

PROBLEMES CLAU DE DISSENY D'EXPERIMENTS

Concepción Arenas Sola

Departament d'Estadística



UNIVERSITAT DE BARCELONA



PROBLEMES CLAU DE DISSENY D'EXPERIMENTS

Concepción Arenas Sola

Departament d'Estadística

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



El text «Problemes clau de disseny d'experiments», dirigit als estudiants de Biologia, va néixer dins de les iniciatives per a la millora de la qualitat de l'ensenyament.

Aquest text pretén ajudar l'alumne en el seguiment de l'estudi de l'assignatura Disseny d'Experiments i Anàlisi de Dades (DEAD), que s'imparteix actualment a la llicenciatura de Biologia. El text conté problemes resolts fruit de l'experiència docent en aquesta matèria i els quals estan concebuts perquè es pugui comprovar el nivell actual de l'alumne i superar, si cal, les mancances que s'hi detectin. Els problemes que es presenten són tant teòrics com aplicats i alguns contenen llistats d'ordinador obtinguts amb el paquet estadístic Statgraphics.

Vull agrair a tots els meus alumnes de DEAD, de manera especial als del cursos 2003-2004, 2004-2005 i 2005-2006, el seu treball i els seus valuosos comentaris, sense els quals l'elaboració d'aquest text de problemes no hauria estat possible.

Espero que aquesta publicació sigui útil als estudiants en la seva formació com a persones i com a futurs professionals.

C. Arenas
Professora titular del Departament d'Estadística de la UB
Barcelona, 21 de novembre de 2007

Problema

Un zoòleg vol comprovar si l'altura de les caixes niu influeix en l'èxit reproductor de la mallerenga carbonera (*Parus major*). Amb aquest objectiu du a terme un experiment al Parc Natural de Collserola i col·loca caixes niu a sis altures distintes: 1 (2 m), 2 (3 m), 3 (4 m), 4 (5 m), 5 (6 m) i 6 (7 m). A partir d'aquí, es dedica a controlar la supervivència dels pollets a cada caixa niu durant el període reproductor de la mallerenga carbonera. Les mitjanes i variàncies mostrals són:

Altura	1	2	3	4	5	6
Mitjana	1,92	2,02	2,3	2,13	1,88	1,43
S^2	0,65	0,62	0,69	0,71	0,59	0,64

Comproveu si hi ha diferències significatives en la supervivència dels pollets segons l'altura del niu si per a cadascuna de les diferents altures hi ha cinc caixes. Nota: pressuposem normalitat i igualtat de variàncies, i nivell de significació = 0,05.

Objectiu

Comprovar si l'altura de les caixes niu influeix en l'èxit reproductor de la mallerenga carbonera (*Parus major*).

Variable observable

Variable: supervivència dels pollets

Factor: altura del niu, amb sis nivells ($k = 6$) i cinc mostres per nivell ($n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $n_3 = 5$, $n_4 = 5$, $n_5 = 5$, $n_6 = 5$, $n = 30$); variàncies: $S_1^2 = 0,65$, $S_2^2 = 0,62$, $S_3^2 = 0,69$, $S_4^2 = 0,71$, $S_5^2 = 0,59$ i $S_6^2 = 0,64$.

Model matemàtic

Supervivència = mitjana general + efecte del factor altura + residus

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

Hipòtesis per contrastar

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6.$$

H_1 : alguna igualtat és falsa.

Com que el problema pressuposa la normalitat i l'homogeneïtat de variàncies, calculem directament els valors de la taula d'anàlisi de variàncies (ANOVA).

