TEXTOS DOCENTS

183

PROBLEMES RESOLTS DE FONAMENTS DE FÍSICA I

Jordi Ortín

Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria

UNIVERSITAT DE BARCELONA

TEXTOS DOCENTS

183

PROBLEMES RESOLTS DE FONAMENTS DE FÍSICA I

Jordi Ortín

Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria

Publicacions i Edicions

UNIVERSITAT DE BARCELONA

INTRODUCCIÓ

Aquest llibre s'adreça principalment als estudiants de *Fonaments de física I* de l'ensenyament de Física de la UB i als professors de problemes de l'assignatura. També vol ser una eina vàlida per als estudiants de física general d'altres ensenyaments científics i tècnics, i per als professors de física de l'ensenyament secundari.

L'ensenyament de la física de primer curs s'ha enfrontat a un escenari canviant en els darrers anys. En primer lloc, per la implantació el 1992 d'una reforma en profunditat dels plans d'estudis de les titulacions superiors, que ha portat a l'actual llicenciatura de quatre anys, estructurada en cursos semestrals. En segon lloc, per la reforma dels estudis secundaris impulsada per la LOGSE, que ha alterat l'ensenyament de la física al batxillerat. I, finalment, per la disminució de la demanda dels estudis de Física entre els estudiants més capacitats, motivada per la davallada demogràfica, l'aparició de noves titulacions i la crisi general dels estudis científics purs a Occident en aquest final de segle.

Per fer front a aquests canvis, la Facultat ha dut a terme una revisió important del pla d'estudis, que s'ha posat en marxa el curs 1999–2000. En el primer curs del pla revisat la càrrega acadèmica obligatòria és relativament baixa, amb el propòsit que els estudiants s'habituïn progressivament a la manera de fer de la universitat i aprenguin a treballar per si mateixos. El nucli del primer any el forma la física general, que s'estructura en dues assignatures semestrals obligatòries: *Fonaments de física I* i *Fonaments de física II*. La resta d'assignatures obligatòries del primer curs són instrumentals (*Àlgebra Lineal i Geometria*, *Anàlisi matemàtica I*, *Anàlisi matemàtica II*, *Programació i tècniques numèriques*) i pràctiques (*Laboratori de mecànica*).

Fonaments de física I i *Fonaments de física II* són assignatures semestrals de nou crèdits lectius, dels quals 4,5 es dediquen a la presentació de la teoria, 3 al plantejament, la discussió i la resolució de problemes, i 1,5 a activitats complementàries (seminaris, presentacions audiovisuals i discussió i resolució de dubtes). El temari de *Fonaments de física I* es dedica a la mecànica clàssica de les partícules i dels sistemes de partícules, a la teoria de la gravitació de Newton i a una breu introducció als fenòmens tèrmics. El de *Fonaments de física II* comprèn l'estudi de l'electricitat i el magnetisme, les ones en medis materials, l'òptica geomètrica i una breu introducció a la física moderna. El nivell al qual s'imparteixen aquests temes correspon al dels llibres clàssics de física general.

L'objectiu dels *Fonaments de física* és oferir una visió panoràmica, coherent i rigorosa de les lleis clàssiques del món físic, basant-se en els coneixements adquirits en el batxillerat i completant-los o generalitzant-los allí on sigui necessari. En la mesura del possible, els *Fonaments* han de proporcionar als estudiants, que arriben amb coneixements diversos, una base equivalent. A més, han d'educar-los en les capacitats abstractes de raonament i comprensió dels fenòmens físics i en l'ús de les matemàtiques com a llenguatge en què s'expressa la física, habilitats imprescindibles en cursos posteriors.

