2) p(B_j / A_2) + \dots + p(A_n) p(B_j / A_n)}$$

on $p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_i), \dots, p(A_n)$ són les probabilitats "a priori" que es doni cadascuna de les causes possibles.

$p(B_j/A_1), p(B_j/A_2), \dots, p(B_j/A_i), \dots, p(B_j/A_n)$ són les probabilitats condicionades que es desenvolupi la malaltia si s'està exposat a la causa 1, 2, ..., i, ... i n respectivament.

Exemple: Es vol fer un estudi sobre la suggestibilitat dels subjectes sotmesos a tractament amb determinats fàrmacs. Partint d'un grup de subjectes es divideixen en dos subgrups, el primer (grup experimental) estarà format per un terç dels subjectes originals, mentre que el grup control el formaran la resta de tots els individus.

Al grup experimental se li subministra un fàrmac que produeix lleugers marejos en un 80% dels casos. Al grup control se li subministra un placebo ja comprovat que sols pot produir marejos en cinc de cada cent subjectes. Naturalment el subjecte no sap el que està prenent i ha estat informat de la possibilitat de patir el símptoma descrit.

Si un subjecte pateix marejos, quina és la probabilitat que hagi pres un placebo?

$$p(\text{droga}) = 0.33$$

$$p(\text{placebo}) = 0.67$$

$$p(\text{símptoma} / \text{droga}) = 0.80$$

$$p(\text{símptoma} / \text{placebo}) = 0.05$$

$$\begin{aligned}
 p(\text{placebo} / \text{síptoma}) &= \frac{p(\text{placebo}) \cdot p(\text{síptoma} / \text{placebo})}{p(\text{placebo}) \cdot p(\text{síptoma} / \text{placebo}) + p(\text{droga}) \cdot p(\text{síptoma} / \text{droga})} \\
 &= \frac{0.67 \cdot 0.05}{0.67 \cdot 0.05 + 0.33 \cdot 0.80} = 0.1126
 \end{aligned}$$

2.4. VARIABLES ALEATÒRIES

Una variable aleatòria X d'un espai mostrat Ω és una funció de Ω en el conjunt dels nombres reals ($\mathbf{R}$) tal que la imatge inversa de cada interval de $\mathbf{R}$ és un succés de Ω . Aquest espai mostrat queda definit per un model o llei de probabilitat, que s'estableix a partir de l'associació de cadascun dels valors de la variable aleatòria amb la seva probabilitat d'ocurrència corresponent.

S'han de diferenciar dos tipus bàsics de variables aleatòries, les variables discretes i les variables contínues.

2.4.1. Variables aleatòries discretes

Una variable aleatòria es considera discreta quan el rang de la variable és finit. És a dir, s'assignen probabilitats a cada valor concret de la variable X . Qualsevol variable aleatòria discreta queda definida per dos funcions, la de probabilitat i la de distribució.

La *funció de probabilitat* assigna a cada valor de la variable discreta la seva probabilitat, fet que queda expressat com:

$$f(x_i) = p(X = x_i)$$

La probabilitat associada a cada valor sempre estarà entre 0 i 1. A més a més la suma de totes les probabilitats sempre és 1.

Exemple: Si una parella té tres fills i la probabilitat que sigui nen o nena és de 0.5, la funció de probabilitat de la variable “nombre de nens de la parella” (variable aleatòria discreta) queda reflectida a la taula següent:

Nre. de nens			
0	1	2	3
1/8 = 0.125	3/8 = 0.375	3/8 = 0.375	1/8 = 0.125

A partir del diagrama d'arbre es veu clarament com s'obtenen aquestes probabilitats:

♂	/	♂	$/ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Rightarrow 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
		♀	$\backslash \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Rightarrow 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
	\	♂	$/ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Rightarrow 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
		♀	$\backslash \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Rightarrow 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
♀	/	♂	$/ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Rightarrow 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
		♀	$\backslash \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Rightarrow 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
	\	♂	$/ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Rightarrow 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
		♀	$\backslash \rightarrow \rightarrow \rightarrow \Rightarrow 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$

En aquest gràfic s'observa que la probabilitat que dels tres fills que té la parella els tres siguin nens és $1/8$, que dos siguin nens i un nena és $3/8$ ($1/8 + 1/8 + 1/8$), que un sigui nen i dos nenes és $3/8$ ($1/8 + 1/8 + 1/8$) i que les tres siguin nenes $1/8$.

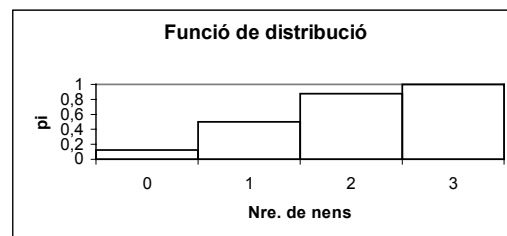
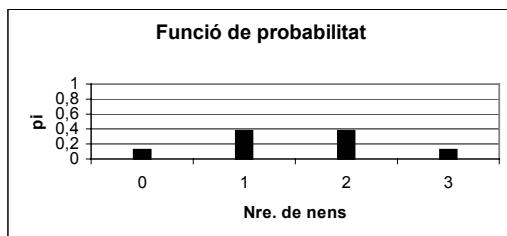
La *funció de distribució* assigna a cada valor de la variable discreta la probabilitat d'obtenir un valor inferior o igual amb aquell valor concret, fet que queda expressat com:

$$F(x_i) = p(X \leq x_i)$$

Per a l'exemple de la variable aleatòria discreta “nombre de nens en la parella que té tres fills” la funció de probabilitat i de distribució es mostra a la taula següent:

Nre. de nens				
Valors	0	1	2	3
Funció de probabilitat	$1/8 = 0.125$	$3/8 = 0.375$	$3/8 = 0.375$	$1/8 = 0.125$
Funció de distribució	$1/8 = 0.125$	$4/8 = 0.5$	$7/8 = 0.875$	$8/8 = 1$

Gràficament aquestes dues funcions es representen a continuació:



A més a més de les dues funcions anteriors, hi ha diversos paràmetres que caracteritzen una distribució de probabilitat, els més representatius són la *mitjana* o *esperança matemàtica* ($E(X)$) i la *variància* ($\text{Var}(X)$), que s'expressen a continuació:

- mitjana $E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot p(x_i)$
- variància $Var(X) = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 \cdot p(x_i) \equiv \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \cdot p(x_i) - E(X)^2$

en efecte, en desenvolupar l'expressió inicial s'arriba a l'expressió final:

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{i=n} [(x_i^2 + E(X)^2 - 2x_i E(X)) \cdot p(x_i)] = \\
 &= \sum_{i=1}^{i=n} [x_i^2 p(x_i) + E(X)^2 p(x_i) - 2x_i p(x_i) E(X)] = \\
 &= \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p(x_i) + E(X)^2 \sum_{i=1}^{i=n} p(x_i) - 2 E(X) \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)
 \end{aligned}$$

donat que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{i=n} p(x_i) &= 1 \\
 \sum_{i=1}^{i=n} x_i p(x_i) &= E(X)
 \end{aligned}$$

L'expressió anterior es pot simplificar a:

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p(x_i) + E(X)^2 - 2E(X)E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p(x_i) - E(X)^2$$

que és una expressió més senzilla per al càlcul manual de la variància d'una variable aleatòria discreta.

A partir de la variància d'una variable, es pot calcular un altre valor important de la distribució com és la desviació típica o desviació estàndard. Per al seu càlcul simplement es fa l'arrel quadrada positiva del valor de la variància:

$$D(X) = \sqrt{Var(X)} = \sigma_x$$

2.4.2. Variables aleatòries contínues

Una variable aleatòria és contínua quan entre dos valors de la variable hi ha un nombre infinit de valors possibles, és a dir, el conjunt imatge és un conjunt continu de nombres com en un

interval. Per exemple, el pes és una variable aleatòria contínua perquè entre dos valors qualssevol, 50 - 51 kg, hi ha un nombre infinit de valors.

Les dues funcions que defineixen una variable aleatòria contínua són la funció de densitat i la funció de distribució.

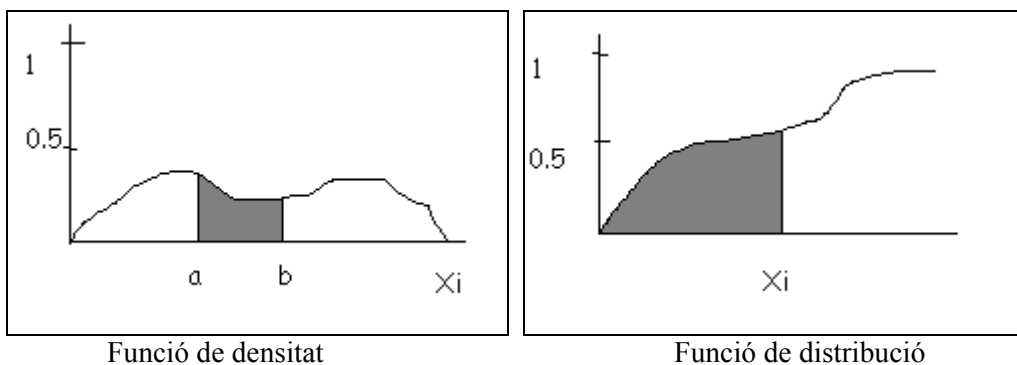
La *funció de densitat* assigna una probabilitat determinada a un rang o interval de valors de la variable aleatòria contínua $[a, b]$, atès que en aquest cas la probabilitat que es doni un valor concret és igual a 0. Per poder determinar la probabilitat assignada a un interval determinat $[a, b]$, s'ha de trobar la integral definida des del punt a al punt b de la funció que defineix la variable aleatòria contínua, fet que queda expressat com:

$$f(x) = \int_a^b p(x) dx = p(a \leq x_i \leq b)$$

La *funció de distribució* assigna la probabilitat de trobar un valor igual o inferior a x_i ; per tant, a nivell conceptual és el mateix que la funció de distribució per a variables aleatòries discretes. Matemàticament queda expressat com:

$$F(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx = p(x \leq x_i)$$

Gràficament aquestes dues funcions queden representades en la figura següent:



Com en les variables aleatòries discretes, hi ha dos paràmetres que defineixen una variable aleatòria contínua: l'*esperança matemàtica* i la *variància*, que queden expressats a continuació:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx$$

El valor positiu de l'arrel quadrada de la variància és la desviació típica de la distribució de la variable:

$$D(X) = \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

2.5. MODELS DE PROBABILITAT

Com ja s'ha dit, un model o llei de probabilitat és la correspondència que s'estableix entre cada valor de la variable aleatòria i les probabilitats corresponents. En conseqüència, cada model de probabilitat queda definit per una funció determinada (de probabilitat o de densitat i de distribució). En alguns casos, les dades s'ajusten a un model de probabilitat perfectament conegut, és per aquest motiu que en aquest apartat es pretén explicar alguns dels principals models teòrics de probabilitat.

De fet, només es farà referència als models de probabilitat teòrics més coneguts, a saber, la llei binomial, la llei de Poisson i la llei normal o llei de Gauss-Laplace. Les dues primeres s'utilitzen en el cas de treballar amb variables aleatòries discretes i l'última en el cas de treballar amb variables aleatòries contínues.

2.5.1. Models de probabilitat per a variables aleatòries discretes: binomial i Poisson

- Distribució binomial

El model de la llei binomial es pot aplicar en el cas de treballar amb variables quantitatives discretes generades a partir d'una variable qualitativa dicotòmica. La variable dicotòmica rep el nom d'*experiment de Bernoulli* (Jacob Bernoulli, 1654-1705). Un dels valors possibles rep el nom d'*èxit* (E) i l'altre rep el nom de *fracàs* (F).

Cada un dels dos valors té una determinada probabilitat:

$$\begin{aligned} p(E) &= \pi \\ p(F) &= (1 - \pi) \end{aligned}$$

Si es repeteix l'experiment de Bernoulli un nombre de vegades n i sent els experiments independents, o sigui que el valor de π no s'altera en cada repetició, es generarà una variable aleatòria discreta amb $n+1$ valors possibles.

Per exemple, per al cas del llançament d'una moneda -fins que no es llança la moneda no se sap si sortirà cara o creu-, imaginar que el succés cara sigui l'"èxit", amb una probabilitat de 0.5. Es pot llançar la moneda tantes vegades com es vulgui (n). De llançament a llançament el resultat és independent, és a dir, el fet que hagi sortit una cara en el primer llançament no influeix per a res en el fet que surti una cara o una creu en els llançaments successius. Al final del procés s'ha generat la variable aleatòria discreta nombre de cares obtingudes en n llançaments. Aquesta variable es distribuirà segons la llei binomial amb $n+1$ valors (0, 1, 2, ..., n)

L'explicació de la llei binomial es farà a partir del desenvolupament d'un exemple. Se suposa que la probabilitat de patir ansietat davant d'un examen entre la població universitària és de 0.7 i es disposa d'una mostra de quatre persones. Amb aquesta informació es pot observar que la variable quantitativa discreta és el nombre de persones que a la mostra estudiada pateix ansietat (valors: 0, 1, 2, 3 i 4) i que la variable qualitativa dicotòmica és el fet de patir o no ansietat davant dels exàmens (patir ansietat serà en aquest cas l'èxit, naturalment èxit en sentit matemàtic).

A partir d'aquestes dades es vol determinar quina és la probabilitat que només una de les quatre persones de la mostra pateixi ansietat.

Si la primera persona de la mostra pateix ansietat davant dels exàmens les altres tres no haurien de patir ansietat. Donat que són esdeveniments independents (el fet que una persona pateixi ansietat davant dels exàmens no implica que una altra pateixi o no ansietat davant dels exàmens), la probabilitat que la primera persona de la mostra pateixi ansietat i les altres tres no, és igual al producte de les probabilitats "a priori" de patir i no patir ansietat davant dels exàmens (0.7 i 0.3 respectivament, tal com s'ha dit), el que és igual a:

$$\otimes \odot \odot \odot \rightarrow 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.0189$$

Ara bé, amb aquest valor no queda determinada quina és la probabilitat que una persona qualsevol de les quatre pateixi ansietat davant dels exàmens, ja que pot ser la segona, la tercera o bé la quarta, fet que queda expressat en l'esquema següent:

$$\begin{aligned} \otimes \otimes \odot \odot &\rightarrow 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.0189 \\ \odot \otimes \otimes \odot &\rightarrow 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.0189 \\ \odot \odot \otimes \otimes &\rightarrow 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 0.0189 \\ \odot \odot \odot \otimes &\rightarrow 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.0189 \\ \text{Total} &= 0.0756 \end{aligned}$$

En conseqüència, la probabilitat que només una persona de les quatre pateixi ansietat davant dels exàmens és de 0.0756.

Per facilitar el càlcul que s'acaba de fer es poden utilitzar les fórmules de la funció de probabilitat i funció de distribució de la llei binomial:

$$\text{Funció de probabilitat: } f(x) = p(X = x) = C_n^x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

$$\text{Funció de distribució: } F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x=0}^{x=x} C_n^x \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

On C_n^x és la combinació de n elements agafats de x en x , que en l'exemple n són els quatre subjectes de la mostra, x és igual a 1 (que només una persona pateixi ansietat) i π és la probabilitat "a priori" de l'esdeveniment que s'està estudiant, en l'exemple "patir ansietat davant dels exàmens" (0.7)

Així doncs, aplicant la fórmula de la llei binomial s'arriba al mateix resultat:

$$p(X = 1) = C_n^x \pi^x (1 - \pi)^{n-x} = \binom{4}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^3 = 0.0756$$

Aplicant la llei binomial es pot arribar a trobar la funció de probabilitat i la funció de distribució de l'exemple emprat, i que es mostren a la taula següent:

X	f(X)	F(X)
0	0.0081	0.0081
1	0.0756	0.0837
2	0.2646	0.3483
3	0.4116	0.7599
4	0.2401	1

Per tant, quan se sap que una variable discreta es distribueix segons la distribució binomial, resulta relativament senzill a partir de les expressions anteriors calcular la funció de probabilitat de la variable, o sigui assignar probabilitats als diferents valors de la variable.

De fet coneixent el valor de π (probabilitat d'èxit) i el nombre n de repeticions que s'han fet, es pot calcular qualsevol probabilitat. Precisament aquests dos valors reben el nom de paràmetres de la distribució quan aquesta segueix la llei binomial. Això últim es representa de la forma següent:

$$X \sim B(n, \pi)$$

De la mateixa forma el càlcul de l'esperança matemàtica i la variància també se simplifiquen quan se sap que la variable segueix la llei binomial:

$$E(X) = \mu_x = n \cdot \pi$$

$$Var(X) = \sigma_x^2 = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$$

Per a les dades de l'exemple els valors són:

$$E(X) = \mu_x = n \cdot \pi = 4 \cdot 0.7 = 2.8$$

$$Var(X) = \sigma_x^2 = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi) = 4 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 0.84$$

$$D(X) = \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0.84} = 0.9165$$

- Distribució de Poisson

La distribució de Poisson va ser formulada per Siméon Denis Poisson (1781-1840) com una particularitat de la distribució binomial per quan n tendeix a ser molt gran ($n \rightarrow \infty$) i π a ser molt petit ($\pi \rightarrow 0$). Les funcions de probabilitat i de distribució s'expressen de la manera següent:

$$\text{Funció de probabilitat: } f(x) = p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\text{Funció de distribució: } F(x) = p(X \leq x) = \sum_{i=0}^{i=x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

On $\lambda = n \cdot \pi$

$e = 2.7182$, la base dels logaritmes naturals o neperians

El paràmetre de la distribució de Poisson és λ . Quan una variable X es distribueixi segons la llei de Poisson s'expressarà de la forma següent:

$$X \sim P(\lambda)$$

L'esperança matemàtica, la variància i la desviació típica queden formulades a continuació:

$$E(X) = \mu_x = \lambda$$

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \lambda$$

$$D(X) = \sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

Exemple: La probabilitat de tenir tendències ludòpates en adolescents és de 0.001. Trobar la probabilitat que hi hagi sis adolescents amb aquesta tendència en una població de cinc mil adolescents.

X = nombre d'adolescents amb tendència ludòpata en un grup de 5000.
 $n = 5000$; $\pi = 0.001$

Si s'aplica la funció de distribució de la binomial:

$$p(X = 6) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1 - \pi)^{n-x} = \binom{5000}{6} \cdot 0.001^6 \cdot 0.999^{4994}$$

com es pot veure es tracta d'un càlcul que cap calculadora podrà realitzar.

En aquest exemple s'aplica la llei de Poisson donat que $n \rightarrow \infty$ i $p \rightarrow 0$
 $\lambda = 5000 \cdot 0.001 = 5$

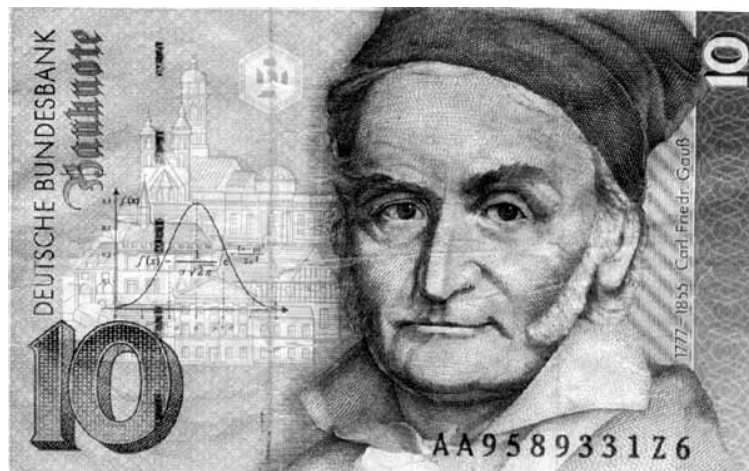
$$p(X = 6) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{5^6 e^{-5}}{6!} = 0.146222808$$

Per a aquestes dades l'esperança matemàtica, la variància i la desviació típica són:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu_x = \lambda = 5 \\ \text{Var}(X) &= \sigma_x^2 = \lambda = 5 \\ D(X) &= \sigma = \sqrt{5} = 2.236 \end{aligned}$$

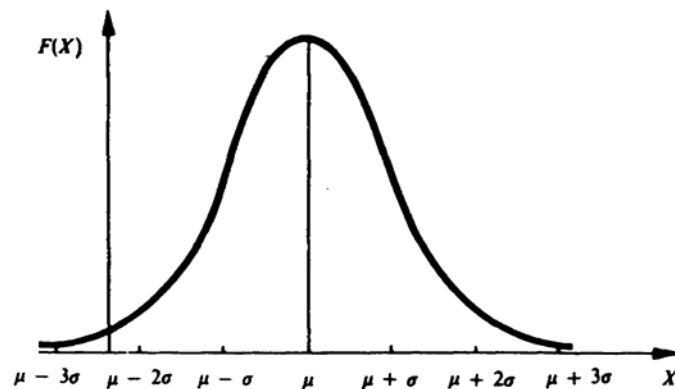
2.5.2. Model de probabilitat per a variables aleatòries contínues: distribució normal o de Gauss-Laplace

La distribució normal és un model teòric de probabilitat que es pot emprar en el cas de treballar amb variables quantitatives contínues, encara que també s'utilitza amb variables quantitatives discretes quan el rang de la variable és suficientment ampli.



Carl Friederich Gauss

Aquest model rep també el nom de campana de Gauss, en honor de Carl Friederich Gauss (1777-1885) per la forma que presenta i que es mostra a continuació:



Les característiques que defineixen la distribució normal són:

- Els seus paràmetres són la mitjana (μ) i la variància (σ^2)
- La variable X segueix una distribució normal amb mitjana μ i variància $\sigma^2 \rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Té un punt de màxima alçada, que coincideix amb la mitjana (μ), la mediana (Md) i la moda (Mo)
- És simètrica respecte a l'eix d'ordenades. L'eix de simetria està situat a μ
- És asimptòtica respecte a l'eix d'abscisses, per tant fluctua entre $-\infty$ i $+\infty$
- Té dos punts d'inflexió situats a $\pm 1\sigma$ de μ . Entre aquests dos punts d'inflexió hi ha el 68.26% del total d'àrea sota la corba normal

Les expressions de la funció de densitat i la funció de distribució de la llei normal es mostren a continuació:

$$\text{Funció de densitat: } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\text{Funció de distribució: } F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Per poder trobar la probabilitat associada a un interval de valors, $[a, b]$, s'hauria de fer la integral definida des del valor a fins al valor b de la funció de densitat, i en el cas de voler determinar la probabilitat que sigui inferior o igual a un valor determinat (X_i) s'hauria de fer la integral definida des de $-\infty$ fins a X_i de la funció de distribució.

Ara bé, donat que el model de la llei normal és un model teòric perfectament conegut, no és necessari recórrer a les integrals per determinar aquestes probabilitats. Tota variable que segueixi la llei normal es pot tipificar o estandaritzar (puntuacions Z) i utilitzar una única taula per calcular qualsevol probabilitat associada a una àrea concreta (vegeu annex).

Per transformar les puntuacions a Z , el que es fa és centrar i reduir la variable original aplicant la fórmula següent:

$$Z = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

Les puntuacions Z segueixen una distribució normal amb mitjana 0 i variància 1 [$Z \sim N(0, 1)$]. Això vol dir que per sobre de la mitjana els valors de Z seran positius mentre que per sota de la mitjana els valors de Z seran negatius.