Primer calculem la suma de quadrats entre grups, $Q_e = \sum_i n_i (y_i - y_{..})^2$; necessitem les mitjanes a cada nivell i la mitjana general, que calcularem a partir de les mitjanes de cada nivell:

$$y_{..} = (n_1 y_{1.} + n_2 y_{2.} + \dots + n_6 y_{6.}) / n = (5 \times 1,92 + 5 \times 2,02 + 5 \times 2,3 + 5 \times 2,13 + 5 \times 1,88 + 5 \times 1,43) / 30 = 1,9467$$

Calculem ara la suma de quadrats dins dels grups:

$$Q_d = \sum_{i,j} (y_{ij} - y_{i.})^2 = \sum_j (y_{1j} - y_{1.})^2 + \sum_j (y_{2j} - y_{2.})^2 + \cdots + \sum_j (y_{6j} - y_{6.})^2.$$

Com que tenim les variàncies mostrals i $S_i^2 = \frac{\sum_j (y_{ij} - y_{i.})^2}{n_i}$,

queda

$$Q_d = n_1 \times S_1^2 + n_2 \times S_2^2 + \cdots + n_6 \times S_6^2 = 19,5.$$

Taula ANOVA

<i>Variable</i>	<i>SQ</i>	<i>Gr. ll.</i>	<i>QM</i>	<i>F</i>
Entre grups	2,18	$k - 1 = 5$	$Q_e/k - 1 = 0,436$	$0,436/0,812 = 0,537$
Dins de grups	19,5	$n - k = 24$	$Q_d/n - k = 0,812$	
Total	21,68	$n - 1 = 29$		

Cal comparar el valor de l'estadístic F experimental (el de la taula ANOVA) amb el valor de les taules d'una distribució F amb 5 i 24 graus de llibertat. Com que el valor de $F_{5,24} = 2,62$ de les taules és més gran que 0,537, rebutgem la hipòtesi alternativa. Per tant, no hi ha diferències significatives en la supervivència dels pollets segons les altures dels nius.

Problema

Se sap que s'ha llençat material tòxic en un riu que entra en una gran àrea de pesca comercial en aigua salada. Els enginyers civils han estudiat la manera en què l'aigua transporta el material tòxic i han mesurat la quantitat de material (en parts per milió) trobat a les ostres recollides en tres llocs diferents, des de la sortida de l'estuari fins a la badia on es concentra la major part de la pesca comercial. A causa d'un problema d'organització es van perdre les dades del lloc 3, però per sort es conservaren els valors de la mitjana i la variància.

Lloc 1 (estuari)	Lloc 2 (lluny de la badia)	Lloc 3 (prop de la badia)
15	19	
26	15	
20	10	
20	26	
29	11	
28	20	
21	13	
26	15	
	18	

La mitjana per al grup 3 és $y_3 = 22$, amb $n_3 = 7$, i la variància mostral és 2,1.

a) Obteniu la taula ANOVA i decidiu si hi ha diferències significatives amb un nivell de significació = 0,05.

b) Si hi ha diferències significatives, utilitzeu el mètode de comparacions múltiples LSD per assenyalar-les.

Objectiu

Observar si hi ha diferències significatives en els valors mitjans de parts per milió de material tòxic trobat a les ostres recollides en tots tres llocs.

Variable observable

Variable (Y): ppm de material tòxic en ostres

Factor: lloc, amb tres nivells ($k = 3$):

lloc 1 (estuari) $\rightarrow n_1 = 8$

lloc 2 (fora de la badia) $\rightarrow n_2 = 9$

lloc 3 (prop de la badia) $\rightarrow n_3 = 7$

$n = 24$

Model matemàtic

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

Hipòtesis per contrastar

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

H_1 : alguna igualtat és falsa.

Calculem les mitjanes mostrals per nivells:

$$y_{1.} = (15 + 26 + 20 + 20 + 29 + 28 + 21 + 26)/8 = 23,125$$

$$y_{2.} = (19 + 15 + 10 + 26 + 11 + 20 + 13 + 15 + 18)/9 = 16,33$$

$$y_{3.} = 22,$$

i la mitjana total:

$$y_{..} = (n_1 y_{1.} + n_2 y_{2.} + n_3 y_{3.})/n = (8 \times 23,125 + 9 \times 16,33 + 7 \times 22)/24 = 20,25.$$