L'assignatura *Fonaments de física I* s'avalua amb un examen final escrit, que consta de dues parts. La primera part és de teoria i contribueix en un 40 % a la qualificació global. En aquesta part s'avalua la comprensió dels conceptes més importants de l'assignatura. Consisteix en un qüestionari de 30 preguntes breus, agrupades temàticament en deu grups de tres preguntes. Cada pregunta es pot respondre amb "veritable" o "fals", o bé es pot deixar en blanc. Les respostes correctes sumen 1 punt i les incorrectes resten 1 punt. Les no contestades no sumen ni resten. S'ha d'obtenir un mínim de 6 punts d'aquesta part per aprovar l'assignatura. La segona part avalua la capacitat de resoldre problemes nous i contribueix en un 60 % a la qualificació global. Consta de tres problemes, d'extensió similar als d'aquest llibre. En preparar aquesta part s'intenta que els diferents apartats d'un mateix problema puguin ser avaluats de forma independent. L'examen en el seu conjunt cobreix tot el temari de l'assignatura.

A l'hora d'escriure aquest llibre he volgut posar l'èmfasi en el plantejament rigorós dels problemes i en la interpretació dels resultats. El llibre pretén ensenyar a pensar sobre els problemes. Per això he preferit restringir-me a un nombre reduït de problemes, que m'han semblat representatius, i ser generós en les explicacions. Aquestes van des dels aspectes més elementals fins als més subtils i complicats, i, per tant, haurien de ser útils a tots els estudiants. Hi he inclòs un nombre important de gràfics i esquemes, per allò que una imatge val més que mil paraules. Els problemes s'han seleccionat a partir del criteri que cada problema ha d'introduir com a mínim un concepte nou, al qual fa referència el títol del problema. Això vol dir que l'estudiant ha de treballar successivament tots els problemes per adquirir una visió global de l'assignatura.

Idealment, l'estudiant hauria de començar per estudiar en el llibre de text de referència el tema corresponent al capítol escollit i confrontar-lo amb les explicacions del professor a classe. A continuació, hauria de treballar cada problema del capítol. Això vol dir llegir-se l'enunciat amb atenció, prendre notes, fer un esquema preliminar del plantejament que s'ha de seguir, portar a la pràctica aquest plantejament i mirar de resoldre el problema. Només aleshores, s'han d'estudiar el plantejament i la solució presentats aquí. És el moment de tornar al llibre de text per repassar els conceptes foscos i discutir-los amb els companys i amb el professor a la classe de problemes. Tot això, és clar, requereix temps i dedicació, però no crec que es pugui aprendre física sense esforçar-s'hi. A canvi, hi ha la immensa satisfacció de comprendre alguns aspectes del món en què vivim i reconèixer l'elegància i la coherència de la teoria que els descriu.

Bibliografia

Hi ha molts textos introductoris de física del nivell del curs. En aquesta llista he inclòs alguns títols representatius que es troben disponibles en català o castellà:

- P. A. Tipler, *Física*. Ed. Reverté, 1994.

  El llibre de text recomanat en l'assignatura, disponible en una excel·lent traducció al català. És un llibre tradicional, força extens i detallat, i de nivell assequible.

- F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young i R. A. Freedman, *Física universitaria*. Addison Wesley Longman, 1999.

  Llibre clàssic, de nivell i extensió comparables al de Tipler. Destaca per la claredat d'exposició d'alguns conceptes.

- M. Alonso i E. J. Finn, *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

  Llibre clàssic, de nivell lleugerament superior al del curs. El primer volum tracta els temes de l'assignatura. Pot servir per complementar alguns temes que el llibre de Tipler tracta de forma simplificada.

- R. P. Feynman, R. B. Leighton i M. Sands, *Feynman. Física*. Fondo Educativo Interamericano, 1972.

  La recopilació de les famoses lliçons de física del Premi Nobel R. P. Feynman. La seva lectura no és fàcil, però constitueix una font de motivació i d'inspiració. El primer volum tracta els temes de l'assignatura.

- J. I. Latorre i R. Tarrach, *Fonaments de física*, Publicacions de la Universitat de Barcelona, Col·lecció Textos Docents, 42, 1995.

  Una presentació breu i original de la mecànica clàssica i l'electromagnetisme. En alguns temes el nivell és superior al del curs. El text és una bona referència per al professor, per preparar el curs, i per als estudiants que ja han passat per un text clàssic.

