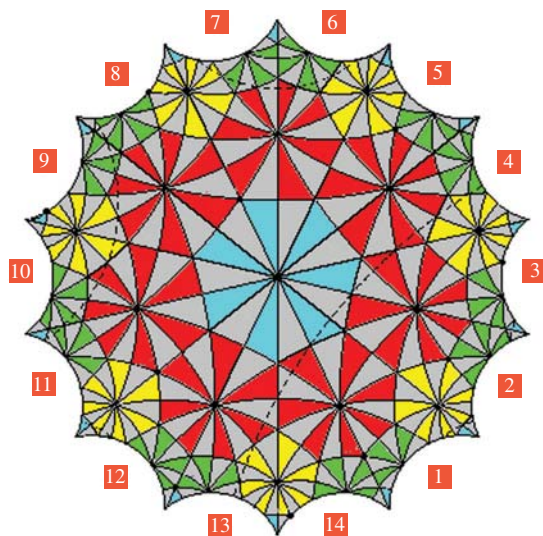




UNIVERSITAT DE BARCELONA

ENSENYAR MATEMÀTIQUES, APRENDRE MATEMÀTIQUES: VARIACIONS SOBRE UN TEMA DE FELIX KLEIN

Lliçó inaugural de la Dra. **PILAR BAYER ISANT**
Catedràtica d'Àlgebra de la Universitat de Barcelona



INAUGURACIÓ DEL CURS ACADÈMIC
2007 · 2008

ENSENYAR MATEMÀTIQUES, APRENDRE MATEMÀTIQUES: VARIACIONS SOBRE UN TEMA DE FELIX KLEIN

Lliçó inaugural de la Dra. **PILAR BAYER ISANT**
Catedràtica d'Àlgebra de la Universitat de Barcelona

INAUGURACIÓ DEL CURS ACADÈMIC
2007 · 2008

Barcelona, 3 d'octubre de 2007



UNIVERSITAT DE BARCELONA



©PUBLICACIONS I EDICIONS DE LA
UNIVERSITAT DE BARCELONA, 2007
Adolf Florensa, s/n; 08028 Barcelona;
Tel. 934 035 442; Fax 934 035 446
comercial.edicions@ub.edu;
<http://www.publicacions.ub.es>

Impressió: Gráficas Rey, S.L.
Dipòsit legal: B-47.165-2007

Motiu de la coberta: Mosaic heptagonal del pla hiperbòlic

*Rector Magnífic de la Universitat de Barcelona,
autoritats,
col·legues,
estudiants,
distingit públic:*

En primer lloc, vull manifestar el meu agraïment al Senyor Rector, el Dr. Màrius Rubiralta, pel fet que m'hagi ofert la possibilitat d'impartir la lliçó inaugural d'enguany. És per a mi un honor, i alhora una responsabilitat que assumeixo de gust, complir el seu encàrrec i adreçar-me a tots vostès per parlar de l'ensenyament de les matemàtiques.

Com que aquest paranimf és sovint seu de concerts, he estructurat la lliçó en forma de *tema amb variacions*: una tècnica de composició musical en la qual un mateix motiu es repeteix amb modificacions en el decurs d'una obra.

En el *tema* evocaré la figura de Felix Klein, un matemàtic de la segona meitat del segle XIX. En les *variacions* tractaré de

- I. L'ensenyament de les matemàtiques**
- II. La utilitat de les matemàtiques**
- III. La pràctica de les matemàtiques**

Abans de començar, però, em permetré llegir-los un conte.

Un conte corrent

Feia calor. El senyor X cercava les ulleres disposat a llegir el diari. La filla gran parlava pel mòbil. El fill mitjà, connectat a uns auriculars, hi era i no hi era. Dins la casa, la seva dona es distreia omplint un sudoku i la filla petita mirava els dibuixos animats.

L'home del temps acabava d'anunciar temperatures altes per als propers dies. Amb el consens necessari —pensava el senyor X—, aquell cap de setmana agafarien el cotxe, GPS inclòs, i anirien d'excursió.

De sobte arribà el fill gran i, interrompent-lo en els seus pensaments, li etzibà:

—Pare, ja m'he matriculat per al curs que ve!

—Ah, sí? Ara t'escolto.

—Sí, m'he matriculat de matemàtiques.

—Molt bé! Així què, vols ser enginyer?

—No, matemàtic.

—Com..., informàtic?

—No!, matemàtic! —insistí el noi.

—Què?, matemàtic?

Fora de si i sense pensar-s'ho, el senyor X es llançà de cap a la piscina.

Cap al tard, a les fosques, envoltat de bates blanques i aparells, el senyor X repetia, desconcertat:

—Matemàtic! Almenys hagués dit economista o advocat...

I. L'ENSENYAMENT DE LES MATEMÀTIQUES

La Declaració de Bolonya, subscrita per 29 països europeus el mes de juny del 1999, determinà l'inici de l'anomenat procés de convergència cap a l'Espai Europeu d'Educació Superior. Un dels seus objectius és que aquest procés es dugui a terme d'una manera harmoniosa i consensuada, a fi de permetre en el futur la mobilitat de l'alumnat i del professorat universitaris en el marc de la Unió Europea.