Calculem ara les sumes de quadrats entre grups i dins de grups:

$$\begin{aligned} Q_e &= \sum_i n_i (y_{i.} - y_{..})^2 = 8 \times (23,125 - 20,25)^2 + 9 \times (16,33 - 20,25)^2 + 7 \times (22 - 20,25)^2 \\ &= 225,855 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_d &= \sum_{i,j} (y_{ij} - y_{i.})^2 = \sum_j (y_{1j} - y_{1.})^2 + \sum_j (y_{2j} - y_{2.})^2 + \sum_j (y_{3j} - y_{3.})^2 = \\ &= (15 - 23,125)^2 + \dots + (26 - 23,125)^2 + (19 - 16,33)^2 + \dots + (18 - 16,33)^2 + \\ &= (15 - 23,125)^2 + \dots + (26 - 23,125)^2 + (19 - 16,33)^2 + \dots + (18 - 16,33)^2 + 7 \times 2,1 = 381,2. \end{aligned}$$

Taula ANOVA

<i>Variabilitat</i>	<i>SQ</i>	<i>Graus de llibertat</i>	<i>QM</i>	<i>F</i>
Entre grups	225,855	$k - 1 = 3 - 1 = 2$	$225,855/2 = 112,93$	$112,93/18,15 = 6,22$
Dins de grups	381,2	$n - k = 24 - 3 = 21$	$381,2/21 = 18,15$	
Total	607,05	$n - 1 = 24 - 1 = 23$		

Criteri de decisió

Com que no disposem del p -valor, per arribar a la conclusió cal buscar a les taules quin és el valor de l'estadístic F amb 2 i 21 graus de llibertat. Trobem que $F_{2,21} = 3,47$.

Com que F experimental = 6,22 > $F_{2,21} = 3,47$, rebutgem H_0 .

Conclusió

Podem acceptar que hi ha diferències significatives entre la quantitat de material tòxic trobat a les ostres segons el lloc de captura.

b) Ara fem les comparacions múltiples següents:

Cas 1

$$H_0: \alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$$H_1: \alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$$

Cas 2

$$H_0: \alpha_1 - \alpha_3 = 0$$

$$H_1: \alpha_1 - \alpha_3 \neq 0$$

Cas 3

$$H_0: \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$H_1: \alpha_2 - \alpha_3 \neq 0$$

En el mètode LSD (*Least Significant Difference*) es necessita conèixer el valor de

$$Q = t_{\alpha/2} \sqrt{Q_d \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}. \text{ Observem que, com que no és un disseny balancejat, el valor}$$

de Q variarà, ja que depèn de la mida de les mostres.

Cas 1: el valor de Q és $Q = 2,08\sqrt{18,15} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) = 4,34$. L'interval que cerquem serà:

$$[y_{1.} - y_{2.} - Q; y_{1.} - y_{2.} + Q] \rightarrow [23,125 - 16,33 - 4,34; 23,125 - 16,33 + 4,34] = \\ = [2,45; 11,13].$$

Com que el 0 és fora de l'interval, rebutgem H_0 , és a dir, hi ha diferències significatives entre la quantitat de material tòxic trobat a les ostres recollides a l'estuari i la quantitat de material tòxic trobat a les ostres recollides al lloc llunyà de la badia.

Cas 2: ara $Q = 2,08\sqrt{18,15} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right) = 4,58$.

$$[y_{1.} - y_{3.} - Q; y_{1.} - y_{3.} + Q] \rightarrow [23,125 - 22 - 4,58; 23,125 - 22 + 4,58] = \\ = [-3,45; 5,7]$$

Com el 0 és dins de l'interval, rebutgem H_1 , és a dir, no hi ha diferències significatives entre la quantitat de material tòxic trobat a les ostres recollides a l'estuari i la quantitat de material tòxic trobat a les ostres recollides al lloc proper a la badia.

Cas 3: ara $Q = 4,46$.

$$[y_{2.} - y_{3.} - Q; y_{2.} - y_{3.} + Q] \rightarrow [-10,13; -1,21].$$

Com que el 0 és dins de l'interval, rebutgem H_1 , és a dir, hi ha diferències significatives entre la quantitat de material tòxic trobat a les ostres recollides al lloc llunyà de la badia i la quantitat de material tòxic trobat a les ostres recollides en el lloc proper a la badia.