Per posar a prova els coneixements apresos, el llibre d'Alonso i Finn inclou problemes resolts. També són recomanables:

- R. García Molina i I. Abril, *Problemes de física*. Publicacions de la Universitat d'Alacant, 1999.
- F. A. González, *La física en problemas*. Madrid: Ed. Tébar Flores, 1997.
- J. García Roger, *Problemas de Física*, vol. 1 i 2. Barcelona: Ed. Edunsa, 1992.

Agraïments

Els problemes seleccionats en aquest llibre provenen, la majoria, de les successives col·leccions de problemes de les assignatures de física general que s'han impartit en la llicenciatura de Física de la UB al llarg dels anys.

Fins on he pogut esbrinar, la recopilació original és obra d'Amílcar Labarta, Pep Fontcuberta, Francesc Salvat i Manel Canales. Quan la responsabilitat de la física general va passar al Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria, van agafar el relleu Joan Martorell, Àngels Ramos i jo mateix. L'any 1992 es va modificar el pla d'estudis i de l'assignatura *Física general* vam passar als *Fonaments de física*, que comprenien només la mecànica i l'electromagnetisme, i que van existir fins a la revisió d'enguany. D'aquesta darrera època són les contribucions de José Ignacio Latorre. Possiblement, altres professors també hi han participat i no n'estic al corrent: els demano disculpes.

El llibre s'ha beneficiat de moltes discussions interessants amb els companys del Departament que han impartit l'assignatura, particularment Rolf Tarrach, Eduard Vives, Martí Pi i Lluís Mañosa. Els estic molt agraït. També han estat decisives les preguntes i els comentaris que m'han fet els estudiants mateixos al llarg dels anys, que han representat un gran estímul. Aquesta és la primera edició del llibre i possiblement contingui alguns errors. Estaré molt reconegut als lectors que me'ls facin notar i que aportin comentaris i suggeriments per millorar el llibre. La meva adreça electrònica és: `ortin@ecm.ub.es`.

Vull agrair també l'ajut econòmic del Gabinet d'Avaluació i Innovació Universitària de la Universitat de Barcelona i la correcció exhaustiva del català duta a terme pel Servei de Llengua Catalana de la UB.

El llibre ha arribat a port gràcies a la comprensió i la paciència de la meva esposa i el meu fill, a qui he robat algunes hores en comú. A ells el dedico, com a petita compensació.

Jordi Ortín Rull
Universitat de Barcelona

Barcelona, octubre de 2000

INTRODUCCIÓ A LA SEGONA EDICIÓ

Han passat tres anys des de la primera edició d'aquest llibre, ja exhaurida. Aquesta segona edició és en essència una reimpressió de la primera, en què he aprofitat per corregir les errades que s'hi havien esmunyit. Vagi el meu agraïment als professors Ricardo Mayol, Ignasi Ribas i Joan Solà, que me les han fet notar.

En aquest temps l'assignatura *Fonaments de Física I* no ha experimentat canvis significatius pel què fa als continguts, però s'ha modificat el procediment d'avaluació. Des del curs 2002–03 la part de teoria, que consistia en una prova objectiva, s'ha substituït per tres o quatre exercicis curts, orientats a valorar el nivell de comprensió dels conceptes més importants de l'assignatura. La part de problemes resta inalterada. Pel què fa a la bibliografia recomanada, s'ha adoptat el llibre *Física* de M. Alonso i E.J. Finn (Addison–Wesley Iberoamericana, 1995), publicat en un sol volum, com a llibre de text recomanat.

Confio que els professors de física de primer curs i les futures generacions d'estudiants seguiran trobant útil aquest recull de problemes resolts.

Barcelona, novembre de 2003

ÍNDEX

CAPÍTOL 1

ORDRES DE MAGNITUD I DIMENSIONS

1.1 Ordres de magnitud i escales logarítmiques

(a) El radi del protó és d'uns 10^{-15} m i el radi de l'univers observable és d'uns 10^{26} m. Identifiqueu una distància amb significat físic que estigui aproximadament a la meitat d'aquests dos extrems en una escala logarítmica.

(b) La vida mitjana del pió neutre (una partícula elemental) és d'uns 2×10^{-16} s i l'edat de l'univers és d'uns 10^{10} anys. Identifiqueu un interval de temps amb significat físic que estigui aproximadament a la meitat d'aquests dos extrems en una escala logarítmica.