Ministres d'educació, autoritats acadèmiques i comissions diverses han mantingut des d'aleshores nombroses reunions per a fer front a la complexitat d'uns canvis no exempts de controvèrsies. Comissions internacionals s'ocupen d'analitzar i comparar els sistemes educatius dels diferents països. La constatació d'una disminució en el nombre d'estudiants que opten pels estudis científics ha comportat, a més, la revisió de tot el cicle formatiu.

En el cas de les matemàtiques, a les dificultats inherents al seu aprenentatge, s'afegeix ara un ventall de metodologies i programacions diferents en relació amb la seva docència. Segons estudis duts a terme per comitès de l'OCDE,¹ el nivell en matemàtiques que assoleix l'alumnat espanyol de secundària està per sota de la mitjana europea. Aquesta manca de preparació matemàtica també ha estat detectada reiteradament en les proves d'accés a la universitat.

És palès que no totes les cultures tenen els mateixos interessos ni es proposen assolir els mateixos objectius. No es pot dir que el nostre sigui un país que apreciï especialment les matemàtiques. Sovint, la idea que se'n té és, si no equivocada, confusa, i prové d'experiències personals, no sempre agradables, viscudes en els primers anys d'aprenentatge.

La matemàtica s'expressa en un llenguatge propi i universal a la vegada, però desconegut fora dels àmbits especialitzats, per la qual cosa sovint és qualificada d'abstrusa i allunyada de la utilitat de la vida comuna. Però val la pena constatar que en altres èpoques hi hagué persones que reeixiren a apropar els coneixements matemàtics als seus coetanis. Una d'elles fou Felix Klein (1849-1925).

La figura de Felix Klein és recordada especialment per una concepció unitària de les geometries que, basada en l'estructura algebraica de grup, exposà

1. Vegeu els polèmics informes PISA.

en el seu discurs d'ingrés com a professor de la Universitat d'Erlangen, l'any 1872. La seva obra conté aportacions fonamentals a l'estudi de la geometria hiperbòlica, de les funcions automorfes i, a més, alguns dels seus textos han estat un referent en moviments de renovació pedagògica.²

Quan Klein fou nomenat professor de la Universitat de Gotinga, l'any 1886, comptava 37 anys. Sota la seva direcció, l'Institut Matemàtic d'aquella universitat esdevingué el centre mundial de més renom del seu temps per al cultiu de la matemàtica. Un seguit de joves procedents de països diversos estudiaren en les seves aules, atrets per la qualitat d'un quadre docent que comptava amb Felix Klein, David Hilbert (1862-1943), Hermann Minkowski (1864-1909) i Emmy Noether (1882-1935), entre altres.³ L'any 1895, Klein dirigí la tesi a l'estudiant anglesa Grace Young (1868-1944), i fou aquesta la primera matemàtica a obtenir el títol de doctora per una universitat prussiana.⁴

Les activitats de l'Institut Matemàtic de Gotinga prosseguiren fins l'any 1933, en què la instauració del nacionalsocialisme en provocà la davallada. El seu model influiria en altres institucions americanes, com ara l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton i l'Institut Courant de Nova York, centres que acolliren una part significativa del personal científic europeu durant la Segona Guerra Mundial.

El caràcter formatiu de les matemàtiques no se sol qüestionar. Aprendre matemàtiques és una experiència personal que ningú no pot fer per nosaltres. La seva pràctica serveix per a incrementar la precisió, la constància i la paciència. Ensenyen a reconèixer els errors i a cercar-hi remei. Ensenyen a acceptar solucions alienes quan superen les pròpies. Però, per damunt de tot, recompensen les hores de dedicació: comprendre les regles de càlcul o l'enunciat d'un teorema, o encertar la resolució d'un problema, són actes creatius que impliquen petites descobertes.

2. Felix Klein cursà ciències matemàtiques i naturals a la Universitat de Bonn; es doctorà en matemàtiques per la Universitat de Berlín (1869) i s'habilità per la Universitat de Gotinga (1871). Fou professor de la Universitat d'Erlangen (1872), de l'Escola Tècnica Superior de Munic (1875) i de les Universitats de Leipzig (1880) i de Gotinga (1886).

3. El matemàtic espanyol Julio Rey Pastor (1888-1962), conegut especialment per les seves obres de caràcter didàctic, estudià amb Klein a Gotinga.

4. Prèviament, l'any 1874, la matemàtica russa Sophia Kovalevskaja (1850-1891) també s'havia doctorat per la Universitat de Gotinga, però *in absentia*, sense sotmetre's a l'examen preceptiu. El motiu fou que la Universitat de Berlín, on ella havia desenvolupat la tesi, no preveia encara la possibilitat d'expedir aquests títols a les estudiants.

Assolir una experiència matemàtica, ja sia a l'escola o a la universitat, comporta reviure en el decurs d'una classe, o d'uns dies, processos mentals que la humanitat pot haver tardat segles a descobrir i assimilar. D'ací la necessitat de tenir una bona docència i, alhora, la seva dificultat.