Si observem els valors de $y_{1.} = 23,125$; $y_{2.} = 16,33$; $y_{3.} = 22$, es pot veure que el lloc llunyà de la badia és el que presenta menys material tòxic, i que entre l'estuari i el lloc proper a la badia no hi ha diferències significatives.

Problema

Volem estudiar l'efecte de tres nous productes que s'apliquen a la dieta dels animals en una granja que es dedica a la cria d'aviram per fer-los augmentar de pes al cap de mig any i des del naixement. S'aplica el producte A a un grup de pollastres, el B a un segon grup i el C a un tercer grup. Cada grup d'estudi consta de cinc animals.

Ens donen les mitjanes següents:

Mitjana producte A (y_a)= 3.271,6 $S_a^2 = 38.795,3$

Mitjana producte B (y_b)= 3.621,6 $S_b^2 = 12.650,3$

Mitjana producte C (y_c)= 3.323 $S_c^2 = 7.137$

Mitjana producte total (y_t)= 3.405,4

Taula ANOVA:

Variabilitat	Grau de llib.	SQ	QM	F
Entre grups	2	357.173,2	178.586,6	7,31
Dintre grups	12	292.913	24.409,41	
Total	14	650.086,2		

a) Hi ha diferències entre tots tres productes?

b) Quin producte, amb una probabilitat del 95%, és el més recomanable per fer engreixar els pollastres?

Assumiu que hi ha normalitat de residus, homogeneïtat de variàncies i nivell de significació = 0,05.

Objectiu

Saber si hi ha diferències entre tots tres productes.

Com que ja ens donen la taula ANOVA, només cal fer servir el criteri de decisió: a la taula de la distribució F , per a 2 i 12 graus de llibertat dona un valor de 3,89.

Com que la F experimental és $7,31 > 3,89$, rebutgem H_0 ; podem acceptar que hi ha diferències significatives entre els diferents productes.

Per saber quin és el producte més recomanable per fer engreixar l'aviram, calcularem l'interval de confiança de la predicció amb un 95% de confiança.

Sabem que amb A la predicció segueix una distribució $y_{..} + (y_a - y_{..}) + N(0, \sqrt{QM_d}) =$

$N(y_a, \sqrt{QM_d}) = N(3.271,6; 156,23) \rightarrow$ els extrems que cal cercar són:

$3.271,6 - 1,96 \times 156,23$ i $3.271,6 + 1,96 \times 156,23$. Així doncs, amb una confiança del 95%, si fem servir el tractament A, els pollastres s'engreixaran entre $[3.580,81; 2.968,39]$ g en un període de mig any.

Sabem que amb B la predicció segueix una distribució $y_{..} + (y_b - y_{..}) + N(0, \sqrt{QM_d}) = N(y_b, \sqrt{QM_d}) = N(3.621,6; 156,23) \rightarrow$ amb una confiança del 95%, si fem servir el tractament B, els pollastres s'engreixaran entre $[3.621,6 - 1,96 \times 156,23; 3.621,6 + 1,96 \times 156,23] = [3.927,81; 3.315,39]$ g al cap de mig any.

Anàlogament, amb C la predicció segueix una distribució

$N(y_c, \sqrt{QM_d}) = N(3.323; 156,23) \rightarrow$ amb una confiança del 95%, si fem servir el tractament C, els pollastres s'engreixaran entre $[3.629,21; 3.016,79]$ g al cap de mig any.

Així doncs, segons aquestes prediccions, hauríem de triar el tractament B.

Problema

En una piscifactoria es mesura el pes dels peixos i l'aliment que se'ls dona. Per a això, es disposa de tres tipus diferents de pinso per a peixos: A, B i C, i de quinze peixos de la mateixa edat, cinc dels quals són alimentats amb A, cinc amb B i cinc amb C.

Es vol saber si hi ha diferències pel que fa al pes d'aquests peixos i, si n'hi ha, quin és l'aliment que els fa tenir un major pes.

Es van obtenir les dades següents:

<i>Variabilitat</i>	<i>Grau de llibertat</i>	<i>SO</i>	<i>QM</i>	<i>F</i>
Entre grups	?	?	?	?
Dins els grups	?	143,2	?	
total	?	?		