Definim primer en què consisteix i per a què serveix una escala logarítmica.

- En una escala lineal (ordinària) les magnituds augmenten en progressió **aritmètica**. Així, com es mostra en la figura 1.1, les successives divisions de l'escala corresponen, per exemple, a $-2, -1, 0, 1, 2\ldots$ unitats, a $0, 5, 10, 15, 20\ldots$ unitats, a $200, 300, 400, 500\ldots$ unitats, etc.
- En una escala logarítmica, en canvi, les magnituds augmenten en progressió **geomètrica**. Així, com es mostra en la figura 1.2, les successives divisions de l'escala corresponen, per exemple, a 0,01, 0,1, 1, 10, 100... unitats, a 0,25, 0,5, 1, 2, 4, 8, 16... unitats, etc.

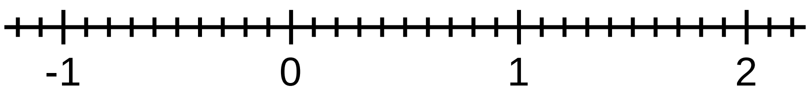

Figura 1.1: Exemple d'escala lineal.

Els valors compresos en una escala lineal són tots del mateix ordre de magnitud. Per contra, els compresos en una escala logarítmica s'estenen a diferents ordres de magnitud. Per això l'escala logarítmica es fa servir per representar propietats que varien fortament en ordre de magnitud, com en els casos que es presenten en l'enunciat.

(a) En el primer cas, considerem longituds en una escala logarítmica que creix en potències de 10. A l'extrem inferior tenim el radi del protó (una de les distàncies més petites mesurables, característica

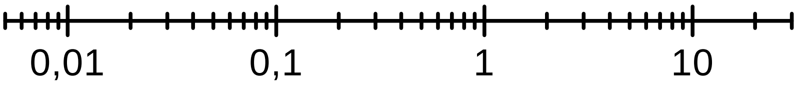

Figura 1.2: Exemple d'escala logarítmica.

del món subatòmic), que és d'uns 10^{-15} m. Aquesta longitud s'anomena també *femtòmetre* o *fermi* i s'escriu fm. A l'extrem superior tenim el radi aproximat de l'univers observable, que és d'uns 10^{26} m. A la meitat de l'interval, entre l'exponent -15 i l'exponent 26, tindrem un exponent 5 (o 6), que correspon a una distància de 10^5 m. Això correspon a 100 km, que és l'ordre de magnitud típic, per exemple, de la separació entre capitals de província a Catalunya.

(b) En aquest segon cas considerem durades temporals, també en una escala logarítmica que creix en potències de 10. A l'extrem inferior tenim la vida mitjana del pió, extremadament curta, d'uns 2×10^{-16} s, i a l'altre extrem tenim l'edat aproximada de l'univers, d'uns 10^{10} anys, que equivalen a:

$$10^{10}\ \text{anys} \cdot \frac{365\ \text{dies}}{1\ \text{any}} \cdot \frac{24\ \text{h}}{1\ \text{dia}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \text{h}} \times \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} \simeq 3 \times 10^{17}\ \text{s}. \tag{1.1}$$

A la meitat de l'interval, entre l'exponent -16 i l'exponent 17, tindrem un exponent 0 (o 1), que correspon a una durada d'1 s, ja que $10^0 = 1$. A Barcelona, on la vida és prou frenètica, aquest és l'ordre de magnitud del temps que passa entre el moment en què el semàfor es posa verd i el cotxe del darrere fa sonar el clàxon.

Observem que els ordres de magnitud intermedis, tant de distàncies com de durades, corresponen a l'escala de les activitats humanes. Això indica que la capacitat de l'home d'abastar l'Univers (l'espai i el temps) ha estat similar en la direcció del petit i del gran.

Lectura recomanada: P. Morrison, *Potencias de 10.* Barcelona: Prensa Científica, 1984.

1.2 Anàlisi dimensional I

Mitjançant una anàlisi dimensional, deduïu, llevat dels factors constants:

(a) La velocitat amb què arriba a la Terra una massa m que cau des d'una altura h a prop de la superfície de la Terra.