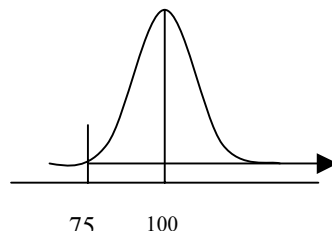
La funció de densitat i la funció de distribució de la distribució normal estandarditzada es mostren a continuació:

$$\text{Funció de densitat: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\text{Funció de distribució: } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Exemple: El quocient intel·lectual (QI) es distribueix segons la llei normal amb mitjana 100 i desviació tipus 15. A partir d'aquestes dades, determinar:

a) La probabilitat que una persona presenti un QI superior a 75.



$$p(X > 75) = ?$$

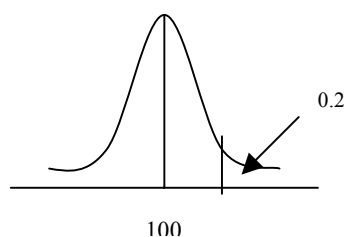
En aquest cas es demana la probabilitat associada a un interval. En conseqüència el primer pas serà transformar la puntuació directa a Z i buscar la probabilitat associada a Z a les taules de la normal.

$$z = \frac{75 - 100}{15} = -1.67 \rightarrow z = -1.67 \rightarrow p = 0.0475$$

Treballant amb les taules de l'annex, la probabilitat associada a una $Z = -1.67$ correspon a la cua de baix de la distribució. Donat que es demana la probabilitat que sigui superior a 75, el que s'ha de fer és restar 0.0475 a 1 (probabilitat de tota l'àrea sota la corba), el que és igual a 0.9525.

$$p(X > 75) = p(75 < X < \infty) = p(-1.67 < Z < \infty) = 1 - 0.0475 = 0.9525$$

b) El QI que deixa per sobre seu el 20% dels subjectes més intel·ligents.



En aquest cas es disposa de la probabilitat i es vol trobar el valor associat. El primer pas consisteix a trobar la Z associada a una probabilitat de 0.2 (emprant les taules de l'annex):

$$p = 0.2 \rightarrow z = 0.84$$

El valor de Z és positiu perquè el valor que es vol trobar està per sobre de la mitjana, tal com s'observa en el gràfic. Amb aquest valor es pot utilitzar la fórmula per estandarditzar puntuacions i aïllar el valor de X_i :

$$0.84 = \frac{X_i - 100}{15} \rightarrow X_i = 112.6$$

El QI que deixa per sobre seu el 20% dels subjectes més intel·ligents és 112.6.

2.5.3. Aproximació a la normal de les distribucions binomial i Poisson

Es comenten breument algunes relacions importants entre aquestes distribucions teòriques conegudes, i que poden ser de molta utilitat a l'hora d'efectuar càlculs.

En el cas que una variable X es distribueixi segons la distribució binomial:

$$X \sim B(n; \pi)$$

i sempre que n sigui gran i ni π ni $(1-\pi)$ siguin excessivament petits, la distribució de X s'aproximarà a la distribució normal amb $\mu = n \cdot \pi$ i $\sigma^2 = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$:

$$X \sim N[n \cdot \pi, n \cdot \pi(1 - \pi)]$$

A la pràctica hi comença a haver un bon ajust quan $n \cdot \pi$ i $n \cdot (1-\pi)$ són superiors a 5.

Exemple: Quina serà la probabilitat que en una aula de 20 alumnes, 12 o 13 d'ells siguin noies. (Se suposa que el gènere dels subjectes és equiprobable en la població d'on procedeix la mostra d'estudiants.)

$$n = 20$$

$$\pi = (1-\pi) = 0.5$$

Segons la fórmula de la funció de probabilitat de la distribució binomial:

$$\begin{aligned} P(12 \leq X \leq 13) &= P(X = 12) + P(X = 13) = \binom{20}{12} \cdot 0.5^{12} \cdot 0.5^8 + \binom{20}{13} \cdot 0.5^{13} \cdot 0.5^7 = \\ &= 0.1201 + 0.0739 = 0.194 \end{aligned}$$

(Aquests valors es poden obtenir directament amb la taula de la funció de probabilitat de la distribució binomial de l'annex.)

Com que $20 \cdot 0.5 = 10 > 5$, es pot utilitzar l'ajust a la distribució normal amb:

$$\mu = 20 \cdot 0.5 = 10$$

$$\sigma^2 = n \cdot \pi (1-\pi) = 20 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 5$$

estandarditzant els límits de l'interval 11.5 i 13.5, s'obté:

$$Z_{11.5} = \frac{11.5 - 10}{\sqrt{5}} = 0.67$$

$$Z_{13.5} = \frac{13.5 - 10}{\sqrt{5}} = 1.56$$

per tant,

$$p(11.5 \leq X \leq 13.5) = p(0.67 \leq Z \leq 1.56) \xrightarrow{\text{Taules}} p(Z \geq 0.67) - p(Z \geq 1.56) = 0.2514 - 0.0594 = 0.192$$

També, donat que la distribució de Poisson està molt relacionada amb la binomial, una variable X que es distribueixi segons la distribució de Poisson:

$$X \sim P(\lambda)$$

i sempre que λ tendeixi a ∞ , la distribució de X s'aproximarà a la distribució normal amb $\mu = \lambda$ i $\sigma^2 = \lambda$:

$$X \sim N[\lambda; \lambda]$$

Exemple: En estudis epidemiològics realitzats s'ha detectat que en una determinada població la prevalença dels trastorns de ludopatia (joc patològic) és del 4%. Quina és la probabilitat que en escollir una mostra d'aquesta població, formada per 225 subjectes, es trobi que 13 d'ells tenen problemes de joc patològic?

$$n = 225$$

$$\lambda = 225 \cdot 0.04 = 9$$

Segons la fórmula de la funció de probabilitat de la distribució de Poisson:

$$p(X = 13) = \frac{9^{13} \cdot e^{-9}}{13!} = 0.0504$$

(Aquest valor també està registrat a la taula de la funció de probabilitat de la distribució de Poisson de l'annex.)

Es pot utilitzar l'ajust a la distribució normal amb:

$$\mu = 9$$

$$\sigma^2 = 9$$

estandarditzant els límits de l'interval 12.5 i 13.5, s'obté:

$$Z_{12.5} = \frac{12.5 - 9}{\sqrt{9}} = 1.1\hat{6}$$

$$Z_{13.5} = \frac{13.5 - 9}{\sqrt{9}} = 1.5$$

per tant,

$$p(12.5 \leq X \leq 13.5) = p(1.1\hat{6} \leq Z \leq 1.5) \xrightarrow{\text{Taules}} p(Z \geq 1.1\hat{6}) - p(Z \geq 1.5) = 0.1210 - 0.0668 = 0.0542$$

S'ha de fer notar que s'obté una bona aproximació, fins i tot amb un valor de λ no excessivament gran ($\lambda = 9$).

2.6. ACTIVITATS PRÀCTIQUES

1. Si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ¿quines de les expressions següents són espais de probabilitat i per què?

- a) $p(a_1) = 1/2$ $p(a_2) = 1/2$ $p(a_3) = 1/2$ $p(a_4) = 1/2$
- b) $p(a_1) = 0$ $p(a_2) = 0$ $p(a_3) = 1/3$ $p(a_4) = 2/3$
- c) $p(a_1) = -1/2$ $p(a_2) = 1/3$ $p(a_3) = 2/3$ $p(a_4) = 1/2$
- d) $p(a_1) = 1/2$ $p(a_2) = 1/4$ $p(a_3) = 1/8$ $p(a_4) = 1/8$
- e) $p(a_1) = 1/16$ $p(a_2) = 1/16$ $p(a_3) = 1/2$ $p(a_4) = 3/8$

Solució:

- a) Sí, perquè $\sum p_i = 1$.
- b) Sí, perquè $\sum p_i = 1$.
- c) No, ja que encara que $\sum p_i = 1$, $p(a_1)$ és negativa.
- d) Sí, perquè $\sum p_i = 1$.
- e) Sí, perquè $\sum p_i = 1$.

2. Si $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és un espai de probabilitat, trobeu:

- a) $p(a_1)$ si $p(a_2) = 0.25$, $p(a_3) = 0.1$, $p(a_4) = 0.1$ i $p(a_5) = 0.2$
- b) $p(a_1)$ si $p(a_2) = 0.1$, $p(a_3) = 0.5$, $p(a_4) = p(a_1)$ i $p(a_5) = 0.2$
- c) $p(a_1)$ si $p(a_2)$ és el doble de $p(a_1)$, $p(a_3) = p(a_1)$, $p(a_4) = p(a_5)$ que són el doble de $p(a_2)$

Solució:

- a) $p(a_1) = 0.35$
- b) $p(a_1) = 0.1$
- c) $p(a_1) = 1/12$

3. En un grup de malalts mentals hi ha cinc homes i vuit dones. Un d'ells és esquizofrènic. Trobeu la probabilitat que sigui un home el que pateix esquizofrènia si els homes tenen el triple de possibilitats de patir d'esquizofrènia que les dones.

Solució:

Probabilitat de ser esquizofrènic entre les dones = p

Probabilitat de ser esquizofrènic entre els homes = $3 \cdot p$

Com que hi ha cinc homes i vuit dones:

$$5 \cdot 3p + 8 \cdot p = 23p \rightarrow 23p = 1 \rightarrow p = 1/23$$

$$p(\text{home esquizofrènic}) = 15/23 = 0,6522$$

4. D'un grup de quaranta pacients mentals (vint amb depressió, deu esquizofrènics i deu amb demència) se seleccionen dos pacients a l'atzar. Determineu la probabilitat que els dos siguin esquizofrènics.

Solució:

$$n = 40$$

depressius = 20

esquizofrènics = 10

amb demència = 10

Casos possibles = maneres de seleccionar dos pacients a l'atzar dels quaranta malalts mentals =

$$\text{Combinacions de quaranta elements agafats de dos en dos} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{2! \cdot 38!} = 780$$

Casos favorables = maneres de seleccionar dos pacients a l'atzar dels deu esquizofrènics =

$$\text{Combinacions de deu elements agafats de dos en dos} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$$

$$p(2 \text{ esquizofrènics}) = 45 / 780 = 0,05769$$

Una altra resolució:

$$p(2 \text{ esquizofrènics}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{90}{1560} = 0.05769$$

5. D'un grup de trenta-dues persones, setze tenen depressió i setze no, la meitat dels que tenen depressió i dels que no tenen depressió són drogoaddictes. Trobeu la probabilitat que en escollir a l'atzar una persona tingui depressió o sigui drogoaddicte.

Solució:

$$n = 32$$

16 depressius / 8 drogoaddictes

16 no depressius \ 8 no drogoaddictes

16 no depressius / 8 drogoaddictes

16 no depressius \ 8 no drogoaddictes

$$p(\text{dep} \cup \text{drog}) = p(\text{dep}) + p(\text{drog}) - p(\text{dep} \cap \text{drog})$$

$$p(\text{dep}) = 16/32 = 0.5;$$

$$p(\text{drog}) = 16/32 = 0.5;$$

$$p(\text{dep} \cap \text{drog}) = 8/32 = 0.25$$

$$p(\text{dep} \cup \text{drog}) = p(\text{dep}) + p(\text{drog}) - p(\text{dep} \cap \text{drog}) = 0.5 + 0.5 - 0.25 = 0.75$$

6. Donat que $p(\text{ludòpata}) = 0.3$, $p(\text{alcohòlic}) = 0.4$ i $p(\text{ludòpata i alcohòlic}) = 0.1$, trobeu:

- $p(\text{ludòpata o alcohòlic})$
- $p(\text{ludòpata}^c)$
- $p(\text{alcohòlic}^c)$
- $p(\text{ludòpata}^c \text{ i alcohòlic}^c)$
- $p(\text{ludòpata}^c \text{ o alcohòlic}^c)$
- $p(\text{ludòpata i alcohòlic}^c)$
- $p(\text{ludòpata}^c \text{ i alcohòlic})$

Solució:

- $p(\text{lud} \cup \text{alch}) = p(\text{lud}) + p(\text{alch}) - p(\text{lud} \cap \text{alch}) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6$
- $p(\text{lud}^c) = 1 - p(\text{lud}) = 1 - 0.3 = 0.7$
- $p(\text{alch}^c) = 1 - 0.4 = 0.6$
- $p(\text{lud}^c \cap \text{alch}^c) =$
lleis de Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \rightarrow p(A^c \cap B^c) = p((A \cup B)^c) = 1 - p(A \cup B)$
 $p(\text{lud}^c \cap \text{alch}^c) = 1 - p(\text{lud} \cup \text{alch}) = 1 - 0.6 = 0.4$
- $p(\text{lud}^c \cup \text{alch}^c) =$
lleis de Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \rightarrow p(A^c \cup B^c) = p((A \cap B)^c) = 1 - p(A \cap B)$
 $p(\text{lud}^c \cup \text{alch}^c) = 1 - p(\text{lud} \cap \text{alch}) = 1 - 0.1 = 0.9$
- $p(\text{lud} \cap \text{alch}^c) = p(\text{lud} \setminus \text{alch}) = p(\text{lud}) - p(\text{lud} \cap \text{alch}) = 0.3 - 0.1 = 0.2$
- $p(\text{lud}^c \cap \text{alch}) = p(\text{alch} \setminus \text{lud}) = p(\text{alch}) - p(\text{lud} \cap \text{alch}) = 0.4 - 0.1 = 0.3$

7. Si $p(\text{depressió} \cup \text{esquizofrènia}) = 0.6$, $p(\text{depressió}^c) = 0.65$ i $p(\text{depressió} \cap \text{esquizofrènia}) = 0.15$, trobeu:

- $p(\text{depressió})$
- $p(\text{esquizofrènia})$
- $p(\text{depressió} \cap \text{esquizofrènia}^c)$

Solució:

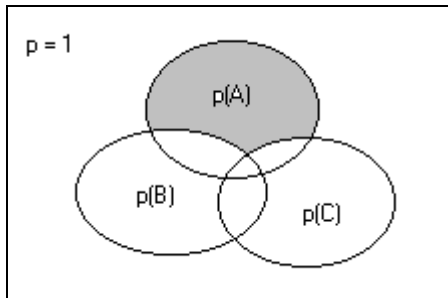
- $p(\text{dep}) = 1 - p(\text{dep}^c) = 1 - 0.65 = 0.35$
- $p(\text{esq}) = ?$
 $p(\text{dep} \cup \text{esq}) = p(\text{dep}) + p(\text{esq}) - p(\text{dep} \cap \text{esq}) \rightarrow$
 $p(\text{esq}) = p(\text{dep} \cup \text{esq}) + p(\text{dep} \cap \text{esq}) - p(\text{dep})$
 $p(\text{esq}) = 0.6 + 0.15 - 0.35 = 0.4$
- $p(\text{dep} \cap \text{esq}^c) = p(\text{dep} \setminus \text{esq}) = p(\text{dep}) - p(\text{dep} \cap \text{esq}) = 0.35 - 0.15 = 0.2$

8. Donats els esdeveniments A , B i C no mútuament excloents, trobeu l'expressió i feu el diagrama de Venn per a les situacions següents:

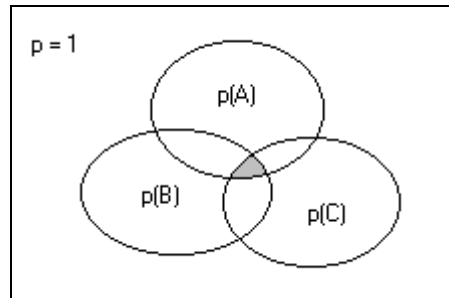
- Només es dona A
- Es dona A i B i C
- Es dona A o C
- Es dona l'esdeveniment B

- e) Es dona l'esdeveniment C però no el B
 f) No es dona ni l'esdeveniment A ni l'esdeveniment B

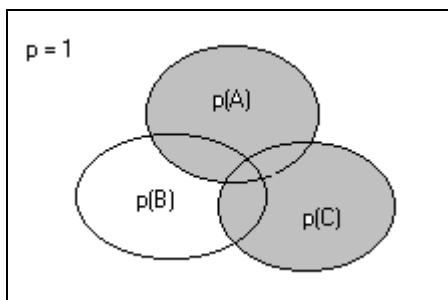
Solució:



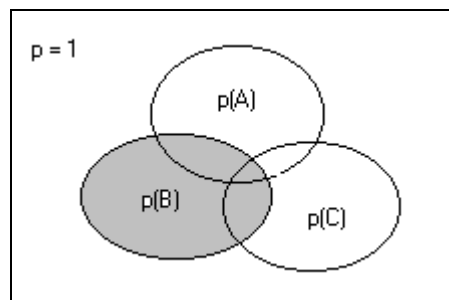
a) $p(A \setminus B \cup C)$



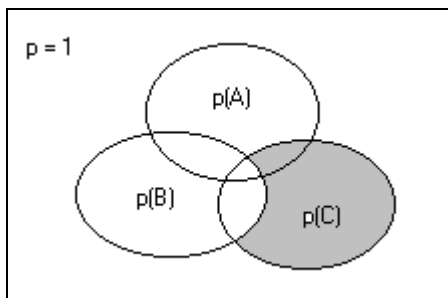
b) $p(A \cap B \cap C)$



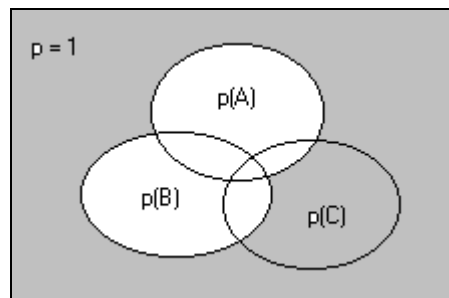
c) $p(A \cup C)$



d) $p(B)$



e) $p(C \setminus B)$



f) $p((A \cup B)^c)$

9. ¿Quines de les funcions següents defineixen l'espai de probabilitat $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$?

- a) $p(a_1) = 1/2, p(a_2) = 1/4, p(a_3) = 1/8$ i $p(a_4) = 1/8$
 b) $p(a_1) = -1/2, p(a_2) = 1/2, p(a_3) = 1/2$ i $p(a_4) = 0$
 c) $p(a_1) = 0.1, p(a_2) = 0.7, p(a_3) = 0.1$ i $p(a_4) = 0.1$
 d) $p(a_1) = 0.2, p(a_2) = 0.8, p(a_3) = 0.1$ i $p(a_4) = 0$
 e) $p(a_1) = 0.2, p(a_2) = 0.8, p(a_3) = 0.1$ i $p(a_4) = 0.1$
 f) $p(a_1) = 1/16, p(a_2) = 3/16, p(a_3) = 1/8$ i $p(a_4) = 1/8$
 g) $p(a_1) = 1/16, p(a_2) = 11/16, p(a_3) = 1/8$ i $p(a_4) = 1/8$
 h) $p(a_1) = 0.75, p(a_2) = 1/16, p(a_3) = 1/16$ i $p(a_4) = 1/8$

Solució:

- a) Sí, perquè $\sum p_i = 1$.
 b) No, ja que $p(a_1)$ és negativa.
 c) Sí, perquè $\sum p_i = 1$.

- d) No, perquè $\sum p_i > 1$.
- e) No, perquè $\sum p_i > 1$.
- f) No, perquè $\sum p_i < 1$.
- g) Sí, perquè $\sum p_i = 1$.
- h) Sí, perquè $\sum p_i = 1$.

10. Dels seixanta malalts mentals d'un centre de dia, trenta pateixen depressió, vint són alcohòlics i deu són alcohòlics i pateixen depressió. Determineu:

- a) La probabilitat que tinguin depressió o siguin alcohòlics.
- b) La probabilitat que no tinguin depressió i no siguin alcohòlics.

Solució:

$$n = 60;$$

$$p(\text{dep}) = 30/60 = 0.5$$

$$p(\text{alch}) = 20/60 = 0.33$$

$$p(\text{dep} \cap \text{alch}) = 10/60 = 0.17$$

- a) $p(\text{dep} \cup \text{alch}) = p(\text{dep}) + p(\text{alch}) - p(\text{dep} \cap \text{alch}) = 0.5 + 0.33 - 0.17 = 0.66$
- b) $p(\text{dep}^c \cap \text{alch}^c) = 1 - p(\text{dep} \cup \text{alch}) = 1 - 0.66 = 0.33$
Per la llei de Morgan, vegeu exercici 6 d

11. Si es tiren dos daus, trobeu la probabilitat que la suma dels seus nombres sigui més gran de vuit si:

- a) En el primer dau hi ha un 3.
- b) Hi ha un 4 en un dels dos daus com a mínim.

Solució:

- a) Espai mostral $\Omega = \{(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)\}$; sols hi ha un resultat dels sis possibles en què el resultat és superior a vuit, per tant $\rightarrow p = 1/6$
- b) Espai mostral $\Omega = \{(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) (1,4) (2,4) (3,4) (5,4) (6,4)\}$; hi ha quatre resultats dels onze possibles en què el resultat és superior a vuit, per tant $\rightarrow p = 4/11$

12. Es llancen tres monedes. Trobeu la probabilitat que totes siguin creus si se sap que:

- a) La primera és creu.
- b) Com a mínim dues de les monedes són creu.

Solució:

- a) Espai mostral $\Omega = \{(\oplus, \oplus, \oplus) (\oplus, \oplus, \ominus) (\oplus, \ominus, \oplus) (\oplus, \ominus, \ominus) (\ominus, \oplus, \oplus) (\ominus, \oplus, \ominus) (\ominus, \ominus, \oplus) (\ominus, \ominus, \ominus)\} \rightarrow p = 1/4$
- b) Espai mostral $\Omega = \{(\oplus, \oplus, \oplus) (\oplus, \oplus, \ominus) (\oplus, \ominus, \oplus) (\oplus, \ominus, \ominus) (\ominus, \oplus, \oplus) (\ominus, \oplus, \ominus) (\ominus, \ominus, \oplus) (\ominus, \ominus, \ominus)\} \rightarrow p = 1/4$

13. Es tiren dos daus i surten dos nombres diferents, trobeu:

- a) La probabilitat que sumin cinc.
- b) La probabilitat que hi hagi un 3.
- c) La probabilitat que sumin més de sis.
- d) La probabilitat que sumin set.

Solució:

Espai mostral $\Omega = \{(1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) (2,1) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) (3,1) (3,2) (3,4) (3,5) (3,6) (4,1) (4,2) (4,3) (4,5) (4,6) (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5)\}$;

- a) Hi ha quatre resultats dels trenta possibles en què la suma és igual a cinc, per tant $\rightarrow p = 4/30$
- b) Hi ha deu parelles en què un resultat és tres, per tant $\rightarrow p = 10/30$
- c) Hi ha divuit parelles en què la suma és superior a sis, per tant $\rightarrow p = 18/30$
- d) Hi ha sis parelles en què la suma és igual a set, per tant $\rightarrow p = 6/30$

14. En un grup de malalts d'Alzheimer un 75% va ser sotmès a teràpia farmacològica, un 50% a estimulació cognitiva i un 30% a teràpia farmacològica i estimulació cognitiva.

- a) Si es va ser sotmès a teràpia farmacològica, ¿quina és la probabilitat que se sotmetés a estimulació cognitiva?
- b) Si es va ser sotmès a estimulació cognitiva, ¿quina és la probabilitat que se sotmetés a teràpia farmacològica?
- c) Quina és la probabilitat que fos sotmès a teràpia farmacològica o estimulació cognitiva?

Solució:

$$p(TF) = 0.75$$

$$p(EC) = 0.5$$

$$p(TF \cap EC) = 0.3$$

- a) $p(EC | TF) = \frac{p(TF \cap EC)}{p(TF)} = \frac{0.3}{0.75} = 0.4$
- b) $p(TF | EC) = \frac{p(TF \cap EC)}{p(EC)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
- c) $p(TF \cup EC) = p(TF) + p(EC) - p(TF \cap EC) = 0.75 + 0.5 - 0.3 = 0.95$

15. En un grup de treballadors un 15% ha sofert baixa laboral per accident laboral, un 45% ha sofert baixa laboral per malaltia i un 13% ha sofert baixa laboral per accidentalitat laboral i per malaltia durant l'any 1998. Determineu:

- a) La probabilitat d'haver sofert baixa per accident laboral si s'ha patit una malaltia.
- b) La probabilitat d'haver sofert baixa per malaltia si s'ha patit un accident laboral.
- c) La probabilitat d'haver sofert baixa per accident laboral o per malaltia.
- d) La probabilitat de no haver sofert baixa per accident laboral si no s'ha patit baixa per malaltia durant aquest any.