Klein donava molta importància a l'educació matemàtica rebuda en els primers anys d'escolarització. Per afavorir-la, sostenia que el professorat de qualsevol nivell havia de renovar i mantenir al dia els seus coneixements. Conseqüentment, impartí nombrosos cursos adreçats al professorat de secundària. Els apunts dels seus ajudants presos en aquells cursos eren litografiats i distribuïts per al seu ús general. Posteriorment, Klein recopilà aquell material en un tractat en tres volums titulat *Matemàtica elemental des d'un punt de vista superior*, que fou editat entre els anys 1908 i 1913.⁵ Un segle després, aquesta obra se segueix traduint, reeditant i manté el seu encant.^{6, 7}

L'any 1893, Klein promogué a la Universitat de Gotinga la creació de la primera càtedra per a la didàctica de les matemàtiques. En el Congrés Internacional dels Matemàtics celebrat a Roma l'any 1908, Klein fou nomenat president de la Comissió Internacional per a la Instrucció Matemàtica (ICMI).

En l'actualitat, nombroses institucions internacionals han establert fòrums de discussió relatius a la docència de les matemàtiques. S'encarreguen també del disseny de programes d'estímul per a la detecció del talent matemàtic i de l'organització de proves competitives entre el jovent: Proves Cangur, Olimpíades Matemàtiques, etc.⁸

5. L'obra fou editada per Springer. En una de les introduccions, Klein agraeix al segell editorial fundat per Julius Springer (1817-1877) el seu interès en la publicació de textos matemàtics, tot i les dificultats enormes que la tasca els reportava. Actualment, Springer és l'editorial més important de literatura matemàtica.

6. Un dels canvis significatius que Klein impulsà en el currículum de secundària fou la inclusió de les beceroles del càlcul diferencial i integral, tal com es fa avui. Aconsellava fer-ho de manera intuïtiva, deixant per a més endavant l'aprehensió de conceptes abstractes que en un primer moment poden resultar desmotivadors.

7. A la universitat, Klein organitzà nombrosos seminaris per a estudiants a fi d'afavorir-los l'aprenentatge autònom. Procurà que tinguessin una sala d'estudi i, conjuntament amb el matemàtic Hermann A. Schwarz (1843-1921), muntà exposicions amb figures geomètriques orientades a la visualització de conceptes abstractes. Moltes d'aquelles creacions estudiantils encara es poden contemplar en unes vitrines de l'actual Institut de Matemàtiques de la Universitat de Gotinga.

8. No tothom està d'acord en una utilització discriminatòria i competitiva de les matemàtiques (ni de cap altre saber) en les etapes educatives i formatives, tal com ho ha fet notar l'Associació de Dones Europees de Matemàtiques.

La Societat Matemàtica Europea (EMS) i la Societat Matemàtica Americana (AMS) ofereixen informació, en la xarxa, dels nivells de referència per a l'aprenentatge de la matemàtica en cada país. A tall d'exemple, esmentaré que al Japó hi ha preocupació perquè la mainada estudiï per iniciativa pròpia. A Finlàndia, el professorat gaudeix de la màxima llibertat per a l'organització dels continguts curriculars i per a la seva distribució horària. I, com a mostra del món globalitzat en què vivim, els diré que la Universitat de Nova York acaba de publicar uns glossaris de matemàtiques destinats a l'ensenyament secundari traduïts a deu idiomes.⁹

La preocupació per l'ensenyament de la matemàtica ve de lluny. En les universitats medievals, les matemàtiques formaven part de les set arts liberals. L'estudi del *trivium*, integrat per la gramàtica, la lògica i la retòrica era seguit pel del *quadrivium*, integrat per l'aritmètica, la geometria, l'astronomia i la música.

Els matemàtics islàmics es dedicaren en cos i ànima a la recuperació i a la traducció —a l'àrab i a l'hebreu— de textos matemàtics de l'antiguitat grega, alhora que avançaven en la confecció de taules trigonomètriques, en l'estudi de l'astronomia i creaven l'àlgebra.¹⁰

En el Renaixement, els estudis de matemàtiques prengueren un altre caire: els coneixements de càlcul necessaris per a l'art de navegar i per a la pràctica del comerç eren impartits regularment per mestres fora dels àmbits universitaris.¹¹ El gran nombre d'aritmètiques mercantils impreses els segles XV i XVI són una prova fefaent d'aquesta situació.

El *trivium* i el *quadrivium* medievals derivaren en el Renaixement en les facultats d'arts (o de filosofia) i és en el redós d'aquestes on sorgiren les primeres càtedres universitàries europees de matemàtiques. Entre les més antigues figuren la càtedra de matemàtiques de la Universitat d'Aberdeen, a Escòcia (1505), la de la Universitat de Bolonya (1555), la càtedra de matemàtiques i astronomia de la Universitat de Barcelona (1576), la càtedra de geometria de la Universitat

9. Els idiomes són: anglès, àrab, bengalí, castellà, coreà, haitià, kurd, panjabi, rus i xinès.

10. Vegeu Vernet, J.: *Estudios sobre historia de la ciencia medieval*. Universidad de Barcelona, Universidad Autónoma de Barcelona, 1979.

11. Estudis d'astronomia i cartografia foren impartits a la Casa de Contractació de Sevilla, fundada el 1503, i a l'Acadèmia de Matemàtiques i Arquitectura Militar de Madrid, fundada el 1582. Aquesta última institució fou absorbida l'any 1624 pels Reials Estudis de Sant Isidre.

d'Oxford (1619) i la càtedra lucasiana de matemàtiques de la Universitat de Cambridge (1663).