(b) El període d'un pèndol simple.

(c) La força gravitatòria F que s'exerceixen dos cossos esfèrics iguals, de massa m, separats una distància r (distància entre centres). La força és proporcional a G, amb $[G] = L^3T^{-2}M^{-1}$, i experimentalment se sap que només depèn de les masses i de la distància entre els seus centres.

L'anàlisi dimensional es basa en una idea senzilla: les lleis de la física no poden dependre de l'elecció arbitrària de les unitats bàsiques de mesura. Una conseqüència directa d'això és que les equacions de la física han de ser dimensionalment consistents: els dos membres d'una equació han de tenir les mateixes dimensions. Si no fos així, ens trobaríem comparant pomes amb patates.

Partint d'aquesta idea, si coneixem les variables de què depen una determinada magnitud (bé perquè en tenim informació experimental, bé perquè podem fer hipòtesis raonables per conèixer-les), l'anàlisi dimensional ens permet obtenir la dependència funcional de la magnitud en qüestió en aquestes variables.

(a) Considerem en primer lloc un objecte de massa m, inicialment en repòs, que es deixa caure verticalment des d'una altura h a prop de la superfície de la Terra. L'experiència quotidiana i el sentit comú ens permeten afirmar que la velocitat final, v, pot dependre de la massa m, de l'altura h i de l'acceleració g amb què la Terra atrau l'objecte —responsable, en definitiva, que l'objecte caigui. En absència de fregament amb l'aire, no esperem que v pugui dependre del volum ni de la forma de l'objecte, ni molt menys que depengui de variables com ara el color de l'objecte, la seva olor, etc. Així doncs:

$$v = v(m, h, g). \tag{2.1}$$

Perquè la dependència sigui dimensionalment correcta, les dimensions dels dos membres han de ser idèntiques. Això s'expressa de la manera següent:

$$[v] = [m]^\alpha [h]^\beta [g]^\gamma, \tag{2.2}$$

on la notació [ ] es refereix a les dimensions de la variable implicada. Per tant:

$$L \cdot T^{-1} = M^\alpha \cdot L^\beta \cdot L^\gamma \cdot T^{-2\gamma}, \tag{2.3}$$

on hem fet servir que les dimensions de velocitat són $L \cdot T^{-1}$ i les d'acceleració són $L \cdot T^{-2}$. Comparant els dos membres de l'equació dimensional, tenim:

$$0 = \alpha, \qquad 1 = \beta + \gamma, \qquad -1 = -2\gamma, \tag{2.4}$$

i, per tant:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{1}{2}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

Així doncs, la dependència de v en m, h i g és de la forma:

$$v \propto m^0 h^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{o sigui,} \qquad v \propto \sqrt{gh}. \tag{2.6}$$

El resultat indica que la velocitat amb què arriba l'objecte és independent de la seva massa. Aquesta és precisament la conclusió a la qual va arribar Galileu al segle XVI, mig segle abans de la teoria de Newton sobre la dinàmica dels cossos en moviment. Segons la llegenda, Galileu es va basar en el resultat dels seus experiments de caiguda de greus des de la torre inclinada de Pisa.

Un càlcul senzill, basat en la conservació de l'energia mecànica, mostra que el resultat exacte és, efectivament:

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{2.7}$$

(b) Considerem ara un pèndol simple format per un fil inextensible, de longitud l i de massa menyspreable, a l'extrem del qual hi ha una petita bola de massa m. El període del pèndol, T, és el temps que triga a efectuar una oscil·lació completa.