Solució:

$$p(AL) = 0.15$$

$$p(M) = 0.45$$

$$p(AL \cap M) = 0.13$$

- a) $p(AL | M) = \frac{p(AL \cap M)}{p(M)} = \frac{0.13}{0.45} = 0.29$

- b) $p(M | AL) = \frac{p(AL \cap M)}{p(AL)} = \frac{0.13}{0.15} = 0.87$
- c) $p(AL \cup M) = p(AL) + p(M) - p(AL \cap M) = 0.15 + 0.45 - 0.13 = 0.47$
- d) $p(AL^c | M^c) = \frac{p(AL^c \cap M^c)}{p(M^c)} = \frac{1 - p(AL \cup M)}{p(M^c)} = \frac{0.53}{0.55} = 0.96$

Per la llei de Morgan, vegeu exercici 6 d

16. D'un grup de vuit-centes persones, cent cinquanta han estat diagnosticades de ludòpates, dos-cents d'alcohòlics i vint-i-sis de ludòpates i alcohòlics. Determineu:

- La probabilitat de ser ludòpata si s'ha diagnosticat alcoholisme.
- La probabilitat de ser alcohòlic si s'ha diagnosticat ludopatia.
- La probabilitat de ser alcohòlic o ludòpata.
- La probabilitat de no ser alcohòlic si no s'és ludòpata.
- La probabilitat de no ser ludòpata si no s'és alcohòlic.

Solució:

$n = 800$;

$p(\text{lud}) = 150/800 = 0.1875$

$p(\text{alch}) = 200/800 = 0.25$

$p(\text{lud} \cap \text{alch}) = 26/800 = 0.0325$

- a) $p(\text{lud} | \text{alch}) = \frac{p(\text{lud} \cap \text{alch})}{p(\text{alch})} = \frac{0.0325}{0.25} = 0.13$
- b) $p(\text{alch} | \text{lud}) = \frac{p(\text{lud} \cap \text{alch})}{p(\text{lud})} = \frac{0.0325}{0.1875} = 0.173$
- c) $p(\text{lud} \cup \text{alch}) = p(\text{lud}) + p(\text{alch}) - p(\text{lud} \cap \text{alch}) = 0.1875 + 0.25 - 0.0325 = 0.405$
- d) $p(\text{alch}^c | \text{lud}^c) = \frac{p(\text{lud}^c \cap \text{alch}^c)}{p(\text{lud}^c)} = \frac{1 - p(\text{lud} \cup \text{alch})}{p(\text{lud}^c)} = \frac{0.595}{0.8125} = 0.7323$

Per la llei de Morgan, vegeu exercici anterior

- e) $p(\text{lud}^c | \text{alch}^c) = \frac{p(\text{lud}^c \cap \text{alch}^c)}{p(\text{alch}^c)} = \frac{1 - p(\text{lud} \cup \text{alch})}{p(\text{alch}^c)} = \frac{0.595}{0.75} = 0.793$

17. Trobeu $p(B/A)$ si $A \subset B$.

Solució:

Si $A \subset B \rightarrow p(A \cap B) = p(A)$; per tant:

$$p(B|A) = p(A \cap B) / p(A) = 1$$

18. Trobeu $p(B/A)$ si B i A són mútuament excloents.

Solució:

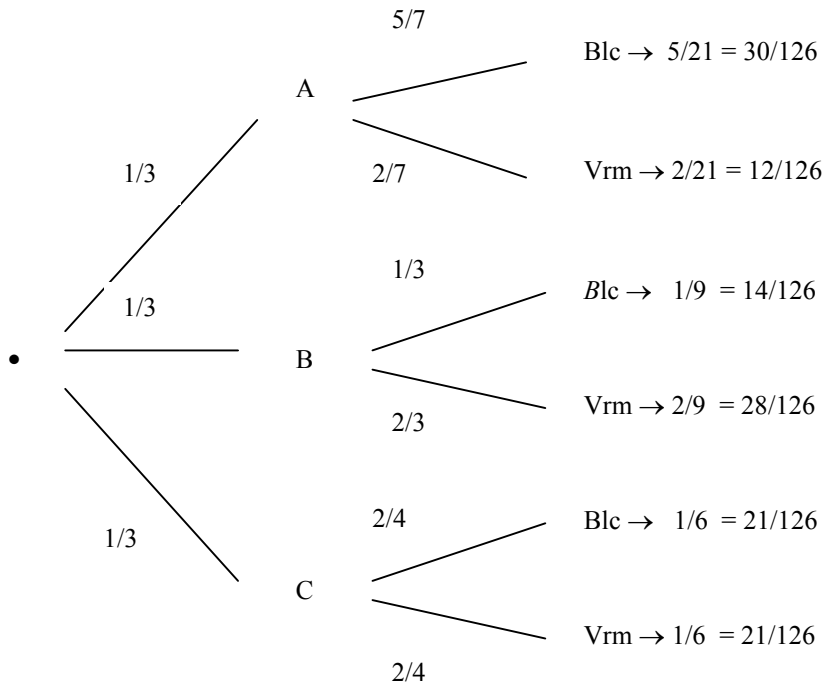
Si A i B són mútuament excloents $(A \cap B) = \emptyset$; per tant:

$$p(B|A) = p(A \cap B) / p(A) = p(\emptyset) / p(A) = 0$$

19. Si tenim tres urnes A , B i C . A l'urna A hi ha cinc boles blanques i dos boles vermelles, a l'urna B hi ha una bola blanca i dos boles vermelles i a l'urna C hi ha dos boles blanques i dos boles vermelles. Determineu:

- Selecció d'una urna a l'atzar, la probabilitat que una bola seleccionada sigui blanca.
- Sabent que s'ha seleccionat l'urna B , la probabilitat que la bola seleccionada sigui vermella.

Solució:



$$a) \quad p(\text{blc}) = \frac{5}{21} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{(30 + 14 + 21)}{126} = 0,5159$$

$$b) \quad p(\text{vrm} | \text{urna } B) = \frac{p(\text{urna } B \cap \text{vrm})}{p(\text{urna } B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

20. Una caixa de cinc tubs de ràdio té dos tubs defectuosos. Es proven tots els tubs un darrere l'altre fins que se'n troben dos de defectuosos.

- Quina és la probabilitat que se suspengui el procés en la segona prova?
- I en la tercera prova?

Solució:

$n = 5$ dels quals 2 defectuosos.

$$a) \quad p = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.1$$

$$b) \quad \begin{aligned} p_1 (\text{1r. No defectuós}) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ p_2 (\text{2n. No defectuós}) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ p_3 (\text{cap defectuós}) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ p &= p_1 + p_2 + p_3 = \frac{18}{60} = 0.3 \end{aligned}$$

21. En certa facultat de Psicologia el 4% dels nois i l'1% de les noies, mesuren més d'1.75 metres d'alçada. A més a més sabem que el 60% dels estudiants són dones. Si seleccionem un estudiant a l'atzar i és més alt d'1.75 m., ¿quina és la probabilitat que es tracti d'una dona?

Solució:

$$p(Dona) = 0.6$$

$$p(Home) = 0.4$$

$$p(Alt / Dona) = 0.01$$

$$p(Alt / Home) = 0.04$$

$$\begin{aligned} p(Dona / Alt) &= \frac{p(Dona) \cdot p(Alt / Dona)}{p(Dona) \cdot p(Alt / Dona) + p(Home) \cdot p(Alt / Home)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.01}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.04} = 0.2727 \end{aligned}$$

22. Tenim tres tipus de trastorns (A , B i C) que, tots ells, tenen en comú la presència de migranyes. La incidència de cada un d'ells és diferent, però. El trastorn A es presenta en un 10% dels casos, el B en el 20%, mentre que el C és el més habitual amb un 70% dels casos. La presència de migranya, per a cada trastorn, també és diferent. En la malaltia A apareix en el 90% dels subjectes, en la B en el 50%, mentre que en la C sols en el 5% dels individus.

Si un pacient presenta mal de cap, ¿quina és la probabilitat que pateixi la malaltia A ?

Solució:

$$p(A) = 0.1$$

$$p(B) = 0.2$$

$$p(C) = 0.7$$

$$p(m / A) = 0.9$$

$$p(m / B) = 0.5$$

$$p(m / C) = 0.05$$

$$\begin{aligned} p(A / m) &= \frac{p(A) \cdot p(m / A)}{p(A) \cdot p(m / A) + p(B) \cdot p(m / B) + p(C) \cdot p(m / C)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.9}{0.1 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.05} = 0.4 \end{aligned}$$

23. Trobeu l'esperança matemàtica, la variància i la desviació típica de les distribucions següents:

a)

x_i	4	5	6	7	9
$f(x_i)$	1/2	1/8	1/8	1/8	1/8

b)

x_i	-3	0	1
$f(x_i)$	1/2	1/4	1/4

c)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x_i)$	1/16	3/16	1/16	1/8	3/16	1/8	3/16	1/16

d)

x_i	-1/2	0	1/2	1	2
$f(x_i)$	1/4	1/16	5/16	1/8	1/4

Solució:

- a) $E(X) = \mu = \sum x_i \cdot p(x_i) = 4 \cdot 1/2 + 5 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/8 + 7 \cdot 1/8 + 9 \cdot 1/8 = 5.375$
 $VAR(X) = \sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 = 16 \cdot 1/2 + 25 \cdot 1/8 + 36 \cdot 1/8 + 49 \cdot 1/8 + 81 \cdot 1/8 - 5.375^2 = 31.875 - 5.375^2 = 2.984375$
 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.984375} = 1.7275344$
- b) $E(X) = \mu = \sum x_i \cdot p(x_i) = -3 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/4 = -1.25$
 $VAR(X) = \sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 = 9 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/4 - (-1.25)^2 = 4.75 - (-1.25)^2 = 3.1875$
 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3.1875} = 1.785371$
- c) $E(X) = 1 \cdot 1/16 + 2 \cdot 3/16 + 3 \cdot 1/16 + 4 \cdot 1/8 + 5 \cdot 3/16 + 6 \cdot 1/8 + 7 \cdot 3/16 + 8 \cdot 1/16 = 4.625$
 $VAR(X) = \sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 = 25.75 - (4.625)^2 = 4.359375$
 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.359375} = 2.0879116$
- d) $E(X) = -1/2 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/16 + 1/2 \cdot 5/16 + 1 \cdot 1/8 + 2 \cdot 1/4 = 0.65625$
 $VAR(X) = \sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 = 1.265625 - (0.65625)^2 = 0.834961$
 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.834961} = 0.913761$

24. La probabilitat de patir una depressió major a la població general és de 0.2. Si tenim una mostra de cinc persones. Determinar:

- La probabilitat que cap de les cinc persones pateixi una depressió major.
- La probabilitat que només tres persones pateixin una depressió major.
- La probabilitat que com a mínim quatre persones pateixin una depressió major.

Solució:

$$p(\text{dep}) = \pi = 0.2$$

$$n = 5$$

$$a) \quad p(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^5 = 0.32768$$

$$b) \quad p(X=3) = \binom{5}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^2 = 0.0512$$

$$c) \quad p(X \geq 4) = p(X=4) + p(X=5)$$

$$p(X=4) = \binom{5}{4} \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^1 = 0.0064$$

$$p(X=5) = \binom{5}{5} \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^0 = 0.00032$$

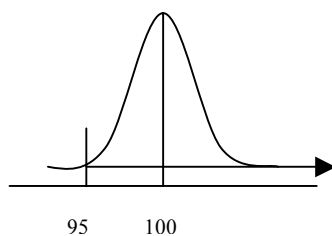
$$p(X \geq 4) = 0.0064 + 0.00032 = 0.00672$$

25. Si se suposa que el quocient intel·lectual (QI) es distribueix normalment amb mitjana 100 i desviació típica 15, determineu:

- a) La probabilitat que una persona tingui un QI superior a 95.
- b) La probabilitat que una persona tingui un QI entre 103 i 110.
- c) La probabilitat que una persona tingui un QI inferior a 93.
- d) Quin QI deixa per sobre seu el 60% de les persones amb QI més alt?
- e) Quin QI deixa per sota seu el 30% de les persones amb QI més baix?

Solució:

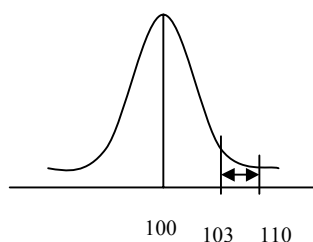
$$a) \quad p(X > 95) = ?$$



$$z = \frac{95 - 100}{15} = -0.3\bar{3} \rightarrow z = -0.33 \rightarrow p = 0.3707$$

$$p(X > 95) = 1 - 0.3707 = 0.6293$$

$$b) \quad p(103 \leq X \leq 110) = ?$$

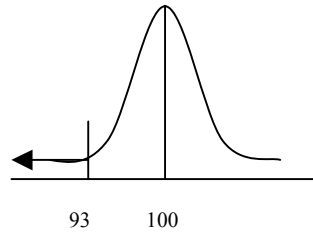


$$z = \frac{103 - 100}{15} = 0.2 \rightarrow z = 0.2 \rightarrow p = 0.4207$$

$$z = \frac{110 - 100}{15} = 0.67 \rightarrow z = 0.67 \rightarrow p = 0.2514$$

$$p(103 \leq X \leq 110) = 0.4207 - 0.2514 = 0.1693$$

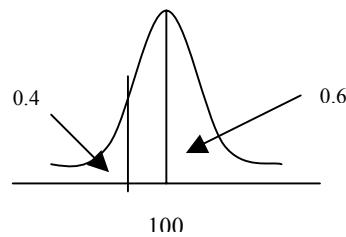
c) $p(X < 93) = ?$



$$z = \frac{93 - 100}{15} = -0.47 \rightarrow z = -0.47 \rightarrow p = 0.3192$$

$$p(X < 93) = 0.3192$$

d) QI ?



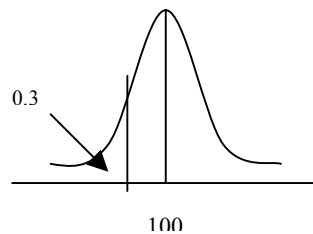
$$p = 0.4 \rightarrow z = -0.25$$

$$-0.25 = \frac{X_i - 100}{15} \rightarrow X_i = 96.25$$

El QI que deixa per sobre seu el 60% dels subjectes més intel·ligents és 96.25.

e) QI ?

$$p = 0.3 \rightarrow z = -0.52$$



$$-0.52 = \frac{X_i - 100}{15} \rightarrow X_i = 92.2$$

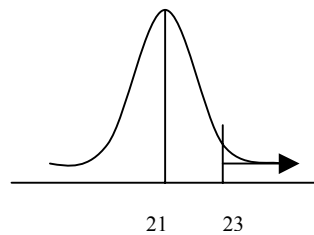
El QI que deixa per sota seu el 30% dels subjectes menys intel·ligents és 92.2.

26. Si se suposa que el qüestionari de depressió de Beck es distribueix normalment amb mitjana 21 i desviació típica 5, determineu:

- La probabilitat de tenir un valor per sobre de 23 en el qüestionari de Beck.
- La probabilitat de tenir entre un 14 i un 23 en el qüestionari de Beck.
- ¿Quin valor del qüestionari de depressió de Beck deixa per sota seu el 10% de les persones amb nivell més baix de depressió?
- ¿Quin valor del qüestionari de depressió de Beck deixa per sobre seu el 23% de les persones amb nivell més alt de depressió?
- La probabilitat de tenir més d'un 12 en el qüestionari de depressió de Beck.

Solució:

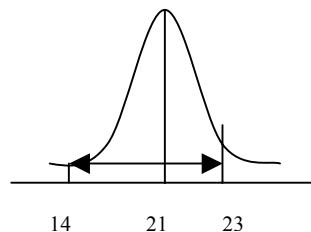
a) $p(X > 23) = ?$



$$z = \frac{23 - 21}{5} = 0.4 \rightarrow z = 0.4 \rightarrow p = 0.3446$$

$$p(X > 23) = 0.3446$$

b) $p(14 \leq X \leq 23) = ?$

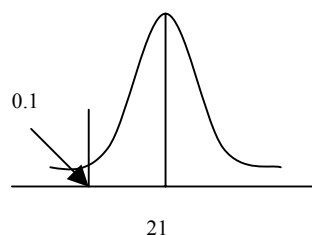


$$z = \frac{14 - 21}{5} = -1.4 \rightarrow z = -1.4 \rightarrow p = 0.0808$$

$$z = \frac{23 - 21}{5} = 0.4 \rightarrow z = 0.4 \rightarrow p = 0.3446$$

$$p(14 \leq X \leq 23) = 1 - (0.0808 + 0.3446) = 0.5746$$

c) Puntuació del qüestionari de depressió de Beck?

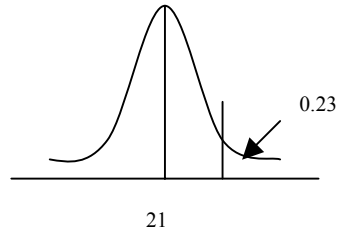


$$p = 0.1 \rightarrow z = -1.28$$

$$-1.28 = \frac{X_i - 21}{5} \rightarrow X_i = 14.6$$

El valor en el qüestionari de depressió de Beck que deixa per sota seu el 10% dels subjectes amb un nivell més baix de depressió és 14.6.

d) Puntuació qüestionari de depressió de Beck?

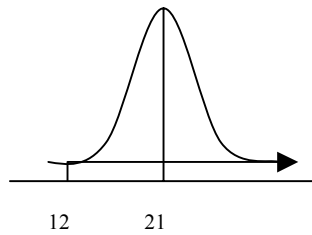


$$p = 0.23 \rightarrow z = 0.74$$

$$0.74 = \frac{X_i - 21}{5} \rightarrow X_i = 24.7$$

El valor en el qüestionari de depressió de Beck que deixa per sobre seu el 23% dels subjectes amb un nivell més alt de depressió és 24.7.

e) $p(X > 12) = ?$



$$z = \frac{12 - 21}{5} = -1.8 \rightarrow z = -1.8 \rightarrow p = 0.0359$$

$$p(X > 12) = 1 - 0.0359 = 0.9641$$

TEMA 3. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA BÀSICA

"Fa temps que estic obtenint resultats, però encara no sé com hi he arribat"

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

El primer pas que s'ha de fer quan es disposa d'una base de dades per analitzar és una descripció acurada de totes i cadascuna de les variables, tant a nivell univariable com a nivell bivariabile o multivariable. L'objectiu del present tema consisteix en la presentació de les tècniques bàsiques de l'estadística descriptiva.

Abans de començar a desenvolupar aquestes tècniques es considera necessari fer una petita introducció del que és una variable i establir la classificació dels diferents tipus de variables. Aquest punt és important perquè en funció dels tipus de variables els indicadors a obtenir per fer-ne la descripció són diferents.

3.1. TIPUS DE VARIABLES I ESCALES DE MESURA

Una variable es defineix com una característica que es manifesta segons dos o més modalitats de resposta en contraposició a una constant que només pot prendre un únic valor. En conseqüència, una variable és susceptible de mesura.

Bàsicament es poden diferenciar dos tipus de variables, les variables qualitatives o categòriques i les variables quantitatives o numèriques. Les variables qualitatives mesuren atributs com poden ser el gènere, la província de naixement, etc. Les variables numèriques mesuren característiques quantificables a partir de nombres reals, com poden ser l'alçada, l'edat, el pes, etc. A la vegada, les variables quantitatives poden ser discretes o contínues. La diferència entre aquests dos tipus radica en el fet que entre dos valors de la variable per a les discretes només existeix un nombre finit de valors possibles, mentre que per a les contínues existeix un nombre infinit de valors possibles. Un exemple del primer tipus és el nombre de fills per unitat familiar, i un exemple del segon tipus és el pes. De totes maneres, en moltes ocasions en mesurar les variables quantitatives contínues es discretitzen perquè els instruments de mesura utilitzats no tenen una precisió del 100%.

Per determinar el valor que presenta un subjecte en una variable el que es fa és utilitzar una escala de mesura. Bàsicament, hi ha quatre tipus d'escala de mesura en funció de les seves característiques mètriques segons la classificació clàssica de Stevens¹. A continuació es llisten des de la que presenta menys complexitat fins a la que presenta major complexitat a nivell mètric:

¹ Stevens, S.S. (1946). On the theory of scales of measurement. *Science* 103, 677-680.

- Nominal
- Ordinal
- D'interval
- De raó

En l'escala nominal només es compleix la relació d'igualtat-desigualtat. És a dir, es pot dir si un subjecte és igual o diferent en la característica avaluada respecte a un altre subjecte. Un exemple de variable mesurada en escala nominal és el gènere, amb dos modalitats de resposta, home i dona.

En l'escala ordinal, a més a més de complir-se la relació d'igualtat-desigualtat es compleix la relació d'ordre entre les modalitats de resposta. És a dir, entre les diferents modalitats de resposta de la variable es pot establir un ordre des de la modalitat que presenta la característica en menor mesura fins a la que la presenta en major mesura. Per exemple, la variable classe social mesurada com a baixa, mitjana i alta, està mesurada en escala ordinal; l'ordre que s'estableix és:

baixa < mitjana < alta.

En l'escala d'interval, a més a més de complir-se les relacions d'igualtat-desigualtat i d'ordre entre les modalitats de resposta, existeix una unitat de mesura, aquesta es pot quantificar numèricament i per tant és possible l'operació matemàtica entre elles. Les operacions que es poden realitzar són la suma, la resta i la divisió entre les diferències. I no existeix el zero absolut. L'origen de l'escala és arbitrari. L'exemple per excel·lència d'aquest tipus d'escala és la temperatura: els 0° C no correspon a l'absència del que s'està mesurant.

En l'escala de raó, a més a més de complir-se les relacions d'igualtat-desigualtat i d'ordre entre les modalitats de resposta, es pot operar matemàticament entre elles. Les operacions que es poden fer són la suma, la resta, la multiplicació i la divisió. La característica que millor defineix aquesta escala de mesura és l'existència del zero absolut. Un exemple de variable mesurada en escala de raó és el nombre de fills per unitat familiar, on el zero indica l'absència del que s'està mesurant.

A continuació es mostra una taula amb els diferents tipus d'escals de mesura i les seves característiques principals:

Escala	Operacions/Característiques	Transformacions	Exemples
Nominal	-Relació igualtat-desigualtat	Qualsevol que faci correspondre a cada valor un codi diferent	Gènere, província de naixement
Ordinal	-Relació igualtat-desigualtat -Relació d'ordre	Monòtona creixent	Classe social
D'interval	-Relació igualtat-desigualtat -Relació d'ordre -Unitat de mesura -Existència del zero arbitrari	$Y = a + b \cdot X$ on $b \neq 0$	Temperatura, quocient intel·lectual
De raó	-Relació igualtat-desigualtat -Relació d'ordre -Unitat de mesura -Existència del zero absolut	$Y = b \cdot X$ on $b \neq 0$	Nombre de fills, edat, alçada

3.2. DESCRIPCIÓ D'UNA VARIABLE QUALITATIVA

Perquè una variable qualitativa estigui ben mesurada les seves modalitats de resposta han de complir tres condicions bàsiques, a saber:

- Que estiguin ben definides
- Que siguin exhaustives
- Que siguin mútuament excloents

Es diu que les modalitats de resposta estan ben definides quan se sap què vol dir cada modalitat de resposta. Per exemple, si es defineix com a classe social baixa la unitat familiar que té uns ingressos inferiors als 900 € mensuals, com a classe social mitjana la unitat familiar que té uns ingressos entre 1200 i 3300 € mensuals i com a classe social alta la unitat familiar que té uns ingressos superiors als 3000 € mensuals, es pot dir que les modalitats de resposta de la variable estan ben definides.