La càtedra lucasiana de matemàtiques deu el seu nom a haver estat un regal del clergue Henry Lucas a la Universitat de Cambridge. El segon titular d'aquesta càtedra fou Sir Isaac Newton (1643-1727), que l'ocupà l'any 1669.¹²

A Barcelona, l'any 1539, el Consell de Cent establí un nou censal de 550 lliures sobre l'impost que gravava la farina a fi de poder prosseguir i acabar la nova seu de l'Estudi General. Aquest es construïa en el tram de la Rambla que amb el temps esdevindria la Rambla dels Estudis. L'Estudi General, antecessor de la Universitat de Barcelona, s'inaugurà aquell mateix any amb quatre càtedres: gramàtica, lògica, filosofia moral, i filosofia política.¹³ Les constitucions de l'any 1559 de la Universitat de Barcelona establiren una universitat amb tres facultats majors: lleis i canons, teologia, i medicina; i una facultat menor: arts. El seu pla d'estudis especificava que en el tercer curs de filosofia de la facultat d'arts s'impartissin, «si quedava temps», la *Metafísica* d'Aristòtil i «algunes lliçons de matemàtiques».¹⁴,¹⁵ Disset anys després de les constitucions del 1559, aquells estudis que s'havien impartit de manera esporàdica foren l'origen de dues càtedres autònomes vinculades a la facultat d'arts: de metafísica, l'una, i de matemàtiques i astronomia, l'altra. Naixia així, l'any 1576, la primera càtedra de matemàtiques de la nostra universitat, en una edat remarcablement primerenca a l'Occident europeu.¹⁶,¹⁷

12. El titular actual de la càtedra lucasiana és el físic Stephen Hawking.

13. A aquestes s'afegiren més endavant càtedres de lleis (1541), grec (1544), retòrica (1544), teologia (1547) i medicina (1551).

14. «[...] e successivament en lo segon i tercer any següent los vuyt llibres de Physica de Aristòtil, y acabats aquells los quatre llibres de Metheoros y los tres llibres Anima, tots de Aristòtil; y sobrant-li temps, en lo terç any, la Methaphysica de Aristòtil y algunes Liçons de Mathemàtiques fins sien acabats dits tres anys.» Ordinacions de 1559.

15. Les lliçons de matemàtiques estigueren a càrrec del gironí Antic Roca, que era el professor titular de la càtedra de filosofia. D'Antic Roca se'n conserva el tractat *Arithmetica por Antich Roca de Gerona compuesta y de varios auctores recopilada: provechosa para todos estados de gentes. Va añadido un compendio para tener y regir los libros de cuenta: traduzido de lengua francesa en romance castellano*. Barcelona, Claudi Bornat, 1565.

16. Al llarg del segle XVI, la càtedra de matemàtiques i astronomia fou ocupada successivament per Josep Micó (1576), Mestre Artiella (1579), Josep Micó (1581), Nicolau Rello (1585) i Bernat Berengari (1593).

17. Les dades d'aquest paràgraf estan extretes de Fernández Luzón, A.: *La Universidad de Barcelona en el siglo XVI*. Tesi. Universitat Autònoma de Barcelona, 2003.

La revolució industrial dels segles XVIII i XIX i les necessitats sorgides al seu entorn comportaren la inclusió de les matemàtiques en els nous sistemes públics d'educació. Després de la derrota de Catalunya en la Guerra de Successió Espanyola (1700-1714), Felip V (1683-1746) clausurà l'any 1717 les vuit universitats catalanes aleshores existents i fundà la Reial i Pontifícia Universitat de Cervera. Com a conseqüència, la represa científica de la Il·lustració estigué lligada en el nostre país a institucions no universitàries. Les matemàtiques foren impartides en la Reial Acadèmia Militar de Matemàtiques de Barcelona (del 1720 al 1802), en l'Imperial i Reial Seminari de Nobles de Santiago de Cordelles (del 1757 al 1764), en la Reial Acadèmia de Ciències Naturals i Arts (del 1764 fins a la segona meitat del segle XIX), i en l'Escola de Matemàtiques de la Junta de Comerç (del 1819 al 1850).^{18, 19}

El segle XIX visqué el naixement de les escoles tècniques, que posaren l'èmfasi en les aplicacions de la matemàtica. En el cas concret de Barcelona, la Reial Acadèmia Militar de Matemàtiques esdevingué, a partir de l'any 1835, l'Escola de Camins, Canals i Ports.²⁰ De les càtedres de la Junta de Comerç sorgí, l'any 1850, l'Escola Industrial. L'any 1837, durant la regència de Maria Cristina de Borbó-Dues Sicílies (1806-1878), tingué lloc el restabliment de la Universitat de Barcelona i, vuit anys després, el 1845, es recuperaren les càtedres de matemàtiques.²¹

Quan es comparen els resultats de l'ensenyament matemàtic del passat amb els del present, cal contextualitzar degudament els diferents marcs socials. En altres temps, només una petita part de la població tenia accés a la instrucció. Actualment, tota la població està escolaritzada i, si bé és cert que un 40 % de l'alumnat que s'examina de matemàtiques en la selectivitat les suspèn, no ho és menys que l'altre 60 % les aprova, posant de manifest uns coneixements que

18. La càtedra de matemàtiques creada per la Junta de Comerç l'any 1819 fou ocupada durant trenta anys per Onofre Novellas (1787-1849). A fi que la ciutat pogués conèixer el grau de preparació assolit pels estudiants, Novellas organitzava periòdicament exàmens públics de matemàtiques, que eren anunciats al *Diari de Barcelona*. És remarcable en la programació d'aquells cursos la presència del càlcul diferencial i integral.