A més, sabem que amb una probabilitat del 95% els intervals de confiança per a les prediccions són:

Per a A: [243,83; 257,37]

Per a B: [242,63; 256,17]

Per a C: [253,03; 266,57]

A partir d'aquesta informació, completeu la taula ANOVA.

Primerament, completem la columna dels graus de llibertat:

Entre grups: $3 - 1 = 2$

Dins els grups: $15 - 3 = 12$

Total: $15 - 1 = 14$

Ara ja podem calcular els QM dintre grups: $QM_d = 143,2/12 = 11,938$

Per calcular els QM entre grups, recordem la seva fórmula:

$$Q_e = \sum_i n_i (y_{i.} - y_{..})^2.$$

Per tant, a partir de la informació de l'enunciat caldrà determinar els valors de les mitjanes a cada nivell i el valor de la mitjana global. Les grandàries mostrals a cada nivell són conegudes amb valor 5.

Els intervals de confiança per a les prediccions estan determinats per:

Aliment A

$$\text{Predicció} \approx y_{..} + (y_{1.} - y_{..}) + N(0, \sqrt{QM_d}),$$

Predicció $\approx N(y_{1.}, \sqrt{QM_d})$. Per tant, l'interval de confiança amb una probabilitat del 95% és:

$$[y_{1.} - 1,96\sqrt{QM_d}; y_{1.} + 1,96\sqrt{QM_d}] = [243,83; 257,37]. \text{ I, per tant, tindrem que:}$$

$$y_{1.} = (243,83 + 257,37)/2 = 250,6.$$

Aliment B

$$\text{Predicció} \approx y_{..} + (y_{2.} - y_{..}) + N(0, \sqrt{QM_d})$$

$$\text{Predicció} \approx N(y_{2.}, \sqrt{QM_d}).$$

Així doncs,

$$\text{interval} = [y_{2.} - 1,96\sqrt{QM_d}; y_{2.} + 1,96\sqrt{QM_d}] = [242,63; 256,17].$$

I podem deduir que $y_{2.} = (242,63 + 256,17)/2 = 249,4$.

Aliment C

Procedim de manera anàloga:

$$\text{Predicció} \approx N(y_{3.}, \sqrt{QM_d}); \text{interval} = [253,03; 266,57];$$

$$y_{3.} = (253,03 + 266,57)/2 = 259,8.$$

A partir d'aquests valors, el valor de $y_{..}$ serà:

$$y_{..} = (5 \times 250,6 + 5 \times 249,4 + 5 \times 259,8)/15 = 253,26.$$

$$\begin{aligned} \text{Ara ja podem calcular } Q_e &= \sum_i n_i (y_{i.} - y_{..})^2 \\ &= 5(250,6 - 253,26)^2 + 5(249,4 - 253,26)^2 + 5(259,8 - 253,26)^2 = 323,734. \end{aligned}$$

$$\text{Finalment, } QM_e = 323,734/2 = 161,867.$$

Per acabar, cal determinar el valor de la F experimental i aplicar el criteri de decisió:

$$F_{exp} = 161,867/11,938 = 13,56.$$

El valor teòric segons una distribució $F_{2, 12}$ és 3,89, amb $\alpha = 0,05$.

Com que el valor de $F_{exp} = 13,56$ es troba a la cua (més gran que 3,89), rebutgem H_0 .

Per tant, amb un nivell de significació del 5% podem acceptar que hi ha diferències de pes significatives entre els grups.

Problema

S'estudien tres marques de piles o bateries. Se sospita que la durada (en setmanes) de totes tres bateries és diferent. Es proven cinc bateries de cada marca i s'obtenen els resultats que s'indiquen a continuació.