Entenem per “exhaustiu” aquell sistema de categories que permet assignar a qualsevol subjecte una modalitat de resposta. En l'exemple anterior no es pot parlar d'exhaustivitat, perquè les unitats familiars que tenen uns ingressos entre 900 i 1200 € mensuals no es poden assignar a cap modalitat de resposta. Aquest problema es pot solucionar definint la categoria classe social mitjana com a unitat familiar amb ingressos entre 900 i 3300 € mensuals.

Moltes vegades per aconseguir que el sistema de categories sigui exhaustiu es crea la categoria "altres" (per exemple a l'hora de recollir informació sobre la professió).

Entenem per “sistema de categories mútuament excloent” el sistema en què a cada subjecte només se li pot assignar una modalitat de resposta de la variable. L'exemple anterior no compleix aquesta condició, hi ha un encavalcament entre les categories corresponents a classe social mitjana (900 - 3300 € mensuals) i classe social alta (més de 3000 € mensuals). Aquest problema es pot resoldre redefinint una de les dues categories, per exemple, es pot definir classe social mitjana com aquelles unitats familiars que tenen uns ingressos entre 900 i 3000 € mensuals.

Un cop assegurat que la variable qualitativa està ben categoritzada es pot procedir a la seva descripció.

La descripció d'una variable qualitativa es pot fer amb els indicadors resum, en concret, de la construcció de la taula de freqüències, o bé gràficament. La informació que s'obté a partir de la taula de freqüències o a partir d'un gràfic és exactament la mateixa.

3.2.1. *Obtenció de la taula de freqüències*

L'explicació de l'obtenció de la taula de freqüències es fa a partir d'un exemple. En una mostra de 30 alumnes s'ha recollit informació sobre el nivell d'ansietat davant d'un examen (baix, moderat i alt) i el rendiment en l'examen (aprovat i suspens). Totes dues són variables qualitatives mesurades en escala ordinal. Les dades simulades es mostren a la taula següent:

Subjecte	Ansietat	Nota	Subjecte	Ansietat	Nota
1	Baixa	Suspens	16	Mitjana	Aprovat
2	Mitjana	Aprovat	17	Mitjana	Suspens
3	Mitjana	Aprovat	18	Mitjana	Aprovat
4	Alta	Suspens	19	Mitjana	Suspens
5	Alta	Suspens	20	Alta	Suspens
6	Alta	Suspens	21	Alta	Suspens
7	Alta	Aprovat	22	Alta	Suspens
8	Mitjana	Aprovat	23	Alta	Suspens
9	Mitjana	Aprovat	24	Mitjana	Suspens
10	Mitjana	Aprovat	25	Mitjana	Suspens
11	Mitjana	Suspens	26	Baixa	Aprovat
12	Mitjana	Suspens	27	Baixa	Aprovat
13	Mitjana	Aprovat	28	Alta	Aprovat
14	Baixa	Aprovat	29	Baixa	Aprovat
15	Baixa	Aprovat	30	Baixa	Aprovat

La construcció de la taula de freqüències passa per l'obtenció de sis indicadors, a saber:

- *La freqüència observada (f_i)*. És el nombre de vegades que s'observa cadascuna de les categories de resposta de la variable en la mostra estudiada.
En l'exemple hi ha set persones que presenten un nivell d'ansietat baix, en conseqüència la freqüència observada de la categoria "baix" és de 7.
Aquest índex s'ha de trobar per a totes i cadascuna de les modalitats de resposta de la variable. La suma de les freqüències observades a través de totes les categories de la variable és igual al nombre de subjectes total o grandària mostral amb què es treballa (n).
- *La freqüència relativa o proporció (p_i)*. És el quocient entre la freqüència observada de cada categoria i la grandària mostral amb què es treballa.
En l'exemple la proporció corresponent a la categoria "baix" de la variable nivell d'ansietat és de 0.233 (7/30).
La suma de les proporcions a través de totes les categories de la variable estudiada és igual a 1.
- *El percentatge (P_i)*. És igual a la proporció de cadascuna de les categories multiplicada per 100.
En l'exemple el percentatge corresponent a la categoria nivell d'ansietat "baix" és igual a 23.33%.
La suma dels percentatges de totes les categories de la variable estudiada és igual al 100%.
- *La freqüència acumulada (F_a)*. És el nombre d'observacions que corresponen a una categoria determinada de la variable i a les inferiors a aquesta categoria. En conseqüència, només té sentit quan la variable està mesurada en escala ordinal. Per obtenir aquest indicador és important que les categories de la variable estiguin ordenades en la taula de freqüències des de la menor a la major.
Una manera senzilla d'obtenir aquest indicador és anar sumant les freqüències observades a través de les categories.
En l'exemple la freqüència acumulada per la categoria nivell d'ansietat baix és de 7 (és la primera categoria); per nivell d'ansietat mitjà és de 21: la freqüència observada de la categoria mitjana (14) més la de la categoria baix (7).
La freqüència acumulada de l'última categoria ha de ser igual a la grandària mostral amb què es treballa.
- *La freqüència relativa o proporció acumulada (p_a)*. És la proporció o freqüència relativa que correspon a una categoria determinada de la variable i a les inferiors. Tal com passa

amb la freqüència acumulada només té sentit quan la variable està mesurada en escala ordinal i les categories han d'estar ordenades en la taula de freqüències de menor a major.

En l'exemple la proporció acumulada de la categoria nivell d'ansietat baix és de 0.233, per a la categoria "nivell d'ansietat mitjà" és de 0.7 (0.233 + 0.467) i finalment per a la categoria "nivell d'ansietat alt" és d'1 (0.233 + 0.467 + 0.3).

La proporció acumulada corresponent a l'última categoria de la variable ha de ser sempre igual a 1.

- *El percentatge acumulat (P_a).* És el percentatge que correspon a una categoria determinada i a les seves inferiors. Tal com passa per a la freqüència acumulada i per a la proporció acumulada només té sentit quan la variable està mesurada en escala ordinal i a més a més, per poder-lo obtenir les categories han d'estar ordenades a la taula de freqüències.

En l'exemple el percentatge acumulat per a la categoria nivell d'ansietat baix és de 23.33%, per a mitjà és de 70% (23.33 + 46.67) i per a alt és del 100% (23.33 + 46.67 + 30).

El percentatge acumulat corresponent a l'última categoria de la variable ha de ser sempre igual al 100%.

La taula següent mostra la taula de freqüències de la variable nivell d'ansietat de l'exemple proposat.

Ansietat	f_i	p_i	P_i	F_a	p_a	P_a
Baixa	7	0,23	23,33	7	0,23	23,33
Mitjana	14	0,467	46,67	21	0,7	70
Alta	9	0,3	30	30	1	100
Total	30	1	100			

En aquesta taula s'observa que gairebé la meitat dels subjectes de la mostra presenten un nivell d'ansietat mitjà (46.67%), i que només un 23.33% dels subjectes presenten un nivell d'ansietat baix. És a dir, un 86.67% dels subjectes estudiats mostren com a mínim un nivell d'ansietat mitjà.

La taula de freqüències corresponent a la variable "nota" es mostra a continuació:

Nota	f_i	p_i	P_i	F_a	p_a	P_a
Suspens	14	0,467	46,67	14	0,467	46,67
Aprovat	16	0,533	53,33	30	1	100
Total	30	1	100			

A la taula s'observa que pràcticament la meitat de la mostra suspèn la prova realitzada (46.67%), mentre que la resta de persones la superen. En aquesta variable, tot i estar mesurada en escala ordinal, no tenen gaire sentit els indicadors acumulats ja que la variable només té dos modalitats o categories de resposta.

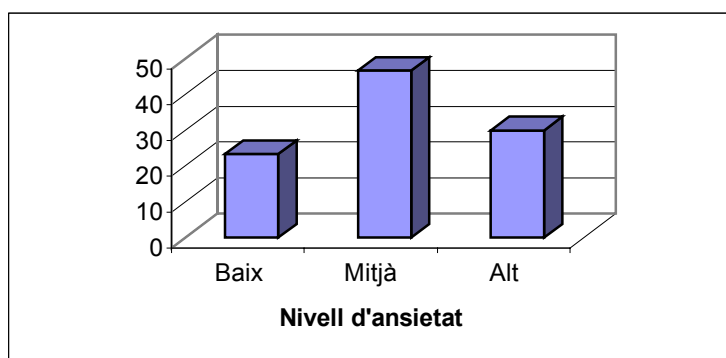
3.2.2. *Descripció gràfica: diagrama de barres i ciclograma*

La representació gràfica d'una variable qualitativa es pot realitzar bàsicament a partir del diagrama de barres i del ciclograma.

El *diagrama de barres* es construeix a partir d'uns eixos de coordenades cartesianes. En l'eix d'abscisses (eix horitzontal) es representen les diferents categories de resposta de la variable. S'ha de

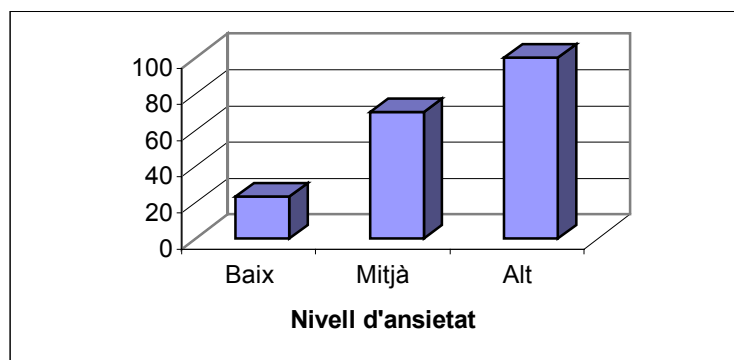
tenir en compte que si la variable està mesurada en escala ordinal les categories han d'estar ordenades. En l'eix d'ordenades (eix vertical) es pot representar la freqüència observada, la proporció o el percentatge. És més recomanable utilitzar una mesura relativa (proporció o percentatge) per construir aquests gràfics ja que no depenen de la grandària mostral utilitzada i en conseqüència permeten comparar directament la distribució de la variable en diferents mostres.

A continuació es mostra el diagrama de barres construït a partir del percentatge per a les dades corresponents al “nivell d'ansietat”.



La informació que aporta aquest gràfic és exactament la mateixa que la de la taula de freqüències comentada anteriorment.

Aquest gràfic, en el cas de variables mesurades en escala ordinal es pot construir a partir dels indicadors acumulats. Per al cas de la variable “nivell d'ansietat” seria com es mostra a continuació (fet a partir del percentatge acumulat):



El *ciclograma* és un tipus de representació gràfica que divideix l'àrea d'una circumferència en tants sectors com categories té la variable. La repartició dels graus de la circumferència per a cadascuna de les categories de la variable es fa de manera proporcional en funció de la freqüència observada per cada categoria. De fet el que s'aplica és una regla de tres:

$$360^\circ \rightarrow n$$

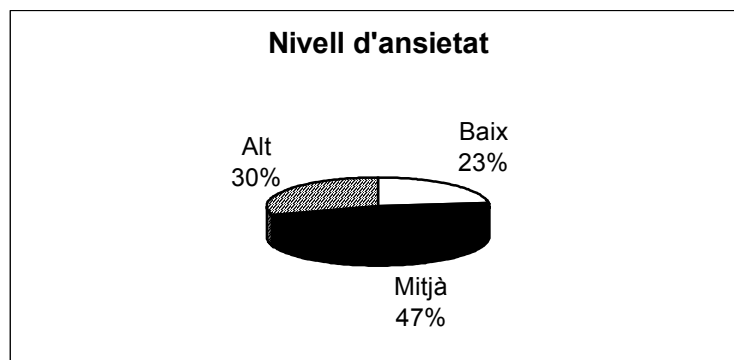
$$x^\circ \rightarrow f_i$$

$$x^\circ = \frac{360 \cdot f_i}{n} = 360 \cdot p_i$$

En el cas de la variable “nivell d'ansietat” els graus corresponents a cada angle de cercle són:

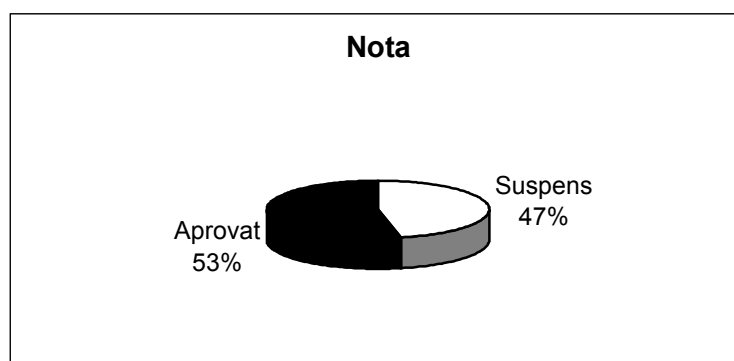
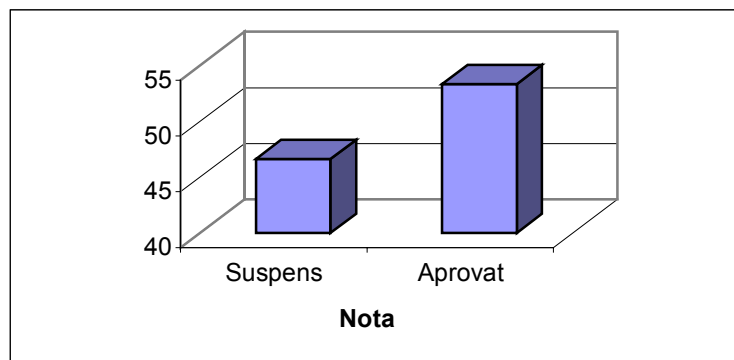
$$\begin{aligned}\text{Baix} &= 360 \cdot 0.2333 = 83.988^\circ \\ \text{Mitjà} &= 360 \cdot 0.4667 = 168.012^\circ \\ \text{Alt} &= 360 \cdot 0.3 = 108^\circ\end{aligned}$$

Un cop obtinguts els graus es construeix el gràfic, que en aquest cas és el següent:



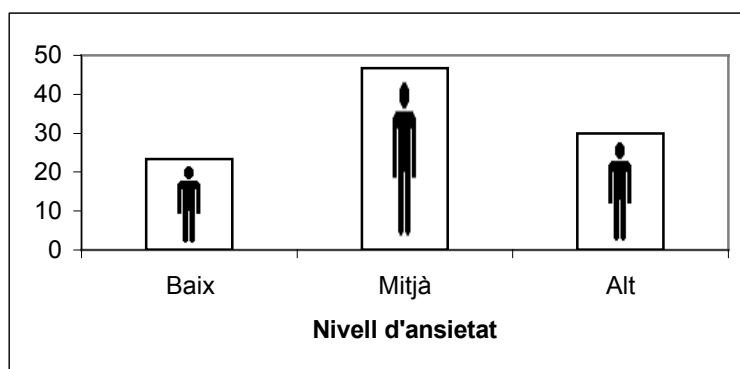
Novament, la informació proporcionada per aquesta representació gràfica és la mateixa que l'aportada per la taula de freqüències o el diagrama de barres.

El diagrama de barres i el ciclograma corresponents a la variable nota es mostren a continuació.



Tal com s'observa en aquests gràfics, la informació aportada és la mateixa que la de la taula de freqüències.

Tant en el cas del diagrama de barres com en el ciclograma es pot utilitzar algun motiu al·lusiú a la variable que es representa, en aquest cas el gràfic pren el nom de *pictograma*. Aquest tipus de representacions són molt utilitzades en els infogrames de la premsa escrita. És important que a l'hora de fer la representació no quedin alterades les àrees corresponents a cada categoria, ja que aquestes han de ser sempre proporcionals a la freqüència o proporció que correspongui, d'altra manera pot donar lloc a interpretacions errònies. En la figura següent es mostra un exemple de pictograma.



3.3. DESCRIPCIÓ CONJUNTA DE DUES VARIABLES QUALITATIVES: CONSTRUCCIÓ D'UNA TAULA DE CONTINGÈNCIA

La descripció conjunta de dues variables qualitatives es fa a partir de la construcció d'una taula de contingència. Per fileres s'entren les categories de resposta d'una de les variables i per columnes les categories de resposta de l'altra variable.

A les caselles centrals de la taula es consigna la freqüència observada de la confluència de les dues categories observades, la de la variable entrada per fileres i la de la variable entrada per columnes. En l'exemple la freqüència observada de persones que tenen un nivell d'ansietat baix i que suspenen és de 1, el que en percentatges correspon a un 3.33% del total de la mostra estudiada.

En el marginal columna es mostra la descripció univariada de la variable entrada per fileres i en el marginal filera es mostra la descripció univariada de la variable entrada per columnes.

La taula de contingència entre les dues variables de l'exemple és la següent:

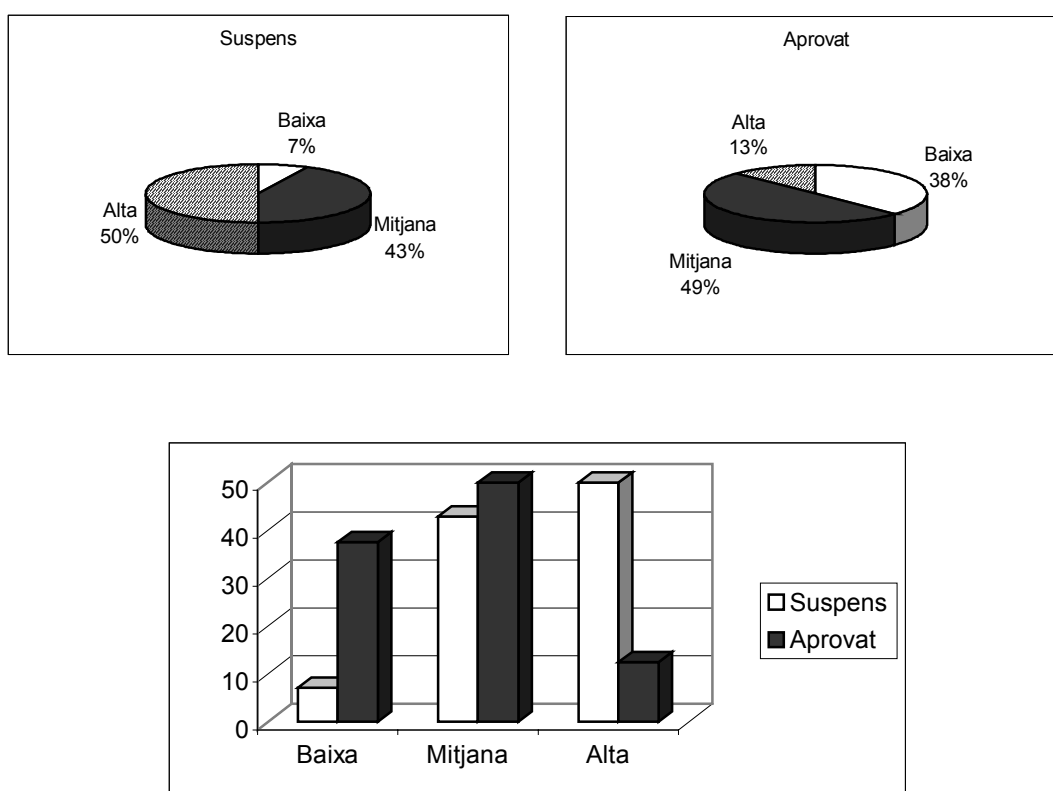
		Nota		Total
		Suspens	Aprovat	
Ansietat	Baixa	1 (3.33%)	6 (20%)	7
	Mitjana	6 (20%)	8 (26.67%)	14
	Alta	7 (23.33%)	2 (6.67%)	9
Total		14	16	30

Com s'observa en aquesta taula els subjectes amb ansietat baixa presenten un millor rendiment en la prova (de 7 subjectes d'ansietat baixa n'aproven 6) que els subjectes amb ansietat

alta (de 9 subjectes d'ansietat alta només 2 aproven). En el grup d'ansietat mitjana el nombre de subjectes que suspenen o aproven és pràcticament igual.

Com s'ha dit en el marginal columna de la taula es mostra la freqüència observada de la variable nivell d'ansietat mentre que en el marginal filera es mostra aquest mateix indicador per a la variable nota.

Aquesta descripció conjunta es pot fer també gràficament, a partir del ciclograma o bé a partir del diagrama de barres diferenciant per a les categories d'una de les variables. Aquestes representacions gràfiques es mostren a continuació per a les dades de l'exemple diferenciant per la variable nota. La informació aportada pels gràfics és la mateixa que la de la taula de contingència.



3.4. DESCRIPCIÓ D'UNA VARIABLE QUANTITATIVA

La descripció d'una variable quantitativa es pot fer mitjançant l'obtenció d'indicadors resum o bé gràficament, tal com s'ha comentat en el cas de la descripció d'una variable qualitativa. Ara bé, en aquest cas la informació proporcionada amb els indicadors es complementa amb la proporcionada de manera gràfica.

L'explicació dels diferents indicadors i gràfics a obtenir per a la descripció d'una variable quantitativa es realitza a partir d'un exemple. Es disposa d'informació d'una mostra de vint subjectes sobre el seu nivell de depressió mesurat a partir del qüestionari de depressió de Beck i del seu nivell de rendiment en el subtest d'aritmètica del WAIS. Les dades simulades es mostren a continuació:

Subjecte	Beck	Aritmètica	Subjecte	Beck	Aritmètica
1	5	19	11	15	10
2	6	18	12	20	8
3	7	17	13	22	7
4	8	18	14	18	9
5	9	15	15	19	11
6	4	18	16	15	12
7	5	16	17	14	16
8	6	15	18	9	17
9	12	14	19	8	16
10	6	16	20	7	17

3.4.1. Indicadors resum

Els indicadors resum a obtenir per descriure una variable quantitativa mesurada com a mínim amb una escala d'interval són de quatre tipus: de posició, de tendència central, de dispersió i de forma. Els indicadors de posició divideixen la sèrie de dades ordenada en diverses parts. Els de tendència central indiquen quin és el valor que resumeix la informació proporcionada per les dades. Els indicadors de dispersió proporcionen el grau de variabilitat que existeix a les dades. Finalment, els indicadors de forma mostren com és la distribució de la variable.

- *Indicadors d'ordre o posició:*

Per al càlcul de qualsevol dels indicadors de posició sempre s'ha de partir de la sèrie ordenada de menor a major valor. Es comenten alguns dels indicadors més utilitzats:

- *Mediana (Md).* És el valor que està exactament en la part central de la sèrie, per tant divideix el nombre de valors originals en dues parts iguals.

Els passos a seguir per trobar la mediana són:

1. Ordenar els valors de la distribució de la variable del més petit al més gran.
2. Buscar el valor que ocupa la posició del mig. Si el nombre de valors és senar el valor que ocupa la posició central és la mediana, si el nombre de valors és parell, la mediana és la mitjana dels dos valors centrals. Per localitzar la posició de la mediana es pot aplicar la fórmula següent: $(n+1)/2$.

Per la variable depressió seria:

1. Ordenació: 4-5-5-6-6-6-7-7-8-8-9-9-12-14-15-15-18-19-20-22
2. Obtenció de la mediana: donat que hi ha vint valors, la mediana ocupa la posició 10.5. En conseqüència la mitjana entre el 8 (valor que ocupa la posició deu) i el 9 (valor que ocupa la posició onze) és 8.5, que és el valor de la mediana.