19. Vegeu Barca i Salom, Francesc X.: Aspectes de l'obra manuscrita d'Onofre J. Novellas (1787-1849). *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 11 (1996), 19-32.

20. A partir del 1802, la Reial Acadèmia Militar de Matemàtiques s'havia anomenat Estudis de la Inspecció General de Camins, Canals i Ports.

21. La càtedra de «matemàtiques sublims» (superiors) fou assignada interinament a Onofre Novellas.

requereixen el seu període d'assimilació i que en altres èpoques haurien estat considerats altament especialitzats. Tot això, cal reconèixer-ho, es fa amb la participació de moltes persones.

II. LA UTILITAT DE LES MATEMÀTIQUES

En el transcurs dels segles, persones amb interessos específics han reeixit a posar a punt descobertes matemàtiques, traduint-les en resultats tangibles. Així, resulta paradoxal que mentalitats matemàtiques, genèricament allunyades de preocupacions quotidianes, hagin contribuït des de l'arrel a la resolució de problemes pràctics. Alhora, les matemàtiques han estat utilitzades també amb finalitats militars, cosa de la qual no parlaré.

Quan Klein inicià la carrera acadèmica, la sortida natural dels estudis de matemàtiques era la docència. Però Klein suggerí obrir-los a especialitats més aplicades. D'entrada, els seus punts de vista no foren acceptats per la resta del professorat. Després d'un viatge a Chicago, l'any 1893, i d'haver comprovat que les universitats nord-americanes es finançaven bàsicament amb fons privats, Klein insistí a captar l'interès de la indústria vers la universitat. Començà per l'organització d'un seminari sobre les matemàtiques de les assegurances —que fou un èxit— i promogué la creació de seminaris de geodèsia i d'estadística.

L'any 1898 fou fundada la primera organització alemanya que establí lligams entre la indústria i la universitat: la Societat de Gotinga per a la Promoció de la Física Aplicada. Tant per a Klein com per a Hilbert i Minkowski, la física ofería un camp d'aplicabilitat especialment atractiu per a les matemàtiques. A instàncies de Klein, l'associació fou ampliada al cap d'un any per a incloure-hi les matemàtiques. Matemàtics i físics²² s'implicaren en la docència de cursos avançats i, els anys 20, Gotinga esdevingué un centre mundial per als estudis físicomatemàtics.

Atret per l'èxit assolit en la millora de la formació del professorat de secundària, Klein inicià diversos contactes amb directius d'escoles tècniques amb la intenció de millorar la formació matemàtica del seu personal docent. Però

22. P. Debye (1884-1966), M. Born (1882-1970), G. Herglotz (1881-1953).

aquests intents no prosperaren. Fruit d'aquells contactes, però, fou que enginyers i professors d'escoles tècniques es traslladaren a Gotinga per a incidir en un vessant aplicat dels estudis que s'hi impartien. Així, per mediació de Klein, el matemàtic aplicat Carl Runge (1856-1927) i l'enginyer mecànic Ludwig Prandtl (1875-1953), especialitzat en estudis de turbulència, esdevingueren professors d'aquell centre. Klein aconseguí també col·laboracions de la universitat amb el tècnic del fred Carl von Linde (1842-1934) i amb les indústries Bayer, Krupp i Siemens.

Klein procurà que la Universitat de Gotinga comptés amb tallers adaptats a les classes pràctiques. Un dels primers projectes que s'hi abordaren fou l'electrificació de la Biblioteca de la Universitat. Tot seguit fou proposada l'electrificació de la ciutat, però aquesta idea tan agosarada no prosperà fins al cap de quatre anys.

Des de sempre, les matemàtiques han estat emprades en arquitectura, enginyeria i física, però en els darrers anys el seu camp d'aplicació s'ha estès a totes les ciències. Es troben a l'arrel de les noves tecnologies i formen part dels coneixements que possibiliten la societat de la informació. Aquest canvi de paradigma respon en gran part a la tecnologia. Raonaments matemàtics centenaris, gairebé especulatius per les dificultats de càlcul que els eren inherents, es tradueixen avui en algoritmes prou eficients per mitjà de la programació informàtica.

Si bé les matemàtiques es troben arreu, de tan bàsiques poden passar desapercibudes. Tot seguit esmentaré algunes de les seves aplicacions actuals prenent per fil conductor el conte del principi. De fet, d'aquest en donaré una imatge *homomorfa* que en reveli el contingut matemàtic.

Matemàtiques en la vida corrent

La indústria de l'**automòbil** i l'aeroespacial empen les matemàtiques en la millora dels seus dissenys i en la fabricació dels seus productes.

Programaris nous, basats en geometria diferencial, permeten el càlcul d'estructures arquitectòniques agosarades, que veiem reflectides en la construcció d'**edificis** singulars.