De quines variables pot dependre el període? És normal pensar que dependrà dels paràmetres característics del pèndol, l i m, i també de l'acceleració de la gravetat, g, responsable que el pèndol oscil·li. També podria dependre de l'angle que forma el pèndol amb la vertical a l'inici del moviment, α_0. Per tant:

$$T = T\left(l, m, g, \alpha_0\right). \tag{2.8}$$

L'equació dimensional corresponent és:

$$[T] = [l]^\alpha [m]^\beta [g]^\gamma [\alpha_0]^\delta, \tag{2.9}$$

d'on obtenim:

$$T = L^\alpha \cdot M^\beta \cdot L^\gamma \cdot T^{-2\gamma}. \tag{2.10}$$

No apareix δ perquè l'angle α_0 no té dimensions: un angle és un quocient de dues longituds. Així doncs, l'anàlisi dimensional no ens permetrà dilucidar quina és la dependència de T en α_0, si és que existeix. Comparant els dos membres de l'equació dimensional, tenim:

$$0 = \alpha + \gamma, \qquad 0 = \beta, \qquad 1 = -2\gamma, \tag{2.11}$$

i, per tant:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = -\frac{1}{2}. \tag{2.12}$$

En definitiva:

$$T \propto l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{o sigui,} \qquad T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2.13}$$

El resultat exacte, per a petites oscil·lacions (α_0 petit), és:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2.14}$$

Per a oscil·lacions d'amplitud més gran (α_0 més grans), el període passa a dependre de α_0:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\alpha_0^2}{16} + \mathcal{O}\left(\alpha_0^4\right)\right]. \tag{2.15}$$

La notació $\mathcal{O}\left(\alpha_0^4\right)$ indica que els termes corresponents són d'ordre α_0^4 i ordres superiors.

(c) Considerem finalment la força d'atracció gravitatòria entre dos cossos esfèrics de massa m, separats una distància r (distància entre centres). En aquest cas, l'enunciat del problema afirma explícitament que F és proporcional a la constant de gravitació G i que depèn exclusivament de m i r. Tenim, doncs, que:

$$[F] = [G][m]^\alpha[r]^\beta, \tag{2.16}$$

d'on es dedueix que:

$$M \cdot L \cdot T^{-2} = L^3 \cdot T^{-2} \cdot M^{-1} \cdot M^\alpha L^\beta. \tag{2.17}$$

Igualant exponents arribem a:

$$1 = -1 + \alpha, \qquad 1 = 3 + \beta, \tag{2.18}$$

i, per tant:

$$\alpha = 2, \qquad \beta = -2. \tag{2.19}$$

En definitiva, tenim que:

$$F = G\frac{m^2}{r^2}, \tag{2.20}$$

que es coneix com la llei de la gravitació de Newton. En aquest cas, podem escriure una igualtat en comptes d'una proporcionalitat, perquè el membre de la dreta ja conté la constant de proporcionalitat, G (constant de gravitació universal).

1.3 Anàlisi dimensional II

A partir d'una successió temporal de fotos de la primera explosió nuclear, apareguda en la revista *Life*, l'eminent físic anglès G. I. Taylor va poder deduir l'energia emesa en l'explosió fent servir exclusivament l'anàlisi dimensional. Trobeu una expressió de la mida de la bola de foc associada a l'explosió en termes de l'energia total, de la densitat de l'aire i del temps, suposant que només depèn d'aquestes variables.

El fet que es relata en l'enunciat és real. Els responsables de la primera prova nuclear a Nou Mèxic, l'any 1945, no imaginaven que una seqüència temporal de fotografies contingués la informació necessària per deduir l'energia de l'explosió, que es volia mantenir en absolut secret. A G. I. Taylor, que havia emprat l'anàlisi dimensional en els seus estudis d'inestabilitats en fluids, la informació no li va passar desapercebuda.

Taylor va interpretar l'explosió nuclear com una ona de xoc, pràcticament esfèrica, que s'expandia en un medi no pertorbat —ja que la pressió de l'ona expansiva era molt més gran que la pressió de l'aire. Com a tal, $r(t)$ (el radi mitjà de l'ona expansiva associada a l'explosió) depèn exclusivament de l'energia total de l'explosió E, de la densitat de l'aire no pertorbat ρ i del temps t. Aleshores, l'anàlisi dimensional porta a:

$$[r] = [E]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[t]^{\gamma}. \tag{3.1}$$

L'energia té dimensions de força per distància i, al seu torn, la força té dimensions de massa per acceleració. La densitat té dimensions de massa dividida per volum. Per tant:

$$[r] = L, \qquad [E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}, \qquad [\rho] = M \cdot L^{-3}, \qquad [t] = T, \tag{3.2}$$

d'on obtenim:

$$L = M^{\alpha} \cdot L^{2\alpha} \cdot T^{-2\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot L^{-3\beta} \cdot T^{\gamma}. \tag{3.3}$$