- *Quartils (Q_k).* Aquests indicadors divideixen el conjunt de dades en quatre grups d'igual grandària, per tant, es poden calcular tres quartils: Quartil_1 (Q_1); Quartil_2 (Q_2), que correspondrà a la Md i Quartil_3 (Q_3). Entre el Q_1 i el Q_3 hi ha el 50% central de les dades originals.
- *Decils (D_k).* En aquest cas se secciona la sèrie de dades en deu parts d'igual grandària, per tant, es poden calcular nou decils. S'ha de fer notar que el D_5 correspondrà a la Md i també al Q_2 .
- *Centils o percentils (P_k).* Com ja s'intueix, els centils divideixen la sèrie de dades en cent parts d'igual grandària. Tots els indicadors anteriors tindran una correspondència en centils. Així:

$$\begin{aligned}
 Md &= Q_2 = D_5 = P_{50}; \\
 Q_1 &= P_{25}; \\
 Q_3 &= P_{75}; \\
 D_6 &= P_{60}; etc.
 \end{aligned}$$

Això vol dir que amb la fórmula següent per al càlcul dels centils, es pot calcular qualsevol indicador de posició:

$$\begin{aligned}
 P_k &= x_i + (j - i) \cdot (x_{i+1} - x_i); \\
 \text{on } j &= \frac{k(n+1)}{100}; \quad i = \text{Trunc}(j)
 \end{aligned}$$

k representa el centil concret a calcular, j serveix per calcular la posició exacta que ocuparà aquest centil en la sèrie original, mentre que i és el valor truncat (agafant sols la part sencera del valor) de j .

El càlcul del Q_1 i el Q_3 de la variable depressió es mostra a continuació:

1. Ordenació: 4-5-5-6-6-6-7-7-8-8-9-9-12-14-15-15-18-19-20-22
2. $Q_1 = P_{25}$; $Q_3 = P_{75}$. Es localitza on es troben aquests valors.

Per a Q_1 :

$$j = \frac{25(20+1)}{100} = 5.25 \quad i = 5$$

Per a Q_3 :

$$j = \frac{75(21)}{100} = 15.75 \quad i = 15$$

3. Obtenció dels quartils.

Per a Q_1 :

$$P_{25} = 6 + (5.25 - 5) \cdot (6 - 6) = 6$$

Per a Q_3 :

$$P_{75} = 15 + (15.75 - 15) \cdot (15 - 15) = 15$$

- *Indicadors de tendència central o de nivell:*
 - *Moda (Mo).* És el valor de la variable que té màxima freqüència. Aquest indicador es pot trobar en qualsevol tipus de variables.

Una distribució amb referència a la moda pot ser unimodal si només hi ha una moda, multimodal si hi ha més d'una moda (bimodal - dos modes, trimodal - tres modes...), o bé amodal quan no hi ha cap moda., és a dir, quan tots els valors tenen la mateixa freqüència.

En l'exemple anterior la moda per a la variable "depressió" (Beck) és 6, donat que és el valor que té màxima freqüència (3).

- *Mediana (Md)*. La mediana s'ha vist que és el valor que es troba en la meitat de la distribució de les dades. Per tant, a més de ser un indicador d'ordre, també ho serà de tendència central.
- *Mitjana aritmètica ($\bar{x}$)*. És la suma de tots els valors de la distribució dividit pel nombre de valors de la distribució (n). La fórmula de càlcul es mostra a continuació:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

La mitjana aritmètica o mitjana és el valor que es troba en el centre de la distribució. D'aquest fet, se'n deriva una de les seves propietats, a saber, que el sumatori de la resta de cadascun dels valors de la distribució i la mitjana (aquest procés s'anomena centrat d'una variable) és igual a zero. Aquesta propietat queda formulada en l'expressió següent:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

Aquest indicador és millor que els altres dos perquè en la seva obtenció es tenen en compte tots i cadascun dels valors de la distribució. Ara bé, això és també un dels problemes d'aquest índex, ja que queda afectat per l'existència de valors extrems o "outliers", és a dir, valors que s'allunyen molt de la majoria dels valors de la distribució per una de les cues. Quan es dona aquest fet, val més obtenir la mediana com a indicador de tendència central, ja que aquesta no queda afectada per l'existència de valors extrems, és un *indicador resistent*.

Per exemple, donada la distribució: 4, 5, 6, 3, 7; la mediana és 5 i la mitjana també. Si se substitueix el 6 per un 21 (4-5-21-3-7) la mediana continua sent 5 però la mitjana és 8. Aquest indicador ha quedat afectat per un valor que s'allunya molt de la majoria dels valors de la distribució, el 21, i en conseqüència ha augmentat el seu valor. Si els valors extrems s'allunyen per la cua de baix de la distribució, el valor de la mitjana també tendeix cap a la cua de baix.

Per a la variable "depressió" la mitjana és:

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 4 + 5 + 6 + 12 + 6 + 15 + 20 + 22 + 18 + 19 + 15 + 14 + 9 + 8 + 7}{20}$$

$$= 10.75$$

Els indicadors de tendència central obtinguts per a la variable "nivell de depressió" mesurada a partir del qüestionari de Beck són:

$$\begin{aligned} Mo &= 6 \\ Md &= 8.5 \\ \bar{x} &= 10.75 \end{aligned}$$

A partir d'aquests valors es pot dir que la mitjana obtinguda en aquest qüestionari pels subjectes de la mostra és de 10.75. D'altra banda, també s'observa que els tres indicadors de tendència central són força diferents entre si. De fet, que la moda sigui menor que la mediana i aquesta que la mitjana fa sospitar que la distribució no és simètrica i que hi ha valors que s'allunyen per la cua de dalt de la distribució.

- *Mitjanes retallades.* A fi d'evitar el problema de l'aparició de valors allunyats, es poden utilitzar les mitjanes retallades. El seu càlcul és el mateix que la mitjana però sols utilitza un determinat percentatge central dels valors originals de la sèrie. Per tant hi ha mitjanes retallades al 5%, al 20%, o al percentatge que es vulgui. En el cas de la mitjana retallada al 50%, aquesta pren el nom de *Centrimèdia* (C_m).

Amb les dades de la depressió:

$$1. \quad 4 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 7 \ 7 \ 8 \ 8 \ 9 \ 9 \ 12 \ 14 \ 15 \ 15 \ 18 \ 19 \ 20 \ 22$$

$$2. \quad C_m = \frac{6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 + 12 + 14 + 15}{10} = 9.5$$

- *Mitjana entre quartils* ($\bar{Q}$). Es tracta d'una mesura molt senzilla que consisteix a fer la mitjana dels Q_1 i Q_3 .
- *Mitjana entre extrems* ($\bar{E}$). És similar a l'anterior però en comptes de sols tenir en compte els extrems del 50% central de les dades, es fa la mitjana dels valors mínim i màxim.

Seguint amb l'exemple de la variable depressió:

$$1. \quad \bar{Q} = \frac{Q_1 + Q_3}{2} = \frac{6 + 15}{2} = 10.5$$

$$2. \quad \bar{E} = \frac{E_{\text{inf}} + E_{\text{sup}}}{2} = \frac{4 + 22}{2} = 13$$

- *Indicadors de dispersió o variabilitat:*

Amb els indicadors de tendència central no es té prou informació per descriure una distribució. Es poden tenir dues distribucions que tinguin els mateixos indicadors de tendència central però que no siguin iguals. A la taula següent s'exemplifica això:

Mostra 1	Mostra 2
4	3
5	5
6	7
amodal Md = 5 $\bar{x} = 5$	amodal Md = 5 $\bar{x} = 5$

Tot i que la mediana i la mitjana són iguals per a les dues mostres, aquestes no són iguals: els valors de la mostra 2 presenten més variabilitat que els de la mostra 1, és a dir, hi ha més dispersió. En aquest cas és fàcil de veure que les dues mostres no són iguals perquè hi ha pocs valors, però quan hi ha molts valors és difícil d'apreciar amb un simple cop d'ull. Aquest fet evidencia la necessitat d'obtenir indicadors de variabilitat o dispersió. Aquests indicadors donen una idea de en quina mesura estan separats entre si els valors d'una distribució determinada.

Els principals indicadors de dispersió es mostren a continuació:

- *Rang o amplitud total* (A). És la diferència entre el valor màxim i el valor mínim de la distribució estudiada.

$$A = E_{\text{superior}} - E_{\text{inferior}}$$

El problema d'aquest indicador de variabilitat és que només té en compte dos valors, i a més a més, pel fet que són el menor i el major de la distribució, queda altament afectat per l'existència de valors extrems.

Per a la variable "depressió" el rang és: $A = 22 - 4 = 18$

- *Rang interquartílic o diferència de quartils (IQR o dq).* És similar a l'anterior però té en compte sols el 50% central de la distribució de les dades, o sigui els valors compresos entre els dos quartils 1r i 3r.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Per a la variable "depressió" el rang interquartílic és: $IQR = 15 - 6 = 9$

- *Variància (s^2).* La variància, a diferència del rang, té en compte tots els valors de la distribució. Matemàticament queda expressat com:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n}$$

Com es desprèn de la fórmula anterior, la variància és la mitjana de les diferències al quadrat de cada valor respecte a la mitjana. Indica quant s'allunya de mitjana cada valor de la mitjana de la distribució.

El valor de la variància per a la variable "depressió" és:

$$s^2 = \frac{(5 - 10.75)^2 + (6 - 10.75)^2 + (7 - 10.75)^2 + \dots + (7 - 10.75)^2}{20} = 30.487$$

Aquest indicador de variabilitat és adequat quan la mitjana és un indicador adequat com a mesura de tendència central. Però un dels seus inconvenients és que les unitats de mesura estan elevades al quadrat i per tant és difícilment interpretable.

- *Quasivariància ($\hat{\sigma}^2$).* La seva fórmula de càlcul és:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Com es pot veure és molt similar a la variància, i quan la mostra (n) és molt gran, la diferència entre els dos valors és mínima. S'utilitza aquest últim quan no es pretén sols descriure el conjunt de les dades de la mostra, sinó fer una suposició de la dispersió de la població de la qual ha estat extreta. (ATENCIÓ: com que aquesta situació acostuma a ser la més habitual, treballar amb mostres però per poder fer generalitzacions a la població de referència, la majoria

de paquets estadístics informàtics sota l'etiqueta de variància de fet estan donant el valor que aquí s'ha definit com a quasivariància).

Com que els dos indicadors comparteixen el mateix numerador, que s'anomena *suma de quadrats de la variable* (SQ_x), un cop calculat un resultat és molt fàcil el pas per saber el valor de l'altre:

$$\begin{aligned}
 SQ_x &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\
 s^2 &= \frac{SQ_x}{n} \Rightarrow SQ_x = n \cdot s^2 \\
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{SQ_x}{n-1} \Rightarrow SQ_x = (n-1) \cdot \hat{\sigma}^2 \quad ; \quad \text{per tant} \\
 n \cdot s^2 &= (n-1) \cdot \hat{\sigma}^2
 \end{aligned}$$

Amb les dades anteriors:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2 = \frac{20}{19} \cdot 30.487 = 32.092$$

- *Desviació típica o estàndard (s)*. Per tal de solucionar el problema de les unitats al quadrat de la variància es troba la seva arrel quadrada. Aquest nou indicador de variabilitat és la desviació típica, que queda formulada com:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

- *Quasidesviació típica o estàndard ($\hat{\sigma}$)*. Es fa la mateixa distinció que per al cas de la variància:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Per a les dades corresponents a “depressió” la desviació i la quasidesviació típiques seran:

$$s = \sqrt{30.487} = 5.521$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{32.092} = 5.665$$

En resum, alguns dels indicadors de dispersió per la variable “nivell de depressió” mesurada a partir del qüestionari de Beck són:

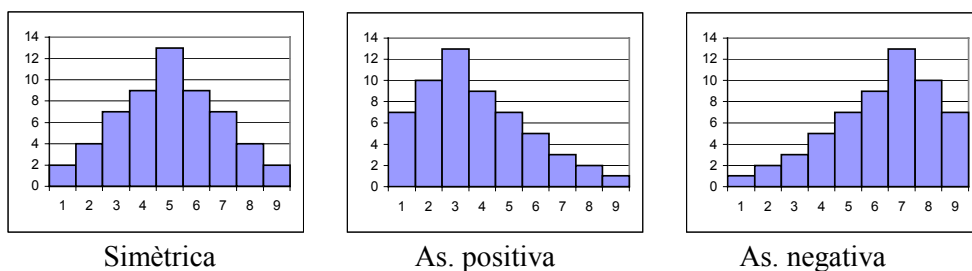
$$\begin{aligned}
 A &= 18 \\
 s^2 &= 30.487 \\
 s &= 5.521
 \end{aligned}$$

D'aquests indicadors es desprèn que la variabilitat observada és força elevada, en concret, la desviació típica és de 5.521, que és una mica més de la meitat de la mitjana: 10.75.

- *Indicadors de forma:*

Finalment, per acabar de descriure una variable quantitativa mesurada com a mínim en escala d'interval cal obtenir els indicadors de forma. Hi ha dos tipus d'indicadors de forma, els de simetria i els de curtosi o apuntament.

- *Simetria.* Els indicadors de simetria indiquen si la distribució és simètrica respecte a la mediana, és a dir, si en dividir la distribució per la mediana, les dues parts són imatge una de l'altra. Els tres tipus de simetria es mostren a la figura següent:



Quan la distribució és simètrica la moda, la mediana, la mitjana i qualsevol altre índex de tendència central són iguals i coincideixen en el punt de màxima alçada de la distribució. Si la distribució és asimètrica positiva, o per la cua dreta, el punt de màxima alçada (major freqüència observada) correspon a la moda, la mediana és superior a la moda i la mitjana és superior a la mediana. Si la distribució és asimètrica negativa, o per la cua esquerra, el punt de màxima alçada correspon a la moda, la mediana és inferior a la moda i la mitjana és inferior a la mediana. Com que a vegades la moda és un indicador ambigu, es pot comparar la mediana, la mitjana entre quartils i la mitjana entre extrems, si:

$$\begin{aligned} Md &\approx \bar{Q} \approx \bar{E} \Rightarrow \text{simètrica} \\ Md < \bar{Q} < \bar{E} &\Rightarrow \text{asimètrica positiva} \\ Md > \bar{Q} > \bar{E} &\Rightarrow \text{asimètrica negativa} \end{aligned}$$

Moltes proves estadístiques tenen com a condició d'aplicació que la sèrie de dades sigui simètrica. Per tal de corregir la asimetria d'una distribució es poden utilitzar diverses *transformacions* dels valors originals de la variable.

La asimetria negativa la presenten els valors de les variables en què apareix l'*efecte sostre*, o sigui variables que poden prendre qualsevol valor en la part inferior del rang, però tenen un valor màxim que no pot ser superat. La correcció d'aquesta asimetria es pot aconseguir normalment elevat al quadrat o al cub, o a qualsevol altra potència les dades de la sèrie original (a mesura que la potència sigui més alta la transformació serà més forta):

$$T(x_i) = x_i^p \quad \text{on} \quad p = 2, 3, \dots$$

Per contra, la asimetria positiva apareixerà si es produeix l'anomenat efecte terra, o sigui que hi ha un valor inferior mínim però en canvi la variable en pot prendre qualsevol altre en la part superior de l'escala. En Psicologia es té una variable molt utilitzada que sol presentar aquest

patró: es tracta del “temps de reacció” (temps que triga un subjecte a contestar una determinada tasca). En efecte, hi ha un temps mínim 0 mseg, però no hi ha una fita màxima de temps per a la resposta. En aquest cas s’ha d’utilitzar una transformació que faci l’efecte contrari de les anteriors. Això s’aconsegueix prenent l’arrel quadrada o el logaritme dels valors originals:

$$T(x_i) = \sqrt{x_i}$$

$$T(x_i) = \log x_i$$

Un dels indicadors per avaluar la simetria de la distribució és el T1:

$$T1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / s^3}{n}$$

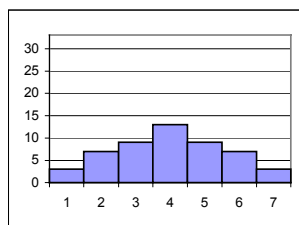
Interpretació:

- Si $T1 = 0 \rightarrow$ Simètrica
- Si $T1 > 0 \rightarrow$ Asimètrica positiva o cap a la dreta
- Si $T1 < 0 \rightarrow$ Asimètrica negativa o cap a l'esquerra

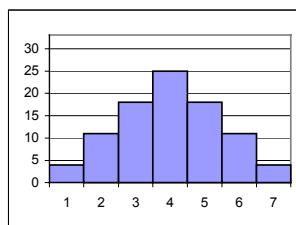
Per a la variable “depressió”, $T1 = 0.5997$.

- *Curtosi*. La curtosi indica el grau d’apuntament de la distribució respecte a una distribució de referència. La distribució de referència per avaluar la curtosi és la distribució normal.

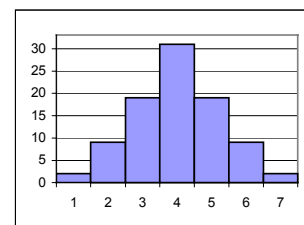
A la figura següent es mostren els tres tipus de curtosi:



Platicúrtica



Mesocúrtica



Leptocúrtica

Un dels indicadors per avaluar la simetria de la distribució és el T2:

$$T2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / S^4}{n} - 3$$

Interpretació:

- Si $T2 = 0 \rightarrow$ Mesocúrtica
- Si $T2 > 0 \rightarrow$ Leptocúrtica
- Si $T2 < 0 \rightarrow$ Platicúrtica

Per a la variable “depressió”, $T2 = -1.1639$

A partir dels indicadors de forma és pot dir que la distribució de la variable “nivell de depressió” és lleugerament asimètrica positiva (0.5997) amb una tendència a ser platicúrtica (-1.1639). La forma asimètrica positiva ja s’ha pogut deduir de la comparació dels indicadors de tendència central, ja que la mediana (8.5) és inferior a la mitjana entre quartils (10.5) i aquesta

inferior a la mitjana entre extrems (13). També es veu que la moda (6) és inferior a la mediana (8.5) i aquesta a la mitjana (10.75).

Alguns indicadors per al subtest d'aritmètica en els subjectes estudiats es mostren a la taula següent:

Descripció del subtest d'aritmètica del WAIS		
Tendència central	Dispersió	Forma
Mo = 16	rang = 12	T1 = -0.7146
Md = 16	S ² = 12.645	T2 = -0.9354
$\bar{x}$ = 14.14	S = 3.556	

A partir d'aquests valors es pot dir que la mitjana dels subjectes de la mostra en aquest subtest és de 14.14, sent els valors de la moda i de la mediana iguals, 16 -una mica superiors a la mitjana- la qual cosa pot fer sospitar de l'existència d'alguns valors extrems per la cua de baix. D'altra banda, també es pot concloure que hi ha una moderada variabilitat, perquè la desviació tipus és de 3.556. Finalment, amb referència a la forma de la distribució, es pot dir que hi ha una petita tendència a la asimetria negativa o cap a l'esquerra (T1 = -0.7146). També es pot veure que presenta una lleugera tendència a ser platicúrtica.

3.4.2. Descripció gràfica

Les representacions gràfiques més típiques i tradicionals per a la descripció d'una variable quantitativa són l'histograma i el polígon de freqüències. Junt amb aquestes se'n comenten dues utilitzades més modernament però a la vegada de molta difusió en l'actualitat; es tracta del diagrama de tija i fulles i del diagrama de caixa².

- *Histograma.* Per a la construcció d'un histograma el primer que s'ha de fer és agrupar en intervals els diferents valors de la variable. El nombre d'intervals òptim està entre 5 i 10. Aquests intervals se situen en l'eix d'abscisses dels eixos de coordenades. L'amplitud de cada interval pot ser igual per a tots ells o bé diferent. Per cada interval s'alça una barra que dona idea de quina és la freqüència d'observacions en aquell interval. Però a diferència del diagrama de barres, no és l'alçada de la barra la que dona la idea de la freqüència observada per a cada interval sinó que és l'àrea de la barra. Per determinar l'alçada de la barra s'utilitza la fórmula del rectangle (àrea = base x alçada), on l'àrea correspon a la freqüència observada en aquell interval i la base a l'amplitud de l'interval, en conseqüència només cal aïllar de la fórmula anterior l'alçada, fet que queda recollit en l'expressió següent:

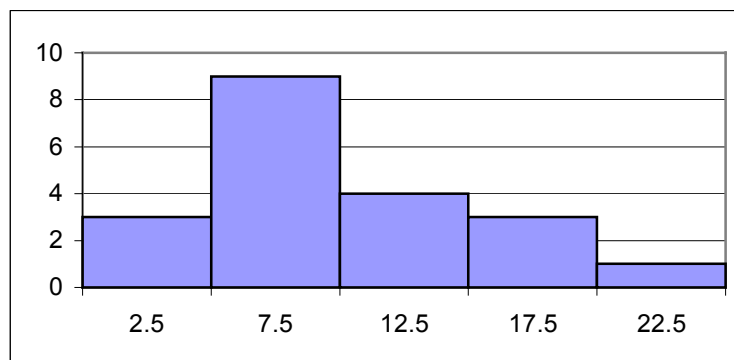
$$Alçada = \frac{Àrea}{Base} = \frac{Freqüència}{Amplitud Interval}$$

En el cas que tots els intervals siguin d'igual amplitud, no cal aplicar la fórmula anterior. En aquests casos l'alçada pot ser igual a la freqüència de cada interval.

² Tukey, J.W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Reading: Addison Wesley.

És important destacar que en aquest gràfic les barres estan juntes unes amb les altres, no hi ha cap espai entre elles. Això fa palès que la variable és contínua.

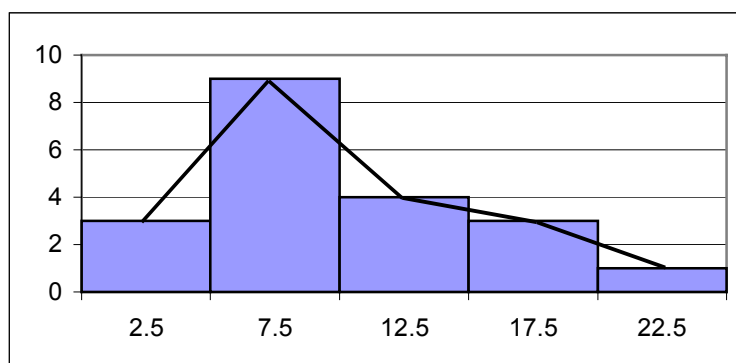
En la figura següent es mostra l'histograma de la variable “nivell de depressió” mesurada a partir del qüestionari de Beck.



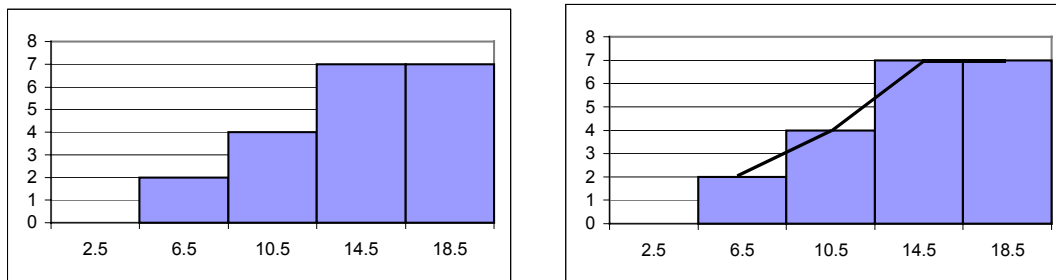
Aquest gràfic s'ha construït amb intervals d'igual amplada, en concret una amplada de cinc, i el nombre total d'intervals és de cinc. Cada interval queda representat pel seu valor central o *marca de classe*, però també es pot indicar amb el valor inicial i final de cada interval. Com s'observa en aquest gràfic, la distribució de la variable “nivell de depressió” tendeix cap a una asimetria positiva, perquè hi ha valors que s'allunyen per la cua de dalt de la distribució. De totes maneres s'ha de remarcar el fet que hi ha pocs intervals i també poques dades, i recordar que només s'està treballant amb una mostra de vint subjectes.