Les matemàtiques són presents en la indústria de l'oci, des de la creació de **dibuixos animats**, videojocs o efectes especials en el cinema, fins al disseny de **trencaclosques** d'entreteniment.

Les matemàtiques intervenen en els sistemes actuals de **reproducció de música**: en el processament i la digitalització de senyals, en la compressió de dades i en la correcció d'errors. Permeten també les transmissions segures per **telefonía mòbil**.

Models basats en la resolució d'equacions diferencials que simulen el comportament de l'atmosfera són emprats en la **predicció del temps**.

Sistemes d'un nombre ingent d'equacions i d'incògnites intervenen en el seguiment de vehicles espacials. Els sistemes de posicionament **GPS** deriven d'un ús específic de l'aritmètica, l'àlgebra i la geometria.

Algoritmes matemàtics són emprats en òptica adaptativa: en telescopis i en microscopis. Actualment, s'investiguen també aquestes tècniques en relació amb la fabricació d'**ulleres** per a la visió humana.

La gestió de les **finances** ofereix vies de col·laboració entre els móns acadèmic i professional. La recerca en estadística i en càlcul numèric s'aplica a la valoració i la cobertura de derivats i a la gestió de carteres.

Eines sofisticades d'anàlisi matemàtica s'utilitzen en la digitalització i l'emmagatzematge de bases de dades ingents utilitzades per la **justícia**.

En el camp **biomèdic**, l'anàlisi matemàtica i la geometria són presents en aparells de diagnosi per la imatge. La biologia molecular se serveix de models matemàtics en l'estudi de processos de divisió i moviment cel·lulars, així com també en la seqüenciació automàtica de l'ADN. El disseny de tractaments per al càncer i de teràpies víriques empra equacions en derivades parcials i programació lineal.

L'ús d'*Internet* ha promogut també noves aplicacions de les matemàtiques: la teoria de grafs és a la base dels cercadors; la intel·ligència artificial és utilitzada en el disseny de filtres; i els productes criptogràfics basats en l'aritmètica fan possible el comerç electrònic segur.

(Desitjo que les consideracions precedents, si li arriben, puguin tranquil·litzar el senyor X.)

Els canvis constants de la vida moderna porten a preguntar-nos si les promocions d'estudiants que surten de les nostres aules posseeixen una preparació escaient i quin futur els espera. Aquesta és també una preocupació de les institucions europees, que veurem reflectida en l'organització i la programació dels nous màsters i dels estudis de doctorat (i, esperem-ho, en els programes d'educació bàsica i obligatòria).

Per al professorat de la nostra facultat, sovint és motiu de satisfacció saber que l'alumnat postdoctoral format aquí treballa en centres universitaris de l'estranger de manera competitiva. Crec, sincerament, que la formació que rep és flexible i no desmereix la que s'obté en estadis similars més enllà de les nostres fronteres —llevat de les dificultats idiomàtiques, que cal vèncer. Però també ens suposa un motiu de tristesa i de preocupació constatar que, anys després, una part important del personal que retorna ha de treballar per sota de les seves possibilitats.

Si l'ensenyament universitari millora dia a dia però la demanda de personal altament qualificat no segueix el mateix ritme, es produeix un desequilibri. El nou model universitari hauria d'incidir en l'apreciació social del valor del coneixement. Independentment, la inserció en el món laboral de les persones s'hauria de poder fer sense malbaratar ni la seva capacitat ni la formació rebuda. Optar per l'excel·lència comporta un esforç continu, la intensificació del diàleg entre la societat i la universitat i la potenciació dels mitjans que l'afavoreixen.²³

III. LA PRÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES

Com que tampoc no es tracta d'angoixar-nos massa des del primer dia del curs, els diré que les matemàtiques, com les humanitats i les creacions més genuïnes de l'esperit humà, poden sobreviure en medis força menys tecnificats i competitius que els exposats fins aquí, perquè —no ho oblidem— moltes obres sublimes del pensament humà foren creades a la llum d'una espelma.

Des de sempre, una part de la humanitat s'ha dedicat al cultiu de les matemàtiques impulsada per forces inexplicables. Les estructures matemàtiques creixen a poc a poc, per la suma d'aportacions individuals, i els coneixements matemàtics cristal·litzen en teories, a punt per al seu ús i per a la seva transmissió a les generacions futures.

Cap capítol de la matemàtica no es pot donar mai per acabat. De sobte, una idea innovadora capgira anys de tradició i provoca avenços inesperats. Les descobertes matemàtiques no caduquen ni passen de moda, sinó que evolucionen. Com que el saber matemàtic és acumulatiu, cal una recerca constant per tal de

23. Vegeu Grau, F. X.; Rubiralta, M.: Universidad, tercera misión. *La Vanguardia*, 31.07.2007.

trobar la manera més adient de transmetre'l a fi que les noves generacions no es vegin aclaparades. La manera més eficaç de transmissió del coneixement matemàtic és l'oral, amb la qual cosa, per sort o per desgràcia, hores de treball personal es transformen sovint en minuts de docència.