Igualant les potències a banda i banda de l'equació, deduïm que:

$$\alpha + \beta = 0, \qquad 2\alpha - 3\beta = 1, \qquad -2\alpha + \gamma = 0, \tag{3.4}$$

i, per tant:

$$\alpha = \frac{1}{5}, \qquad \beta = -\frac{1}{5}, \qquad \gamma = \frac{2}{5}. \tag{3.5}$$

En definitiva:

$$r(t) \propto \left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{1/5}. \tag{3.6}$$

D'aquest resultat es dedueix que si mesurem el radi de l'ona de xoc en diferents instants de temps, els punts experimentals han de caure en una línia recta de pendent unitat, sempre que fem servir coordenades logarítmiques $(5/2)\log r$, $\log t$:

$$\frac{5}{2}\log r = \frac{5}{2}\log C + \frac{1}{2}\log\left(\frac{E}{\rho}\right) + \log t. \tag{3.7}$$

Aquí, C és la constant de proporcionalitat indeterminada a l'equació (3.6). El mateix Taylor i altres investigadors van mostrar que l'estudi d'aquest problema en el marc de la dinàmica de gasos porta que $C \simeq 1.033$ i, per tant, $\log C$ és menyspreable. La gràfica amb el resultat de l'anàlisi de Taylor mostra que els punts cauen efectivament sobre una recta de pendent unitat. De l'ordenada a l'origen d'aquesta recta Taylor va deduir l'energia de l'explosió, que va resultar ser d'uns 10^{14} J. En paraules del mateix Taylor, la publicació d'aquest valor va causar en aquella època una gran torbació en el govern americà.

La dificultat de l'anàlisi dimensional és saber veure quines són les característiques essencials d'un problema donat per tal de definir les variables rellevants del problema. L'elecció de les variables s'ha de basar en el coneixement de la física del problema. Un cop definides les variables i efectuada l'anàlisi dimensional corresponent, s'ha de contrastar el resultat amb les dades experimentals per tal de decidir si la tria inicial és correcta o si cal refinar-la.

Referència original: G. I. Taylor, *The formation of a blast wave by a very intense explosion. Part I. Theoretical discussion. Part II. The atomic explosion of 1945,* Proc. Roy. Soc. London, **A 201** (1950) 159–186.

CAPÍTOL 2

VECTORS

2.1 Producte escalar i producte vectorial

Considereu els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, aplicats a l'origen de coordenades. Expresseu vectorialment que:

(a) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars.

(b) $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són paral·lels.

(c) $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són coplanars (estan continguts en un únic pla).

(a) Dos vectors perpendiculars, aplicats al mateix origen, formen un angle $\alpha = \pi/2$. El producte escalar dels dos vectors, per tant, és:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u\, v\, \cos\alpha = 0, \tag{1.1}$$

que expressa la condició que els dos vectors són perpendiculars. u i v representen el mòdul dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, respectivament.

També podem veure-ho d'aquesta manera: el producte escalar de $\vec{u}$ per $\vec{v}$ és el producte de u (mòdul de $\vec{u}$) per $v \cos\alpha$ (mòdul de la projecció de $\vec{v}$ en la direcció de $\vec{u}$), tal com es veu en la figura 1.1. Si els vectors són perpendiculars, la projecció és nul·la.

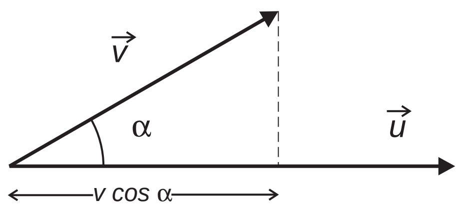

Figura 1.1: Producte escalar de dos vectors.

(b) Dos vectors paral·lels, aplicats al mateix origen, formen un angle $\alpha = 0$. El producte vectorial dels dos vectors, per tant, té mòdul:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = u\, v\, \sin\alpha = 0, \tag{1.2}$$