- *Polígon de freqüències.* Aquesta representació gràfica només es pot fer quan els intervals de l'histograma són d'igual amplitud. Sobre l'histograma s'uneixen els punts centrals o marca de classe a partir d'una línia.

El polígon de freqüències per a la variable “nivell de depressió” mesurada a partir del qüestionari de Beck es mostra a continuació:



L'histograma i el polígon de freqüències per al subtest d'aritmètica del WAIS es mostren al gràfic següent:



Aquests gràfics s'han construït a partir de cinc intervals d'amplada cinc. En els dos gràfics s'observa una clara asimetria negativa de la distribució de les puntuacions dels subjectes en el subtest d'aritmètica, observació que ja s'ha fet a partir de l'indicador de simetria. De totes maneres, tal com s'ha comentat en el cas de la variable “nivell de depressió”, s'ha de tenir en compte que només es disposa de vint subjectes a la mostra i que només s'han fixat cinc intervals, i a més a més, en el primer interval no es dona cap observació.

- *Diagrama de tija i fulles.* Aquest tipus de gràfic és molt similar a l'histograma, i proporciona la mateixa informació respecte a la forma i dispersió de les dades. La diferència consisteix que a partir del gràfic es pot reconstruir la sèrie original de dades, mentre que amb l'histograma tots els valors d'un interval queden representats pel valor de la marca de classe.

Per a la construcció del gràfic es divideix cada una de les dades en dues parts, una va a la tija i l'altra a la fulla.

Per exemple, el valor 16 queda dividit com:

Tija		Fulla
1		6

S'ha de procurar dividir en un nombre adequat de tiges les dades originals; en efecte, si hi ha poques tiges les dades estaran totes agrupades, per contra, si hi ha excessives categories en quedaran moltes de buides per la part intermèdia.

Per al cas de la variable “nivell de depressió”:

Gràfic amb tres tiges:

Qüestionari de depressió de Beck *Stem-and-Leaf Plot*

Frequency	Stem & Leaf
12,00	0 . 455666778899
6,00	1 . 245589
2,00	2 . 02
Stem width:	10
Each leaf:	1 case(s)

Gràfic amb 5 tiges

Qüestionari de depressió de Beck *Stem-and-Leaf Plot*

Frequency	Stem & Leaf
1,00	0 . 4
11,00	0 . 55666778899
2,00	1 . 24
4,00	1 . 5589
2,00	2 . 02

Stem width: 10
Each leaf: 1 case(s)

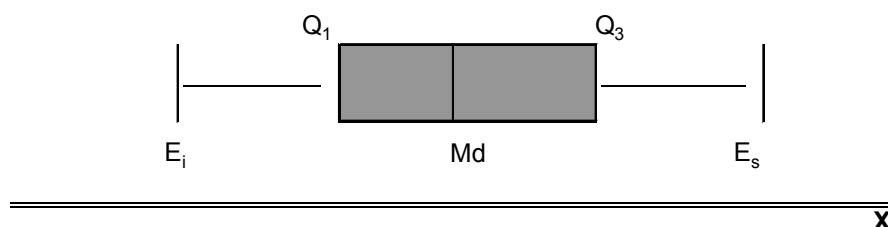
Tal com s'observa en l'histograma, aquest gràfic mostra una tendència a la asimetria positiva en la distribució de la variable "nivell de depressió", especialment en el cas de treballar només amb tres tiges.

- *Diagrama de caixa* (Box plot). El diagrama de caixa és un tipus de gràfic molt senzill, però a la vegada molt informatiu. Per a la seva representació es parteix de la taula resum o sumari de Tukey (John Wilder Tukey, 1915-2000), també anomenat sumari de cinc números i que es mostra a continuació:

	n			
	Md		Md	
Q ₁		Q ₃	$\overline{Q}$	IQR
E _i		E _s	$\overline{E}$	A

El sumari de Tukey resumeix en pocs valors diferents indicadors de la distribució de les dades. En efecte, dins de la part tramada es troben indicadors de posició; en la primera columna a la dreta hi ha indicadors de tendència central, de la comparació dels quals s'aconsegueix informació sobre la forma (simetria) de la sèrie; a l'últim es disposa de dos indicadors de dispersió: del total de la sèrie (A) i del 50% central de les dades (IQR).

La representació més simple consisteix a representar sobre un escalament de la variable X, els cinc valors de posició del sumari de Tukey:



Aquesta senzilla representació permet amb un cop d'ull veure com és la dispersió de les dades en funció de si estan molt oberts o tancats la capsa central i els extrems. També es pot veure la forma de la sèrie, si la mediana està centrada voldrà dir que és simètrica; si és més pròxima als valors baixos voldrà dir que és asimètrica positiva, per contra si està més pròxima als valors alts serà asimètrica negativa.

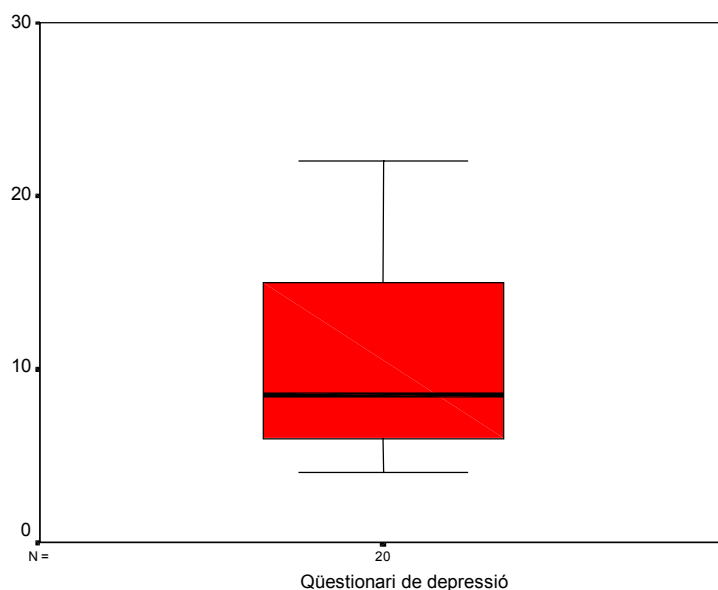
Una altra forma de representar el diagrama de caixa consisteix a situar els valors dels quartils 1 i 3 i la mediana, però en comptes de representar els extrems se situen uns límits calculats de la forma següent:

$$L_{\text{inferior}} = Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR}$$

$$L_{\text{superior}} = Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR}$$

Aquests límits permetran detectar si hi ha algun o alguns valors tant per la part baixa com per la part alta de la sèrie que estan molt allunyats (*outliers*).

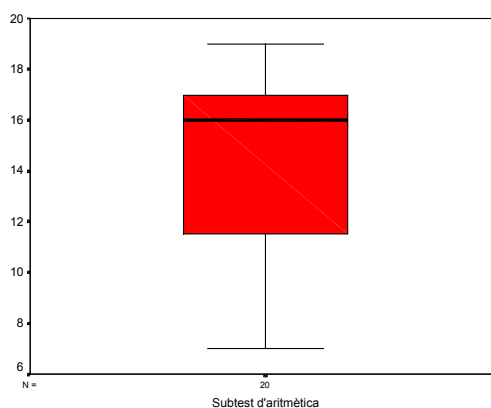
Per l'exemple, es mostra a continuació el diagrama de caixa de la variable “depressió”:



Novament en aquest gràfic s'observa la asimetria positiva de la distribució de la variable “nivell de depressió”, de fet aquesta asimetria es dona tant al 50% central de la distribució com als extrems.

Els diagrames de tija i fulles i de caixa per al subtest d'aritmètica del WAIS es mostren a continuació:

Frequency	Stem &	Leaf
3,00	0 .	789
4,00	1 .	0124
13,00	1 .	
5566667778889		
Stem width:		10
Each leaf:		1
case(s)		



En aquests dos gràfics s'observa la clara asimetria negativa de la distribució de la variable tal com ja s'ha remarcat en l'histograma. A més a més, a partir del diagrama de caixa s'observa que la asimetria negativa es dona tant en el 50% central com en les patilles.

3.5. DESCRIPCIÓ CONJUNTA DE DUES VARIABLES QUANTITATIVES: COVARIÀNCIA I COEFICIENT DE CORRELACIÓ DE PEARSON

La descripció conjunta de dues variables quantitatives mesurades com a mínim a nivell d'interval es realitza a partir de la covariància i del coeficient de correlació de Pearson (Karl Pearson, 1857-1936). Aquests dos indicadors donen idea de si existeix una relació lineal entre les dues variables.

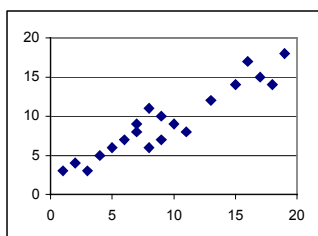
Abans de calcular aquests indicadors és convenient realitzar una representació gràfica conjunta de les dues variables. Aquest gràfic rep el nom de núvol de punts o gràfic de dispersió.



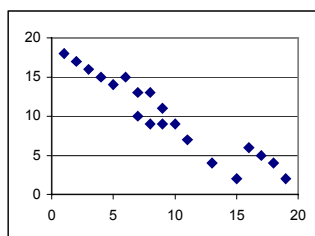
Karl Pearson

El núvol de punts es construeix en uns eixos de coordenades. En l'eix d'abscisses es representen els valors d'una de les variables i en l'eix d'ordenades els valors de l'altra variable. Finalment, se situen els parells de punts rep a cada subjecte als eixos de coordenades.

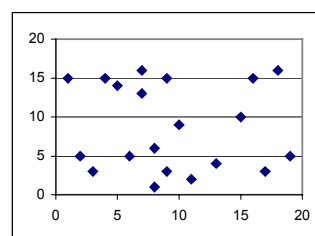
Bàsicament es poden donar tres situacions, a saber, que hi hagi una relació lineal directa o positiva entre les dues variables, és a dir, que a mesura que augmenten els valors d'una variable també augmentin els de l'altra; que hi hagi una relació lineal inversa o negativa, és a dir, que a mesura que augmenten els valors d'una variable disminueixin els de l'altra; i finalment que no hi hagi relació lineal entre les dues variables. Gràficament aquestes situacions queden representades a la figura següent.



Directa



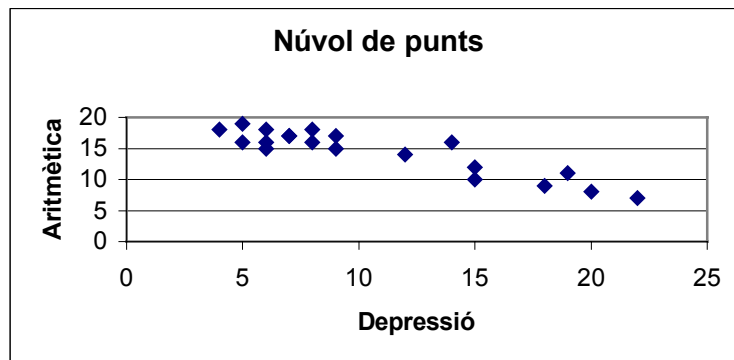
Inversa



Sense relació

Quan no hi ha relació lineal entre les dues variables això no sempre vol dir que no hi ha relació entre elles, ja que la relació pot ser curvilínia, exponencial, etc.

El núvol de punts per a les dues variables de l'exemple es mostra a continuació:



En aquest gràfic s'observa que la relació entre el nivell de depressió i el rendiment en el subtest d'aritmètica és pràcticament lineal. A més a més, és una relació inversa, és a dir, a mesura que augmenta el nivell de depressió disminueix el rendiment en el subtest d'aritmètica.

Una manera de copsar numèricament l'existència de relació lineal entre dues variables quantitatives mesurades com a mínim a nivell d'interval és a partir de la covariància. La fórmula de la covariància és la següent:

$$Cov_{xy} = S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{n-1}$$

Al numerador de la covariància se l'anomena *suma de productes creuats* (SP_{xy}):

$$SP_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

Com es pot veure, la suma de quadrats d'una variable és un cas particular de suma de productes creuats d'una variable amb ella mateixa. Per tant la variància d'una variable serà un cas particular de covariància d'una variable amb ella mateixa. En efecte,

$$SP_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = SQ_x$$

$$Cov_{xx} = \frac{SP_{xx}}{n-1} = \frac{SQ_x}{n-1} = s^2$$

Si el valor de la covariància és positiu es diu que la relació és directa, si és negatiu la relació és inversa i si és zero no hi ha cap relació.

El càlcul del coeficient de covariància per a les dades de l'exemple es mostra a la taula següent:

Beck (X)	Aritmètica (Y)	(X - mitjana)	(Y - mitjana)	(x-mitjana)·(Y- mitjana)
5	19	-5,75	4,55	-26,1625
6	18	-4,75	3,55	-16,8625
7	17	-3,75	2,55	-9,5625
8	18	-2,75	3,55	-9,7625
9	15	-1,75	0,55	-0,9625
4	18	-6,75	3,55	-23,9625
5	16	-5,75	1,55	-8,9125
6	15	-4,75	0,55	-2,6125
12	14	1,25	-0,45	-0,5625
6	16	-4,75	1,55	-7,3625
15	10	4,25	-4,45	-18,9125
20	8	9,25	-6,45	-59,6625
22	7	11,25	-7,45	-83,8125
18	9	7,25	-5,45	-39,5125
19	11	8,25	-3,45	-28,4625
15	12	4,25	-2,45	-10,4125
14	16	3,25	1,55	5,0375
9	17	-1,75	2,55	-4,4625
8	16	-2,75	1,55	-4,2625
7	17	-3,75	2,55	-9,5625
Sumatori				-360,75

$$Cov_{xy} = S_{xy} = \frac{-360,75}{19} = -18,987$$

A partir d'aquest valor es pot dir que la relació entre el nivell de depressió i el rendiment en el subtest d'aritmètica és inversa, tal com s'ha observat en la representació gràfica. De totes maneres no es pot saber si aquesta relació és molt important o no.

La covariància és un indicador que depèn de les unitats de mesura i que va de $-\infty$ a $+\infty$, en conseqüència no es pot saber si un valor de cent indica una relació molt important o poc important. El coeficient de correlació de Pearson (r_{xy}) és un indicador que resol aquest problema. És un índex que no depèn de les unitats de mesura els valors del qual oscil·len entre -1 i +1.

Interpretació:

$r_{xy} = 0 \rightarrow$ Sense relació lineal

$r_{xy} > 0 \rightarrow$ Relació lineal directa o positiva

$r_{xy} < 0 \rightarrow$ Relació lineal inversa o negativa

Si $r_{xy} = 1$ la relació és directa perfecta, és a dir, tots els punts estan sobre una línia recta amb pendent positiu. Si $r_{xy} = -1$ la relació és inversa perfecta (tots els punts estan sobre una línia recta amb pendent negatiu).

La fórmula de la correlació es mostra a continuació:

$$r_{xy} = \frac{Cov_{xy}}{\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_y}$$

Per a les dades de l'exemple i tenint en compte que les quasidesviacions típiques de les dues variables ja s'han calculat i són igual a 5.665 i 3.649, el coeficient de correlació és:

$$r_{xy} = \frac{-18.987}{5.665 \cdot 3.649} = -0.9185$$

Aquest valor indica l'existència d'una relació lineal inversa molt forta entre el nivell de depressió i el rendiment en el subtest d'aritmètica, ja que és un valor molt proper a -1.

3.6. ACTIVITATS PRÀCTIQUES

- Es va realitzar un estudi per determinar la relació entre el nivell d'ansietat tret, mesurat a partir del qüestionari STAI, i el rendiment acadèmic. Les dades es presenten a la taula següent:

Subjecte	STAI	Rend. acadèmic
1	23	Alt
2	22	Mitjà
3	34	Mitjà
4	45	Baix
5	21	Mitjà
6	56	Mitjà
7	46	Baix
8	43	Baix
9	32	Baix
10	22	Alt

Feu la descripció de les dues variables a partir de l'obtenció d'indicadors i la representació gràfica.

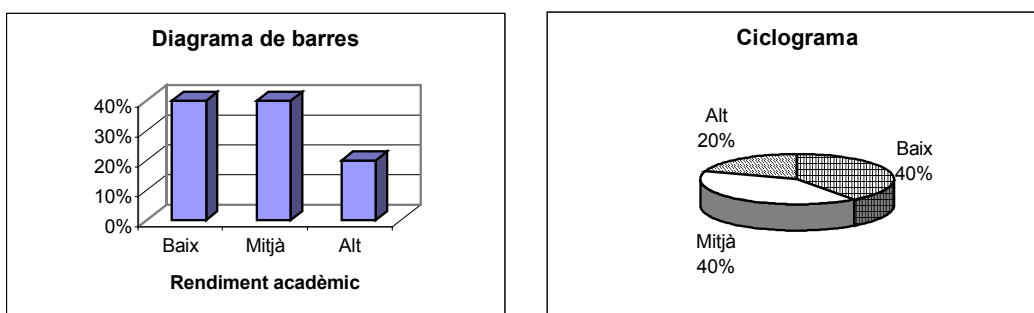
Solució:

- Descripció de la variable rendiment acadèmic:

Taula de freqüències:

Rend. acadèmic	f_i	p_i	P_i	F_a	p_a	P_a
Baix	4	0.4	40	4	0.4	40
Mitjà	4	0.4	40	8	0.8	80
Alt	2	0.2	20	10	1	100
Total	10	1	100			

Representacions gràfiques:



Tal com s'observa a la taula de freqüències, o bé en el diagrama de barres o en el ciclograma, només un 20% dels subjectes de la mostra presenta un rendiment acadèmic alt; el 80% restant es distribueix uniformement entre les dues categories restants (baix i mitjà), fet que implica un percentatge molt elevat d'alumnes (40%) amb un rendiment baix. De totes maneres cal remarcar que s'està treballant amb una mostra molt petita, i que un subjecte implica un 10%.

- Descripció de la variable “nivell d'ansietat”:

Estadístics descriptius:

Descripció del nivell d'ansietat (STAI)		
Tendència central	Dispersió	Forma
Mo = 22	rang = 35	T1 = 0.2931
Md = 33	S ² = 141.039	T2 = -1.5735
$\bar{x}$ = 34.4	S = 11.876	

Histograma:

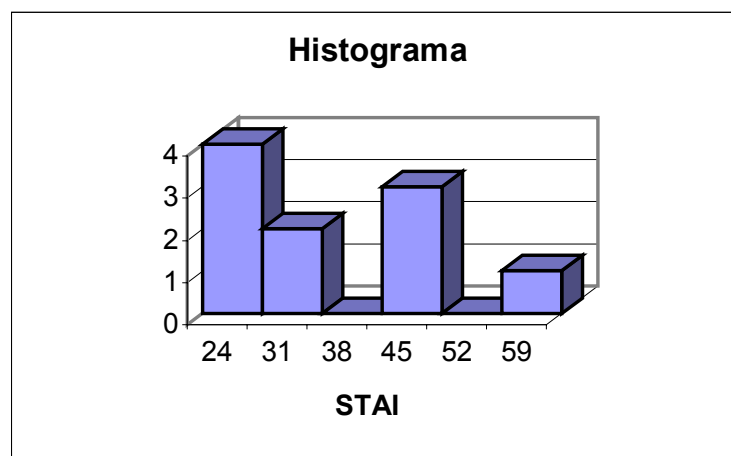
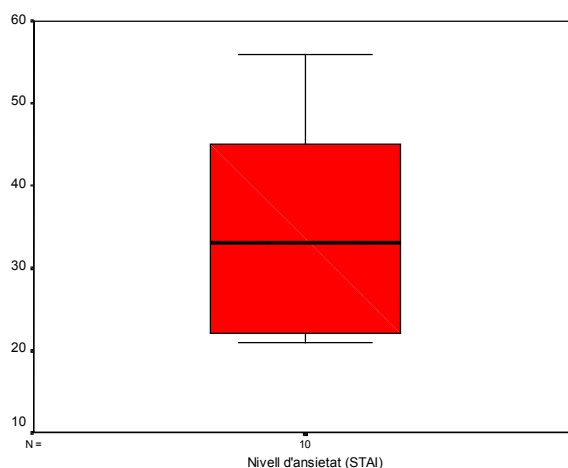


Diagrama de tija i fulles:

Nivell d'ansietat (STAI) *Stem-and-Leaf Plot*

Frequency	Stem &	Leaf
4,00	2 .	1223
2,00	3 .	24
3,00	4 .	356
1,00	5 .	6
Stem width: 10,00		
Each leaf: 1 case(s)		

Diagrama de caixa:



A partir dels indicadors de tendència central s'observa que la mitjana del nivell d'ansietat dels subjectes de la mostra és de 34.4, valor una mica diferent de la mediana (33) i molt diferent de la moda (22), fet que pot fer sospitar de l'existència de valors que s'allunyen per la cua de dalt i en conseqüència de la asimetria de la distribució, aspecte que queda confirmat per l'histograma i el diagrama de caixa i en menor mesura per l'indicador d'asimetria (0.2931). De totes maneres, cal destacar el fet que a partir del diagrama de caixa s'observa que aquesta tendència a la asimetria positiva es dona en les cues, ja que la distribució del 50% central és força simètrica. D'altra banda cal remarcar el fet de l'existència d'una variabilitat moderada entre les dades de la distribució estudiada perquè el valor de la desviació típica és d'11.88. De totes maneres un cop d'ull a l'histograma i al diagrama de caixa mostra que aquesta variabilitat és deguda a l'existència de valors que s'allunyen molt de la majoria dels valors de la distribució per la cua de dalt.

2. En un estudi sobre la relació entre el consum de tabac i el consum d'alcohol entre els adolescents de la ciutat de Girona es van obtenir les dades següents:

Subjecte	Nombre cigarretes	Consum alcohol
1	23	Alt
2	24	Alt
3	25	Baix
4	12	Mitjà
5	11	Baix
6	6	Baix
7	5	Alt
8	6	Baix
9	31	Alt
10	32	Alt
11	18	Mitjà
12	15	Mitjà

Feu la descripció de les dues variables a partir de l'obtenció d'indicadors i la representació gràfica.

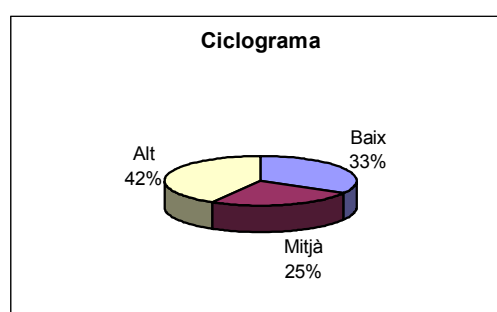
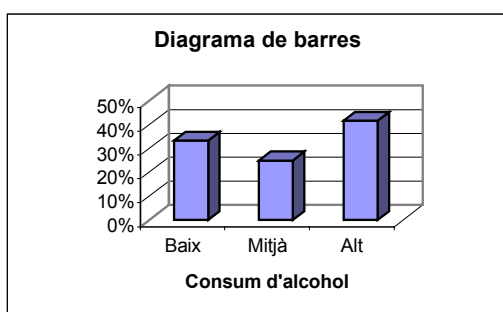
Solució:

- Descripció de la variable consum d'alcohol:

Taula de freqüències:

Consum alcohol	f_i	P_i	P_i	F_a	p_a	P_a
Baix	4	0.333	33.3	4	0.333	33.3
Mitjà	3	0.250	25.0	7	0.583	58.3
Alt	5	0.416	41.6	12	1	100
Total	12	1	100			

Representacions gràfiques:



Tal com s'observa a la taula de freqüències o bé a les representacions gràfiques, el diagrama de barres o el ciclograma, un 41.6% dels subjectes de la mostra presenta un consum d'alcohol elevat, sent només un 33.3% dels subjectes de la mostra els que presenten un consum baix, però no nul. Novament cal remarcar el fet que s'està treballant amb una mostra molt petita: només dotze subjectes.