En els segles XVII i XVIII, una persona que s'ho proposés podia abastar el saber matemàtic del seu temps, però després, la matemàtica s'ha anat subdividint en més i més branques. La base de dades *MathSciNet* ²⁴ té avui 63 entrades temàtiques principals, que donen lloc a més de 500 entrades secundàries i més de 5.000 entrades terciàries. En l'actualitat, el nombre de revistes matemàtiques que s'hi revisen és 1.800. La base permet accedir a les recensions de més de dos milions d'articles matemàtics.

La pràctica matemàtica no està exempta de perills. L'especialització injustificada pot convertir aquesta ciència en una gran Torre de Babel. Enfront de la recerca del passat, que partia de l'estudi dels clàssics i era feta sense pressa, les pressions i els sistemes actuals d'avaluació estan afavorint una producció de resultats obtenibles a curt termini, fàcilment quantificables.

Klein considerava que les diferents branques de la matemàtica no havien d'evolucionar donant-se l'esquena les unes a les altres, sinó en paral·lel, tractant d'incloure els seus avenços en concepcions generals. Confiava en aquest sentit en el paper unificador que haurien d'assolir conceptes com el de grup i el de funció.

En la seva època d'estudiant de doctorat a Berlín, Klein es féu amic del matemàtic noruec Sophus Lie (1842-1899), aleshores també estudiant. L'estiu del 1870, els dos amics decidiren anar a París per a visitar Camille Jordan (1838-1922). Aquest matemàtic acabava de publicar el *Tractat de les substitucions i de les equacions algebraïques* amb una posada al punt de la teoria de Galois. Klein i Lie quedaren fascinats per les idees d'aquest jove matemàtic.²⁵

Galois havia associat a cada polinomi un grup de substitucions, format per les transformacions algebraïques de les seves arrels i, en traslladar-ne l'estudi al del grup, obtenia la caracterització de les equacions que eren resolubles per radicals. Els matemàtics italians del Renaixement havien descobert fórmules per a la resolució per radicals de les equacions generals de grau tres i de grau

24. *MathSciNet* és una base recopilada per la Societat Matemàtica Americana (AMS).

25. Évariste Galois (1811-1832) havia mort en condicions tràgiques, abans de poder veure publicades les seves recerques.

quatre, però ni ells ni els seus successors havien estat capaços de trobar-ne per a les equacions generals de grau més gran o igual a cinc, malgrat tots els intents. La teoria de Galois explicava el perquè d'aquests suposats fracassos: s'havien estat cercant durant més de 300 anys unes fórmules que no podien existir.

L'estada de Klein i de Lie a París fou molt profitosa i els serví per adonar-se que l'estructura algebraica de grup capta matemàticament el concepte de simetria. Per a Lie, però, el viatge de retorn a casa fou força desagradable. Descobert amb una maleta plena de fórmules i de textos estrangers, el matemàtic noruec fou pres per un espia, empresonat a França i retingut a la presó durant un mes.

Klein i Lie prosseguiren l'estudi dels grups durant tota la seva vida. Lie es concentrà en l'estudi dels grups continus de transformacions d'equacions diferencials. Klein ho féu en els grups discrets de moviments del pla hiperbòlic dits modulars i en les funcions automorfes que en resulten.

L'estudi dels grups modulars i de les funcions associades permeté avançar en el coneixement de les arrels de les equacions. En particular, Klein demostrà que les arrels complexes de les equacions de grau cinquè es poden calcular per mitjà de valors especials de funcions modulars de nivell 5. Per a tal fi, identificà el grup de Galois d'una equació de grau cinquè, general i normalitzada, amb el grup de rotacions d'un icosaèdre, i presentà aquest grup com a quocient de dos grups modulars. Els càlculs necessaris, que són elaborats, foren aplegats per Klein en el llibre *Lliçons sobre l'icosaèdre i la resolució de l'equació de grau cinquè*, publicat l'any 1884.

Vaig escriure l'esborrany d'aquesta lliçó un diumenge a Marsella, en el Centre Internacional de Trobades Matemàtiques del Parc Científic de Luminy. Amb un altre professor i estudiants de postgrau de la casa, hi havíem anat per a conèixer de primera mà la prova recent de les *conjectures de modularitat* de Serre.

El professor Jean-Pierre Serre, doctor honoris causa per la Universitat de Barcelona (2004), havia publicat les conjectures de modularitat ara fa vint anys (1987), recopilant recerques seves i arran de preguntes sorgides en l'estudi de l'equació de Fermat, la més cèlebre de les equacions diofantines.

Un objecte que ha esdevingut fonamental en l'estudi aritmètic de les equacions diofantines és el grup de Galois absolut $G_{\mathbb{Q}}$ del cos dels nombres racionals. Però el coneixement directe d'aquest grup és, ara com ara, inabastable. Dit ras i curt, és un grup que conté massa informació atès que, en particular, codifica totes les lleis de reciprocitat dels nombres.

L'estudi de les lleis aritmètiques de reciprocitat s'inicià a la fi del segle XVIII amb la descoberta de la llei de reciprocitat quadràtica.²⁶ La determinació de les lleis de reciprocitat ciclotòmiques s'obtingué el segle XIX i permeté la demostració del teorema de Fermat per als exponents primers regulars.²⁷ L'existència, però, d'infinitos nombres primers irregulars posava en evidència que calia anar més lluny.