Table of Means for durada by marca with 95,0 percent LSD intervals

<i>Marca</i>	<i>Count</i>	<i>Mean</i>
1	5	95,2
2	5	79,4
3	5	100,4
Total	15	91,6667

Variance Check

Cochran's C test: 0,444444 P-Value = 0,793832

Bartlett's test: 1,03263 P-Value = 0,840823

Hartley's test: 1,85714

Levene's test: 0,07 P-Value = 0,932772

Computed Chi-Square goodness-of-fit statistic = 12,1333

P-Value = 0,145353

Shapiro-Wilks W statistic = 0,928424

P-Value = 0,255353

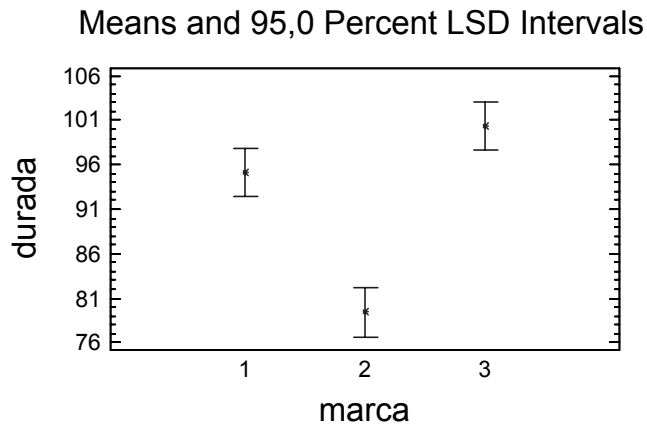
Z score for skewness = 0,799461

P-Value = 0,424021

Z score for kurtosis not computed.

Analysis of Variance

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>	<i>F-Ratio</i>	<i>P-Value</i>
<i>Between groups</i>	?	?	598,067	?	?
<i>Within groups</i>	187,2	12	?		
<i>Total (corr.)</i>	1.383,33	14			



Multiple Range tests (LSD, 95% de confiança)

Contrast	Difference	+/- Limits
1-2	15,8	5,44268
1-3	-5,2	5,44268
2-3	-21,0	5,44268

1. Hi ha diferències significatives quant a la durada de les bateries?
2. Quina triaríeu?

Objectiu

Mirar si hi ha diferències significatives en la durada de les diferents bateries.

Variable observable

Variable: durada de les bateries.

Factor: marca de la bateria, amb tres nivells ($k = 3$), amb $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $n_3 = 5$ i $n = 15$.

Model matemàtic

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}.$$

Cal que es compleixin les hipòtesis de treball següents per a una ANOVA d'un factor:

- homogeneïtat de variàncies
- normalitat
- independència

Mirem si hi ha homogeneïtat de variàncies:

H_0 : hi ha homogeneïtat de variàncies.

H_1 : no hi ha homogeneïtat de variàncies.

Utilitzem el test de Bartlett: estadístic = 1,03262; p -valor = 0,8408.

Com que el p -valor $> 0,05 \Rightarrow$ rebutgem H_1 i, per tant, podem dir que hi ha homogeneïtat de variàncies.

Hi ha normalitat?

H_0 : hi ha normalitat.

H_1 : no hi ha normalitat.

Per determinar si hi ha normalitat, farem servir la prova khi quadrat.

Estadístic = 12,1333; p -valor = 0,145.

Com que el p -valor $> 0,05 \Rightarrow$ rebutgem H_1 i, per tant, podem dir que hi ha normalitat.

Fem una ANOVA d'un factor. La taula ANOVA completa és:

<i>Analysis of Variance</i>				
<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>	<i>F-Ratio</i>
<i>Between groups</i>	1.196,134	2	598,067	38,34
<i>Within groups</i>	187,2	12	15,6	
<i>Total (corr.)</i>	1.383,33	14		

Hipòtesis de treball:

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

H_1 : alguna igualtat és falsa.

Mirem a les taules l'estadístic $F_{2,12}$:

$F_{2,12} = 3,89$

$F_{experimental} = 38,34$

Com que $F_{experimental} > F_{2,12} \Rightarrow$ rebutgem H_0 i, per tant, podem dir que hi ha diferències significatives entre la durada de les tres bateries.

2. Comparem totes tres bateries dues a dues. Farem un test de comparació múltiple (LSD, 95% de confiança).

Contrast 1-2

$H_0: \alpha_1 - \alpha_2 = 0$

$H_1: \alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$