- Descripció de la variable nombre de cigarretes fumades al dia:

Estadístics descriptius:

Descripció del nombre de cigarretes fumades al dia		
Tendència central	Dispersió	Forma
Mo = 6	rang = 27	T1 = 0.1334
Md = 16.5	S ² = 85.05	T2 = -1.5849
$\bar{x}$ = 17.3	S = 9.22	

Histograma:

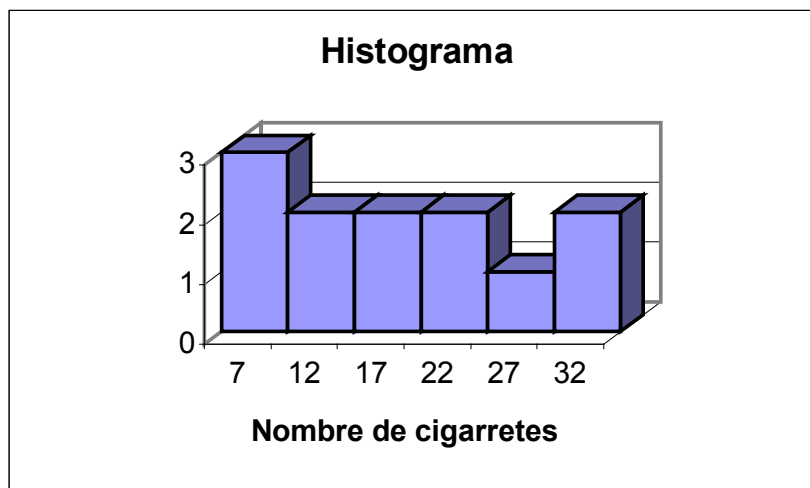


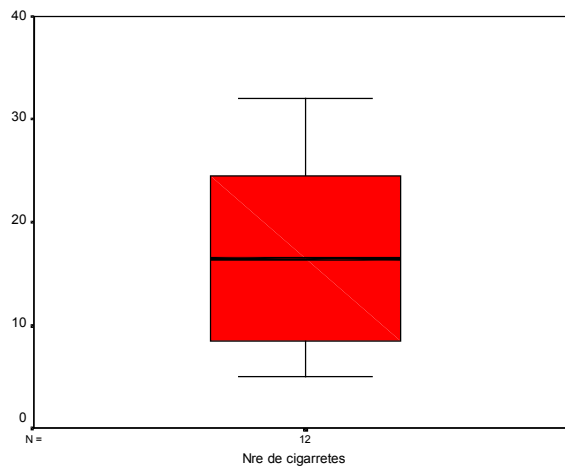
Diagrama de tija i fulles:

Nombre de cigarretes fumades al dia *Stem-and-Leaf Plot*

Frequency	Stem &	Leaf
3,00	0 .	566
4,00	1 .	1258
3,00	2 .	345
2,00	3 .	12

Stem width: 10
Each leaf: 1 case(s)

Diagrama de caixa:



La mitjana del nombre de cigarretes fumades al dia pels subjectes de la mostra és de 17.3, valor molt semblant a la mediana 16.5, encara que és força diferent de la moda (6 cigarretes diàries). La diferència entre aquests tres indicadors ens fa sospitar d'una possible asimetria positiva de la distribució, cosa que no queda confirmada per l'indicador de simetria (0.1334), però sí per l'histograma, i en menor mesura, pel diagrama de tija i fulles i el diagrama de caixa. La freqüència de fumadors és menor a mesura que augmenta el nombre de cigarretes fumades al dia. D'altra banda cal destacar l'existència d'una variabilitat moderada en la distribució ja que el valor de la desviació típica és de 9.22 cigarretes. De fet aquesta variabilitat és deguda a l'existència de valors que s'allunyen per la cua de dalt de la distribució, aspecte que queda mínimament reflectit en el rang, que és de 27 cigarretes.

TEMA 4. ÀLGEBRA MATRICIAL

“No hi ha branca de la matemàtica, per abstracta que sigui, que no es pugui aplicar algun dia als fenòmens del món real”.
Nikolay Lobachevsky (1792 – 1856)

4.1. CONCEPTE DE MATRIU

Una matriu és una taula ordenada d'elements a_{ij} disposats en fileres i columnes. L'ordre de la matriu es designa per $n \times m$, sent n el nombre de fileres de la matriu i m el nombre de columnes de la matriu.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

a_{ij} - element que ocupa la filera i columna j .

4.2. PRINCIPALS TIPUS DE MATRIUS

- *Vector columna.* És aquella matriu en què $m = 1$, i se simbolitza per $\vec{a}$
- *Vector filera.* És aquella matriu en què $n = 1$, i se simbolitza per $\vec{a}$
- *Matriu nul·la.* És una matriu en què tots els elements són zero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- *Matriu transposada d'A (A').* Consisteix en el canvi de les fileres per les columnes, de tal manera que si la matriu A és d'ordre $n \times m$ la seva transposada (A') és una matriu d'ordre $m \times n$. Amb un exemple es veurà clarament com es troba la transposada d'una matriu.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad \qquad 2 \times 3$

Algunes característiques de les matrius transposades s'enumeren a continuació:

- La transposada de la transposada d'una matriu és igual a la matriu original: $(A')' = A$
 - La transposada de la suma de dues matrius és igual a la suma de les transposades de les matrius originals: $(A + B)' = A' + B'$
 - La transposada d'un producte de matrius és igual al producte de les matrius transposades en ordre invers: $(A \cdot B \cdot C)' = C' \cdot B' \cdot A'$
- *Matriu quadrada* ($A_n \times n$). Una matriu és quadrada quan el nombre de fileres és igual al nombre de columnes, és a dir, $n = m$.

Hi ha diferents tipus de matrius quadrades, entre les quals cal conèixer:

- *Matriu simètrica*. Aquesta matriu es caracteritza perquè $a_{ij} = a_{ji}$ per a tot a_{ij} en què $i \neq j$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad a_{12} = a_{21} \quad (3 = 3)$$

Quan la matriu és simètrica sempre es compleix que $A = A'$

- *Matriu diagonal* (D). Es diu que una matriu quadrada és diagonal quan els elements a_{ij} són iguals a zero per a qualsevol $i \neq j$.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Matriu escalar*. És una matriu diagonal en què els elements de la diagonal són tots iguals, és a dir, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$. Aquests elements queden simbolitzats per la lletra grega lambda (λ).

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

- *Matriu identitat o unitat* (I). És una matriu diagonal en què els elements de la diagonal principal són tots uns.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

La matriu identitat és l'element neutre de la multiplicació de matrius, en conseqüència:

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

- *Matriu triangular.* La matriu triangular pot ser inferior i superior.
La matriu triangular superior té zeros en el triangle inferior, és a dir:
per a $i > j$ $a_{ij} = 0$
La matriu triangular inferior té zeros en el triangle superior, és a dir:
per a $i < j$ $a_{ij} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{superior}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{inferior}$$

4.3. OPERACIONS AMB MATRIUS

4.3.1. Suma de matrius

Per poder sumar dues matrius, aquestes han de ser d'igual ordre. Se sumen els elements que ocupen la mateixa posició (ij) en les dues matrius ($a_{ij} + b_{ij}$) i s'obté una matriu d'ordre igual al de les dues que se sumen.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+5 \\ 3+1 & 5+6 \\ 2+3 & 2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 11 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

4.3.2. Multiplicació de matrius per un escalar

La multiplicació d'una matriu per un escalar (k) consisteix a multiplicar cadascun dels elements de la matriu per l'escalar ($k \cdot a_{ij}$).

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1m} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & \dots & k \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

4.3.3. Multiplicació de matrius

La multiplicació de matrius només és possible quan el nombre de columnes de la primera matriu és igual al nombre de fileres de la segona matriu. És a dir:

$$A_{n \times m} \cdot B_{m \times z} = C_{n \times z}$$

Per multiplicar matrius es troba el sumatori de la multiplicació dels elements de les fileres de la primera matriu pels corresponents elements de les columnes de la segona matriu, és a dir:

$$c_{ij} = \sum a_{im} \cdot b_{mj}$$

Si es vol multiplicar una matriu d'ordre 3 x 2 per una matriu d'ordre 2 x 3 les operacions a fer són:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 3 \times 2 & 2 \times 3 & 3 \times 3 \end{matrix}$

A continuació es mostra un exemple de multiplicació d'una matriu d'ordre 2 x 3 i una matriu d'ordre 3 x 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 28 \\ 23 & 17 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 2 \times 3 & 3 \times 2 & 2 \times 2 \end{matrix}$

El producte de matrius és associatiu: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ però no és commutatiu: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Algunes regles bàsiques a tenir en compte en el producte de matrius s'enumeren a continuació:

- La pre o post multiplicació d'una matriu per la matriu nul·la (tot zero) és igual a la matriu nul·la; de fet actua com el zero en un producte entre escalars.

- La pre o post multiplicació d'una matriu per la matriu identitat, I , és igual a la matriu inicial. La matriu identitat actua com l'element neutre de la multiplicació de matrius.
- Pre o post multiplicar una matriu per la seva transposada es pot fer sempre; com a resultat dóna una matriu simètrica.

4.3.4. Traça d'una matriu

La traça d'una matriu és igual a la suma dels elements de la diagonal principal, que s'expressa: $\text{tr } A = \sum a_{ij} \forall i = j$. En conseqüència, només es pot obtenir quan la matriu és quadrada. El resultat de la traça d'una matriu és un escalar.

$$\text{Traça de la matriu } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

La traça de la matriu següent és:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 6 & 9 \\ 9 & 8 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} = 7 + 9 + 3 + 3 = 22$$

4.4. DETERMINANT D'UNA MATRIU

Donada una matriu (X) quadrada d'ordre n , s'anomena *determinant* d'aquesta matriu ($\det X$ o $|X|$), a la suma dels $n!$ productes de n factors cada un, de manera que si s'escriuen els elements de cada producte amb els seus subíndexs, no es repeteixi cap dels subíndexs primers ni segons en un mateix producte; per fer-ho s'ha de prendre un element de cada fila i un de cada columna, sense repetir les files ni les columnes.

- $n = 1$

$$\det [a_{11}] = a_{11}$$

- $n = 2$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (4 \cdot 4) - (7 \cdot 3) = 16 - 21 = -5$$

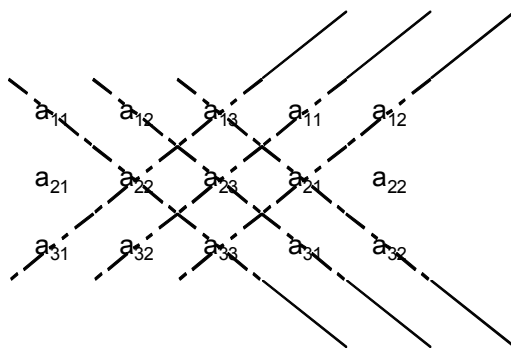
- $n = 3$ S'acostuma a aplicar la regla de Sarrus (Pierre Sarrus, 1798-1861) per al seu càlcul. A l'hora d'aplicar aquesta regla s'han de tenir $n!$ sumands, que en el cas de $n = 3$ són 6.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = [(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13})] - [(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) + (a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11})]$$

Un procediment memorístic per a l'aplicació de la regla de Sarrus es mostra a continuació:

Es repeteixen la primera i la segona columnes a la dreta de la matriu original, es calcula el producte dels elements de les sis diagonals de tres elements que es formen, se sumen els resultats de les diagonals descendents i es resten els resultats de les diagonals ascendents. A continuació es mostra gràficament aquest procediment.



Donada la matriu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

El seu determinant és:

$$\begin{aligned} |A| &= [(4 \cdot 3 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 1) + (2 \cdot 2 \cdot 5)] - [(5 \cdot 3 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 1) + (2 \cdot 2 \cdot 4)] \\ &= [12 + 2 + 20] - [15 + 2 + 16] = 34 - 33 = 1 \end{aligned}$$

Propietats dels determinants

1. El valor del determinant d'una matriu no varia si es fa sobre la seva transposada.
2. Canviant entre si dues files o columnes de la matriu, els determinants obtinguts en ambdues tenen el mateix valor absolut, però signe oposat.
3. El determinant d'una matriu amb dues files o columnes iguals és zero.
4. Multiplicant tots els elements d'una fila o columna per un mateix escalar, el valor del determinant es multiplica per aquest mateix número.

5. El determinant d'una matriu que té dues files o columnes que són proporcionals entre si és nul.
6. Si es descompon cada element d'una fila (o columna), en dos o més sumands qualssevol, el determinant inicial és igual a la suma dels determinants de les matrius obtingudes:

$$|A| = |B| + |C|$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \det B + \det C$$

$$-15 = (-7) + (-8)$$

7. Si una fila o columna d'una matriu és combinació lineal d'una altra, el determinant és nul.
8. Si se suma o es resta a una fila o columna els elements d'una altra fila (o columna), multiplicats per un mateix número, el determinant no varia.
9. Si tots els elements d'una fila (o columna) són nuls, el determinant és zero.

4.4.1. Menors complementaris i adjunts

Si en una matriu quadrada d'ordre n , se suprimeix la fila i la columna a què pertany un determinat element a_{ij} , es poden agrupar novament, amb la mateixa col·locació dels elements restants, obtenint una matriu quadrada d'ordre $n-1$. S'anomena menor complementari de l'element a_{ij} , al determinant de la nova matriu obtinguda d'aquesta manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Per exemple si s'elimina l'element a_{22} de la matriu anterior (segona fila – segona columna), la matriu resultant és la següent:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

S'anomena adjunt d'un element a_{ij} , al valor del seu menor complementari afectat pel signe. El signe dependrà de la posició de l'element en qüestió en la matriu. La determinació del signe es mostra a continuació:

$$\text{signe de l'adjunt de } a_{ij} = (-1)^{i+j},$$

per tant:

si $i + j = \text{nombre parell} \Rightarrow +$
 si $i + j = \text{nombre imparell} \Rightarrow -$

Per al càlcul d'un determinant d'una matriu d'ordre superior a tres, és interessant conèixer que el valor del determinant es pot calcular mitjançant el desenvolupament en línia dels seus adjunts.

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

per a adjunts de la segona columna:

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

per la regla de Sarrus:

$$|A| = (1 \cdot 3 \cdot 6) + (2 \cdot 4 \cdot 3) + (2 \cdot 4 \cdot 3) - (3 \cdot 3 \cdot 3) - (4 \cdot 4 \cdot 1) - (2 \cdot 2 \cdot 6) = -1$$

Aplicacions de les seves propietats per al càlcul de determinants:

Matriu original A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

En un primer pas es resta l'última fila a la primera, en segon lloc a la tercera columna se li suma la primera multiplicada per quatre i a la quarta columna se li resta la primera multiplicada per dos. D'aquesta manera s'obté una nova matriu A_1 , el determinant de la qual serà el mateix que el de la matriu A .

$$\xrightarrow{1r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 18 & -5 \\ 2 & 4 & 14 & -1 \end{bmatrix} = A_1$$

Es pot calcular el $\det A = \det A_1$ amb l'ajut del desenvolupament de la primera fila i els seus adjunts:

$$|A_1| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 8 & 18 & -5 \\ 4 & 14 & -1 \end{vmatrix} = 148 = |A|$$

4.5. MATRIU INVERSA

Es diu que una matriu és inversa quan compleix la condició següent: "El producte de la matriu per la seva inversa és igual al producte de la inversa per la matriu i igual a la matriu identitat", la qual cosa s'expressa com:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

La inversa d'una matriu només es pot trobar quan aquesta és simètrica.

La matriu inversa de la matriu següent:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 2/9 & -1/9 \end{bmatrix}$$

donat que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 2/9 & -1/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 2/9 & -1/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En les operacions amb matrius no existeix la divisió, però multiplicar una matriu per una matriu inversa és el mateix que si es fes una divisió entre les dues matrius.

Cal remarcar que no totes les matrius quadrades tenen inverses. Les matrius en què algunes de les files o columnes són combinació lineal d'altres files o columnes de la matriu no tenen matriu inversa; en aquest cas la matriu rep el nom de *matriu singular*.

Característiques de les matrius inverses:

- La inversa de la transposada d'una matriu és igual a la transposada de la inversa de la matriu: $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
- La matriu inversa d'una matriu inversa és igual a la matriu original: $(A^{-1})^{-1} = A$
- La matriu inversa d'una matriu simètrica és també simètrica.
- La inversa de la matriu identitat, I , és la matriu identitat.
- Una matriu diagonal es pot invertir substituint cada element de la diagonal pel seu recíproc.

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- La inversa d'un producte de matrius és igual al producte de les inverses de les matrius en ordre invers: $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

Quan la inversa d'una matriu és igual a la seva transposada ($A^{-1} = A'$) es diu que la matriu és *ortogonal*. Com que una matriu inversa compleix que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Llavors, per a una matriu ortogonal:

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I$$

4.5.1. Càlcul de la inversa d'una matriu

Condicions per al càlcul de la matriu inversa (A^{-1}):

1. Ha de ser una matriu quadrada.
2. El determinant ha de ser:
 - a) diferent de zero $|A| \neq 0$
 - b) no singular $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Exemple de càlcul:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4 - 6 = -2$$

1. Es forma la matriu d'adjunts dels elements de la matriu A :

$$a_{11} = 4; \quad a_{12} = -3; \quad a_{21} = -2; \quad a_{22} = 1$$

Matriu d'adjunts:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Es troba la transposada de la matriu d'adjunts:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriu inversa (A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{\text{Transposada matriu d'adjunts}}{|A|} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

4.6. CÀLCULS ESTADÍSTICS UTILITZANT L'ÀLGEBRA MATRICIAL

Un dels càlculs útils en l'estadística descriptiva que es pot fer a partir de l'àlgebra matricial consisteix en l'obtenció d'una matriu de sumatoris.

Els passos a seguir per obtenir aquesta matriu són:

1. Afegir una primera columna d'uns a la matriu de dades:

$$X = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & & X_m \\ \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. Trobar la matriu transposada de la matriu anterior.
3. Càlcul de la matriu de sumatoris (C): $X^T \cdot X$

$$C = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 & \dots & \sum X_m \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 & \dots & \sum X_1 X_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum X_m & \sum X_m X_1 & \sum X_m X_2 & \dots & \sum X_m^2 \end{bmatrix}$$

Tal com s'observa, es tracta d'una matriu simètrica. Aquesta matriu proporciona càlculs intermedis per a l'obtenció de les mitjanes de les variables (la primera filera o primera columna recull el numerador de les mitjanes de cada variable), així com alguns sumatoris per a l'obtenció de les variàncies de les variables o de les covariàncies entre les variables amb les fórmules que s'han vist en el tema 3.

A partir de la matriu de dades següent s'exemplifica l'explicat:

$$X = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

on les files són les puntuacions dels tres subjectes de la mostra en cadascuna de les tres variables recollides (columnes).

Passos:

1. Afegir una primera columna d'uns:

$$X = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. Trobar la transposada d'aquesta matriu:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Trobar la matriu de sumatoris (C):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 14 & 17 \\ 12 & 56 & 58 & 64 \\ 14 & 58 & 66 & 80 \\ 17 & 64 & 80 & 115 \end{bmatrix}$$

A partir d'aquesta matriu es poden trobar les mitjanes de les tres variables, les variàncies i les covariàncies, que a continuació es mostren:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{12}{3} = 4 & \bar{x}_2 &= \frac{14}{3} = 4.\widehat{6} & \bar{x}_3 &= \frac{17}{3} = 5.\widehat{6} \\ s_1^2 &= \frac{56 - 12^2/3}{2} = 4 & s_1^2 &= \frac{66 - 14^2/3}{2} = 0.\widehat{3} & s_1^2 &= \frac{115 - 17^2/3}{2} = 9.\widehat{3} \\ Cov_{12} = S_{12} &= \frac{58 - \frac{12 \cdot 14}{3}}{2} = 1 & Cov_{13} = S_{13} &= \frac{64 - \frac{12 \cdot 17}{3}}{2} = -2 \\ Cov_{23} = S_{23} &= \frac{80 - \frac{14 \cdot 17}{3}}{2} = 0.\widehat{3}\end{aligned}$$

Els passos per a l'obtenció de la matriu de correlacions a partir del càlcul matricial es mostren a continuació. Per exemplificar-ho es treballa amb la matriu de dades anterior.

1. Obtenció de la matriu de mitjanes:

$$\begin{aligned}M &= 1' \cdot X & M &= [1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} = [12 \quad 14 \quad 17] \\ \vec{m} &= 1/n \cdot 1' \cdot X & \vec{m} &= \frac{1}{3} \cdot [12 \quad 14 \quad 17] = [4 \quad 4.\widehat{6} \quad 5.\widehat{6}]\end{aligned}$$

2. Obtenció de la matriu de variàncies-covariàncies:

a) Matriu de dades centrades:

$$X_c = X - 1 \cdot \vec{m} \quad X_c = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4.\widehat{6} & 5.\widehat{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -0.\widehat{6} & -0.\widehat{6} \\ 0 & 0.\widehat{3} & 3.\widehat{3} \\ 2 & 0.\widehat{3} & -2.\widehat{6} \end{bmatrix}$$

b) Matriu de sumes de quadrats (SQ) i sumes de productes creuats (SP):

$$Q_c = X_c' \cdot X_c \quad Q_c = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -0.\widehat{6} & 0.\widehat{3} & 0.\widehat{3} \\ -0.\widehat{6} & 0.\widehat{3} & -2.\widehat{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -0.\widehat{6} & -0.\widehat{6} \\ 0 & 0.\widehat{3} & 3.\widehat{3} \\ 2 & 0.\widehat{3} & -2.\widehat{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 0.67 & 0.67 \\ -4 & 0.67 & 18.67 \end{bmatrix}$$

c) Matriu de variàncies-covariàncies:

$$S = \frac{1}{n-1} \cdot Q_c \quad S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 0.67 & 0.67 \\ -4 & 0.67 & 18.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0.33 & 0.33 \\ -2 & 0.33 & 9.33 \end{bmatrix}$$

3. Obtenció de la matriu de desviacions típiques:

$$D^{1/2} = \sqrt{S} \quad S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0.33 & 0.33 \\ -2 & 0.33 & 9.33 \end{bmatrix} \rightarrow D^{1/2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.57 & 0 \\ 0 & 0 & 3.05 \end{bmatrix}$$

4. Obtenció de la matriu de correlacions:

$$R = \frac{1}{n-1} \cdot X_e' \cdot X_e \quad o \quad R = D^{-1/2} \cdot S \cdot D^{-1/2}$$

$$on \quad D^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/S_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/S_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0.57 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0.33 & 0.33 \\ -2 & 0.33 & 9.33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0.57 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3.05 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1/2 & -1 \\ 1/0.57 & 0.33/0.57 & 0.33/0.57 \\ -2/3.05 & 0.33/3.05 & 9.33/3.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0.57 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3.05 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.88 & -0.33 \\ 0.88 & 1 & 0.19 \\ -0.33 & 0.19 & 1 \end{bmatrix}$$

4.7. UTILITZACIÓ DE MÀTRIS EN LA RESOLUCIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Un sistema de m equacions lineals amb n incògnites té la següent representació:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Matricialment aquest sistema d'equacions es pot representar com:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad A \cdot X = B$$

On: A = matriu de coeficients del sistema

X = vector d'incògnites

B = vector de termes independents

Resoldre un sistema d'equacions lineals és buscar en el conjunt de nombres reals ($\mathbb{R}$) aquells valors que s'han d'atribuir a les incògnites perquè se satisfacin simultàniament les equacions.

Cada solució estarà composta per n valors, que corresponen a les n incògnites del sistema.

Un sistema és *compatible* quan admet almenys una solució.

El sistema és *determinat* quan té una solució única.

És *indeterminat* quan pot tenir infinites solucions.

Un sistema és *incompatible* quan no admet cap solució.

- Regla de Cramer

Quan el sistema té el mateix nombre d'equacions que d'incògnites, el sistema és compatible i determinat, té una única solució.

La solució expressada matricialment seria:

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \text{----->} \quad (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \text{----->} \quad X = A^{-1} \cdot B$$

En aquest cas es pot utilitzar una forma més senzilla de càlcul, l'anomenada regla de Cramer (Gabriel Cramer, 1704-1652). Per poder aplicar-la cal seguir els passos següents:

1. El determinant de A ha de ser no nul: $|A| \neq 0$.
2. Per cada incògnita x_i es construeix una matriu a partir de la matriu de coeficients (A), però substituint la columna corresponent a la incògnita a trobar pel vector columna de termes independents (B):

$$\text{per a } x_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\text{per a } x_n \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

3. Es calcula cada incògnita x_1 fent el quocient del determinant de cada matriu corresponent i el determinant de la matriu de coeficients (A):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|};$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_m \end{vmatrix}}{|A|}$$

Exemple:

$$4x_1 + 3x_2 = 25$$

$$2x_1 - x_2 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

per la regla de Cramer:

1. Càlcul del determinant de la matriu A :

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4) - (6) = -10 \neq 0$$

2. Càlcul per a cada incògnita:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-40}{-10} = 4$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 25 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-30}{-10} = 3$$

4.8. ACTIVITATS PRÀCTIQUES

1. Trobeu la transposada de les matrius següents:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Solució:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. De les matrius següents identifiqueu un vector filera, una matriu diagonal i una matriu triangular inferior.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Solució:

$A \rightarrow$ vector filera;

$C \rightarrow$ matriu diagonal;

$D \rightarrow$ matriu triangular inferior

3. Donades les matrius següents:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Digueu quines de les operacions següents es poden realitzar i feu-les:

- a) $A + B$ c) $D + E$ e) $D - C$ g) $E \cdot C$
 b) $C + D$ d) $A \cdot B$ f) $B \cdot C$ h) $2 \cdot E$

Solució:

a) $A + B$ no es pot fer. Per poder sumar matrius han de ser del mateix ordre.

b) $C + D$ sí que es pot fer perquè les dues matrius són del mateix ordre:

$$C + D = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 6 \\ 7 & 14 & 3 \\ 9 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

c) $D + E$ no es pot fer. Per poder sumar matrius han de ser del mateix ordre.

d) $A \cdot B$ sí que es pot fer perquè el nombre de fileres de la matriu A és igual al nombre de columnes de la matriu B ; el producte d'aquestes dues matrius és igual a un escalar:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \end{bmatrix}$$

e) $D - C$ sí que es pot fer ja que les dues matrius són del mateix ordre (3 x 3).

$$D - C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

f) $B \cdot C$ no es pot fer ja que no coincideixen el nombre de columnes de la matriu B amb el de files de la matriu C .

g) $E \cdot C$ sí que es pot fer ja que el nombre de columnes de la matriu E (3) és igual al nombre de fileres de la matriu C (3).

$$E \cdot C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 38 & 57 \\ 63 & 55 & 83 \end{bmatrix}$$

h) $2 \cdot E$ es pot fer ja que el producte d'un escalar per una matriu sempre és possible.

$$2 \cdot E = 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 4 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

4. Donades les matrius següents:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 25 \\ 12 & 11 \\ 3 & 19 \end{bmatrix}$$

Determineu:

- En quines es pot trobar la traça de la matriu. En les que es pugui, feu-ho.
- En quines es pot trobar el determinant de la matriu. En les que es pugui, feu-ho.

Solució:

- La traça d'una matriu només es pot trobar quan la matriu és quadrada, en conseqüència es pot trobar la traça de les matrius A , C i D .

$$\text{Traça } A = 2 + 3 = 5$$

$$\text{Traça } C = 5 + 2 + 5 = 12$$

$$\text{Traça } D = 4 + 2 + 3 = 9$$

- El determinant d'una matriu novament només es pot trobar quan la matriu és quadrada, per tant es pot calcular per a les matrius A , C i D .

$$|A| = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = 6$$

$$|C| = (5 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 6 + 7 \cdot 1 \cdot 3) - (3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \cdot 5) = 83 - 81 = 2$$

$$|D| = (4 \cdot 2 \cdot 3 + 9 \cdot 5 \cdot 3 + 7 \cdot 7 \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 7 \cdot 4 + 9 \cdot 7 \cdot 3) = 208 - 335 = -127$$

5. Resoleu per la regla de Cramer el sistema d'equacions següent:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 = 8$$

$$3x_1 - 2x_3 = 1$$

Solució:

- Plantejament del sistema d'equacions a partir de matrius:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Càlcul del determinant de la matriu A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = [(-4 + 0 + 0) - (-6 + 0 - 12)] = 14$$

c) Càlcul del valor de les tres incògnites:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{[(-8 + 0 + 0) - (-2 - 48 + 0)]}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{[(-16 - 2 + 0) - (-24 - 0 - 8)]}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{[(2 + 0 + 72) - (12 + 6 + 0)]}{14} = \frac{56}{14} = 4$$

En aquest cas es tracta d'un sistema d'equacions lineal determinat.

6. La matriu A és una matriu de dades en què hi ha tres variables entrades per columnes. Obteniu els indicadors descriptius explicats (mitjana, variància i desviació tipus) a partir del càlcul matricial per a les tres variables.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 5 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solució:

Vector sumatori

$$M = \mathbf{1}' \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 5 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 24 & 20 \end{bmatrix}$$

Vector mitjanes

$$\vec{m} = \frac{1}{n} \cdot M = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 24 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriu de dades centrades

$$X_c = A - 1 \cdot \vec{m} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 5 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [4 \quad 6 \quad 5] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriu de sumes de quadrats i productes creuats

$$Q_c = X_c' \cdot X_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 5 & 26 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriu de variàncies i covariàncies

$$S = \frac{1}{(n-1)} \cdot Q_c = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 5 & 26 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.\widehat{6} & 1.\widehat{6} & -0.\widehat{6} \\ 1.\widehat{6} & 8.\widehat{6} & -0.\widehat{6} \\ -0.\widehat{6} & -0.\widehat{6} & 2.\widehat{6} \end{bmatrix}$$

Matriu de desviacions típiques

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.\widehat{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8.\widehat{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2.\widehat{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.816 & 0 & 0 \\ 0 & 2.944 & 0 \\ 0 & 0 & 1.632 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

AYRES,F. *Matrices*. México: McGraw-Hill, 1992.

FREIXA, M.; SALAFRANCA, L.; GUÀRDIA, J.; FERRER, R.; i TURBANY, J. *Análisis exploratorio de datos: nuevas técnicas estadísticas*. Barcelona: PPU, 1992.

JANÉZ,L. *Fundamentos de Psicología Matemática*. Madrid: Pirámide, 1989.

LIPSCHUTZ, S.; i LIPSON, M. *Probabilidad*. México: McGraw-Hill, 2001.

SARRIÀ, A. ; GUÀRDIA, J.; i FREIXA, M. *Introducción a la estadística en psicología*. Barcelona: PPU, 1999

SPIEGEL,M. *Probabilidad y Estadística*. México: McGraw-Hill, 2001

TORRADO, M. (coord.) *Estadística Descriptiva Básica*. Barcelona: Edicions UB Col·lecció: Team, 8 (CD-Rom), 2001.

TURNER,J.C. *Matemática moderna aplicada. Probabilidades, estadística e investigación operativa*. Madrid: Alianza Universidad, 1986.

VISAUTA, B.; i BATALLÉ, P. *Métodos estadísticos aplicados. Tomo I: Estadística Descriptiva*. Barcelona: PPU, 1986.

ANNEX: TAULES

Taula 1: Distribució normal

Taula 2: Coeficients combinatoris

Taula 3: Funció de probabilitat de la binomial

Taula 4: Funció de distribució de la binomial

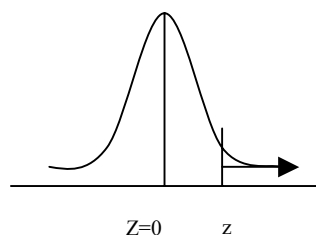
Taula 5: Valors d' $e^{-\lambda}$

Taula 6: Funció de probabilitat de la distribució de Poisson

Taula 7: Funció de distribució de la llei de Poisson

<i>n</i>	<i>k</i>	<i>probabilitat d'èxit (I)</i>	
		<i>0,1</i>	<i>0,2</i>
<i>2</i>	<i>0</i>	0,8100	0,6400
<i>2</i>	<i>1</i>	0,1800	0,3200
<i>2</i>	<i>2</i>	0,0100	0,0400

TAULA 1: DISTRIBUCIÓ NORMAL



Àrees sota la corba normal estàndarditzada de z fins a la cua més propera

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010

TAULA 2: COEFICIENTS COMBINATORIS

Coefficients binomials $\binom{n}{k}$											
<i>n k</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

Cal tenir en compte les següents identitats:

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{k=n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n;$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow \text{Exemple: } \binom{19}{13} = \binom{19}{6} = 27132$$

TAULA 3: FUNCIO DE PROBABILITAT DE LA BINOMIAL

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>Probabilitat d'èxit (II)</i>				
		<i>0,1</i>	<i>0,2</i>	<i>0,3</i>	<i>0,4</i>	<i>0,5</i>
2	0	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
2	1	0,1800	0,3200	0,4200	0,4800	0,5000
2	2	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500
3	0	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
3	1	0,2430	0,3840	0,4410	0,4320	0,3750
3	2	0,0270	0,0960	0,1890	0,2880	0,3750
3	3	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250
4	0	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
4	1	0,2916	0,4096	0,4116	0,3456	0,2500
4	2	0,0486	0,1536	0,2646	0,3456	0,3750
4	3	0,0036	0,0256	0,0756	0,1536	0,2500
4	4	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625
5	0	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
5	1	0,3280	0,4096	0,3602	0,2592	0,1562
5	2	0,0729	0,2048	0,3087	0,3456	0,3125
5	3	0,0081	0,0512	0,1323	0,2304	0,3125
5	4	0,0005	0,0064	0,0284	0,0768	0,1562
5	5	0,0000	0,0003	0,0024	0,0102	0,0312
6	0	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156
6	1	0,3543	0,3932	0,3025	0,1866	0,0938
6	2	0,0984	0,2458	0,3241	0,3110	0,2344
6	3	0,0146	0,0819	0,1852	0,2765	0,3125
6	4	0,0012	0,0154	0,0595	0,1382	0,2344
6	5	0,0001	0,0015	0,0102	0,0369	0,0938
6	6	0,0000	0,0001	0,0007	0,0041	0,0156
7	0	0,4783	0,2097	0,0824	0,0280	0,0078
7	1	0,3720	0,3670	0,2471	0,1306	0,0547
7	2	0,1240	0,2753	0,3176	0,2613	0,1641
7	3	0,0230	0,1147	0,2269	0,2903	0,2734
7	4	0,0026	0,0287	0,0972	0,1935	0,2734
7	5	0,0002	0,0043	0,0250	0,0774	0,1641
7	6	0,0000	0,0004	0,0036	0,0172	0,0547
7	7	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0078

FUNCIÓ DE PROBABILITAT DE LA BINOMIAL (*CONTINUACIÓ*)

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>Probabilitat d'èxit (I)</i>				
		<i>0,1</i>	<i>0,2</i>	<i>0,3</i>	<i>0,4</i>	<i>0,5</i>
8	0	0,4305	0,1678	0,0576	0,0168	0,0039
8	1	0,3826	0,3355	0,1977	0,0896	0,0312
8	2	0,1488	0,2936	0,2965	0,2090	0,1094
8	3	0,0331	0,1468	0,2541	0,2787	0,2188
8	4	0,0046	0,0459	0,1361	0,2322	0,2734
8	5	0,0004	0,0092	0,0467	0,1239	0,2188
8	6	0,0000	0,0011	0,0100	0,0413	0,1094
8	7	0,0000	0,0001	0,0012	0,0079	0,0312
8	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0039
9	0	0,3874	0,1342	0,0404	0,0101	0,0020
9	1	0,3874	0,3020	0,1556	0,0605	0,0176
9	2	0,1722	0,3020	0,2668	0,1612	0,0703
9	3	0,0446	0,1762	0,2668	0,2508	0,1641
9	4	0,0074	0,0661	0,1715	0,2508	0,2461
9	5	0,0008	0,0165	0,0735	0,1672	0,2461
9	6	0,0001	0,0028	0,0210	0,0743	0,1641
9	7	0,0000	0,0003	0,0039	0,0212	0,0703
9	8	0,0000	0,0000	0,0004	0,0035	0,0176
9	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020
10	0	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010
10	1	0,3874	0,2684	0,1211	0,0403	0,0098
10	2	0,1937	0,3020	0,2335	0,1209	0,0439
10	3	0,0574	0,2013	0,2668	0,2150	0,1172
10	4	0,0112	0,0881	0,2001	0,2508	0,2051
10	5	0,0015	0,0264	0,1029	0,2007	0,2461
10	6	0,0001	0,0055	0,0368	0,1115	0,2051
10	7	0,0000	0,0008	0,0090	0,0425	0,1172
10	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0106	0,0439
10	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0098
10	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010

FUNCIÓ DE PROBABILITAT DE LA BINOMIAL (*CONTINUACIÓ*)

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>Probabilitat d'èxit (II)</i>				
		<i>0,1</i>	<i>0,2</i>	<i>0,3</i>	<i>0,4</i>	<i>0,5</i>
15	0	0,2059	0,0352	0,0047	0,0005	0,0000
15	1	0,3432	0,1319	0,0305	0,0047	0,0005
15	2	0,2669	0,2309	0,0916	0,0219	0,0032
15	3	0,1285	0,2501	0,1700	0,0634	0,0139
15	4	0,0428	0,1876	0,2186	0,1268	0,0417
15	5	0,0105	0,1032	0,2061	0,1859	0,0916
15	6	0,0019	0,0430	0,1472	0,2066	0,1527
15	7	0,0003	0,0138	0,0811	0,1771	0,1964
15	8	0,0000	0,0035	0,0348	0,1181	0,1964
15	9	0,0000	0,0007	0,0116	0,0612	0,1527
15	10	0,0000	0,0001	0,0030	0,0245	0,0916
15	11	0,0000	0,0000	0,0006	0,0074	0,0417
15	12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0139
15	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0032
15	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005
15	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000
20	1	0,2701	0,0576	0,0068	0,0005	0,0000
20	2	0,2852	0,1369	0,0278	0,0031	0,0002
20	3	0,1901	0,2054	0,0716	0,0123	0,0011
20	4	0,0898	0,2182	0,1304	0,0350	0,0046
20	5	0,0319	0,1746	0,1789	0,0746	0,0148
20	6	0,0089	0,1091	0,1916	0,1244	0,0370
20	7	0,0020	0,0545	0,1643	0,1659	0,0739
20	8	0,0003	0,0222	0,1144	0,1797	0,1201
20	9	0,0001	0,0074	0,0654	0,1597	0,1602
20	10	0,0000	0,0020	0,0308	0,1171	0,1762
20	11	0,0000	0,0005	0,0120	0,0710	0,1602
20	12	0,0000	0,0001	0,0039	0,0355	0,1201
20	13	0,0000	0,0000	0,0010	0,0146	0,0739
20	14	0,0000	0,0000	0,0002	0,0049	0,0370
20	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0148
20	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0046
20	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011
20	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
20	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

TAULA 4: FUNCIO DE DISTRIBUCIO DE LA BINOMIAL

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>Probabilitat d'èxit (π)</i>				
		<i>0,1</i>	<i>0,2</i>	<i>0,3</i>	<i>0,4</i>	<i>0,5</i>
2	0	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
2	1	0,9900	0,9600	0,9100	0,8400	0,7500
2	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
3	1	0,9720	0,8960	0,7840	0,6480	0,5000
3	2	0,9990	0,9920	0,9730	0,9360	0,8750
3	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
4	1	0,9477	0,8192	0,6517	0,4752	0,3125
4	2	0,9963	0,9728	0,9163	0,8208	0,6875
4	3	0,9999	0,9984	0,9919	0,9744	0,9375
4	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
5	1	0,9185	0,7373	0,5282	0,3370	0,1875
5	2	0,9914	0,9421	0,8369	0,6826	0,5000
5	3	0,9995	0,9933	0,9692	0,9130	0,8125
5	4	1,0000	0,9997	0,9976	0,9898	0,9688
5	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156
6	1	0,8857	0,6553	0,4202	0,2333	0,1094
6	2	0,9842	0,9011	0,7443	0,5443	0,3438
6	3	0,9987	0,9830	0,9295	0,8208	0,6562
6	4	0,9999	0,9984	0,9891	0,9590	0,8906
6	5	1,0000	0,9999	0,9993	0,9959	0,9844
6	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0	0,4783	0,2097	0,0824	0,0280	0,0078
7	1	0,8503	0,5767	0,3294	0,1586	0,0625
7	2	0,9743	0,8520	0,6471	0,4199	0,2266
7	3	0,9973	0,9667	0,8740	0,7102	0,5000
7	4	0,9998	0,9953	0,9712	0,9037	0,7734
7	5	1,0000	0,9996	0,9962	0,9812	0,9375
7	6	1,0000	1,0000	0,9998	0,9984	0,9922
7	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

FUNCIÓ DE DISTRIBUCIÓ DE LA BINOMIAL (*CONTINUACIÓ*)

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>Probabilitat d'èxit (π)</i>				
		<i>0,1</i>	<i>0,2</i>	<i>0,3</i>	<i>0,4</i>	<i>0,5</i>
8	0	0,4305	0,1678	0,0576	0,0168	0,0039
8	1	0,8131	0,5033	0,2553	0,1064	0,0352
8	2	0,9619	0,7969	0,5518	0,3154	0,1445
8	3	0,9950	0,9437	0,8059	0,5941	0,3633
8	4	0,9996	0,9896	0,9420	0,8263	0,6367
8	5	1,0000	0,9988	0,9887	0,9502	0,8555
8	6	1,0000	0,9999	0,9987	0,9918	0,9648
8	7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9961
8	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0	0,3874	0,1342	0,0404	0,0101	0,0020
9	1	0,7748	0,4362	0,1960	0,0705	0,0195
9	2	0,9470	0,7382	0,4628	0,2318	0,0898
9	3	0,9917	0,9144	0,7297	0,4826	0,2539
9	4	0,9991	0,9804	0,9012	0,7334	0,5000
9	5	0,9999	0,9969	0,9747	0,9006	0,7461
9	6	1,0000	0,9997	0,9957	0,9750	0,9102
9	7	1,0000	1,0000	0,9996	0,9962	0,9805
9	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980
9	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010
10	1	0,7361	0,3758	0,1493	0,0464	0,0107
10	2	0,9298	0,6778	0,3828	0,1673	0,0547
10	3	0,9872	0,8791	0,6496	0,3823	0,1719
10	4	0,9984	0,9672	0,8497	0,6331	0,3770
10	5	0,9999	0,9936	0,9527	0,8338	0,6230
10	6	1,0000	0,9991	0,9894	0,9452	0,8281
10	7	1,0000	0,9999	0,9984	0,9877	0,9453
10	8	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893
10	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990
10	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

FUNCIÓ DE DISTRIBUCIÓ DE LA BINOMIAL (*CONTINUACIÓ*)

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>Probabilitat d'èxit (π)</i>				
		<i>0,1</i>	<i>0,2</i>	<i>0,3</i>	<i>0,4</i>	<i>0,5</i>
15	0	0,2059	0,0352	0,0047	0,0005	0,0000
15	1	0,5490	0,1671	0,0353	0,0052	0,0005
15	2	0,8159	0,3980	0,1268	0,0271	0,0037
15	3	0,9444	0,6482	0,2969	0,0905	0,0176
15	4	0,9873	0,8358	0,5155	0,2173	0,0592
15	5	0,9978	0,9389	0,7216	0,4032	0,1509
15	6	0,9997	0,9819	0,8689	0,6098	0,3036
15	7	1,0000	0,9958	0,9500	0,7869	0,5000
15	8	1,0000	0,9992	0,9848	0,9050	0,6964
15	9	1,0000	0,9999	0,9963	0,9662	0,8491
15	10	1,0000	1,0000	0,9993	0,9907	0,9408
15	11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824
15	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9963
15	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
15	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
15	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000
20	1	0,3917	0,0692	0,0076	0,0005	0,0000
20	2	0,6769	0,2061	0,0355	0,0036	0,0002
20	3	0,8670	0,4114	0,1071	0,0160	0,0013
20	4	0,9568	0,6296	0,2375	0,0510	0,0059
20	5	0,9887	0,8042	0,4164	0,1256	0,0207
20	6	0,9976	0,9133	0,6080	0,2500	0,0577
20	7	0,9996	0,9679	0,7723	0,4159	0,1316
20	8	0,9999	0,9900	0,8867	0,5956	0,2517
20	9	1,0000	0,9974	0,9520	0,7553	0,4119
20	10	1,0000	0,9994	0,9829	0,8725	0,5881
20	11	1,0000	0,9999	0,9949	0,9435	0,7483
20	12	1,0000	1,0000	0,9987	0,9790	0,8684
20	13	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423
20	14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9793
20	15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941
20	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987
20	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
20	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TAULA 5: VALORS D' $e^{-\lambda}$

Valors d'$e^{-\lambda}$										
($0 < \lambda < 1$)										
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
0,1	0,9048	0,8958	0,8869	0,8781	0,8694	0,8607	0,8521	0,8437	0,8353	0,8270
0,2	0,8187	0,8106	0,8025	0,7945	0,7866	0,7788	0,7711	0,7634	0,7558	0,7483
0,3	0,7408	0,7334	0,7261	0,7189	0,7118	0,7047	0,6977	0,6907	0,6839	0,6771
0,4	0,6703	0,6636	0,6570	0,6505	0,6440	0,6376	0,6313	0,6250	0,6188	0,6126
0,5	0,6065	0,6005	0,5945	0,5886	0,5827	0,5770	0,5712	0,5655	0,5599	0,5543
0,6	0,5488	0,5434	0,5379	0,5326	0,5273	0,5220	0,5169	0,5117	0,5066	0,5016
0,7	0,4966	0,4916	0,4868	0,4819	0,4771	0,4724	0,4677	0,4630	0,4584	0,4538
0,8	0,4493	0,4449	0,4404	0,4360	0,4317	0,4274	0,4232	0,4190	0,4148	0,4107
0,9	0,4066	0,4025	0,3985	0,3946	0,3906	0,3867	0,3829	0,3791	0,3753	0,3716

($\lambda = 1,2,3,4,...,10$)										
λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045

Cal tenir en compte la descomposició de l'exponent per calcular altres valors d' $e^{-\lambda}$

Exemple: $e^{-5.55} = e^{-5} \cdot e^{-0.55} = 0.006738 \cdot 0.5770 = 0.003888$

TAULA 6: FUNCIO DE PROBABILITAT DE LA DISTRIBUCIO DE POISSON

[illegible]

x	λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0		0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1		0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2		0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3		0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4		0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5		0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6		0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7		0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8		0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

[illegible]

FUNCIÓ DE PROBABILITAT DE LA DISTRIBUCIÓ DE POISSON (CONTINUACIÓ)

x	λ	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0		0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1		0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2		0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3		0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4		0,1733	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5		0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6		0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7		0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8		0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9		0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10		0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11		0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12		0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

x	λ	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0		0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1		0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2		0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3		0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4		0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5		0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6		0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7		0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8		0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9		0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0281	0,0307	0,0334	0,0363
10		0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11		0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12		0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13		0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14		0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

[illegible]

[illegible][illegible][illegible]

FUNCIÓ DE DISTRIBUCIÓ DE LA LLEI DE POISSON (CONTINUACIÓ)

[illegible][illegible]

[illegible]