Una manera indirecta de copsar els grups és per mitjà de les seves accions o representacions lineals, és a dir, de les seves imatges *homomorfes* en grups de matrius. Les representacions lineals de G_Q s'anomenen «galoisianes». Tant la llei de reciprocitat quadràtica com les lleis de reciprocitat ciclotòmiques estan associades a representacions galoisianes de dimensió 1.

Les conjectures de modularitat de Serre, **S.1**, **S.2**, versen sobre representacions galoisianes de dimensió 2. La demostració de les conjectures de Serre en un cas molt particular, obtinguda la dècada passada, fou suficient perquè Andrew Wiles pogués assolir la demostració del teorema de Fermat l'any 1995. Com és sabut, la demostració d'aquest teorema restava oberta des de feia més de 350 anys.

La primera conjectura de modularitat afirma que

S.1. Tota llei aritmètica de reciprocitat definida per una representació galoisiana valorada en un grup lineal de dimensió 2 sobre un cos finit, que sigui contínua, irreductible i senar, és calculable a partir dels coeficients de Fourier d'una forma diferencial, pròpia, invariant per l'acció d'un grup modular.

Amb altres paraules, **S.1** posa de manifest que les lleis de reciprocitat dels nombres en dimensió 2 es llegeixen —en el cas senar— a partir dels grups de simetries del pla hiperbòlic i dels invariants analítics estudiats inicialment per Klein i la seva escola.

26. La llei de reciprocitat quadràtica fou estudiada successivament per L. Euler (1707-1783), A. M. Legendre (1752-1833) i C. F. Gauss (1777-1855).

27. El resultat és degut a E. Kummer (1810-1893).

No enunciaré amb precisió la segona conjectura de modularitat.²⁸ N'hi ha prou de dir que **S.2** ha estat fonamental en tota la fase experimental que precedí la prova de les conjectures, atès que proporcionà l'evidència numèrica al seu favor.

La demostració de les conjectures de modularitat de Serre ens ha estat explicada aquest estiu a Luminy al llarg de 60 hores de pissarra per un professorat matemàtic i investigador de 25 universitats i centres de recerca diferents —amb la participació de la nostra. Per primera vegada, s'ha arribat al final de la prova. No es pot afirmar que tornéssim a casa havent abastat totes les fórmules i els detalls de la demostració dels teoremes de modularitat. Però, sí almenys, n'hem après l'estratègia, que implica la connexió de resultats —clàssics i nous— relatius a grups de Lie, espais simètrics, funcions automorfes, anàlisi harmònica, cohomologia cristal·lina, representacions l-àdiques i teoria de deformacions.

No els puc explicar les aplicacions del resultat anterior a la vida corrent, perquè encara no existeixen. Ni tampoc no els puc dir si els teoremes de modularitat recentment obtinguts serviran en un futur per a millorar el coneixement de la natura que ens envolta —potser sí. Però estic convençuda de la seva importància. Amb més d'un segle i moltes contribucions entremig, els teoremes de modularitat prossegueixen les recerques de Klein sobre la quintica i el grup de l'icosàedre i a compleixen amb escreix les expectatives d'aquell matemàtic sobre el paper unificador de certs conceptes matemàtics.

Les facilitats que tenim avui per a accedir a les fonts d'informació i per a comunicar-nos haurien de permetre un diàleg fluid i un progrés constant per a seguir avançant en la creació, l'adquisició i la transmissió de coneixement i en la resolució de problemes sòlids.

Hem parlat de l'ensenyament de les matemàtiques, de la seva utilitat i de la seva pràctica, i d'una figura, Felix Klein, que sobresortí en els tres camps. Per acabar, podem preguntar-nos: com s'ho va fer?

La resposta és senzilla. D'una banda, fixem-nos que les fites de Klein en recerca, gestió i docència s'assoliren en períodes diferents de la seva vida.²⁹ De l'altra, a l'inici de la seva carrera acadèmica, Klein patí una crisi nerviosa per excés de treball que afectà la seva productivitat durant un període de cinc anys.

28. **S.2** prediu de manera òptima el pes de la forma diferencial i el nivell del grup modular que, d'acord amb **S.1**, detecten la representació.

29. Exactament, en l'ordre cronològic invers de l'exposat en aquesta lliçó.

De la seva autobiografia, es desprèn que les seves accions posteriors es regirien per dos principis elementals:

- a.* Perquè un treball sigui efectiu, cal dur-lo a terme sense neguit.
- b.* Perquè la planificació d'una tasca arribi a bon port, cal mesurar amb cura el temps i els mitjans que requereix la seva realització, les seves implicacions, i obrar en conseqüència.

Epíleg

Torno a recordar la situació familiar del conte del principi, però ara per agrair a les famílies la seva renovada confiança en cada inici de curs.

Moltes gràcies per la seva atenció.

TEMA: EXTRETS DE FELIX KLEIN

«Wir verlangen mehr Interesse für die Mathematik, mehr Leben in ihrem Unterricht, mehr Geist in ihrer Behandlung! Es ist ein nur zu verbreitetes Urteil, welches man in Schülerkreisen nicht selten hören kann, daß es auf Mathematik doch nicht ankomme. Das schlimmste ist, daß dieses Urteil häufig kein unrichtiges ist, indem die Mathematik, welche vorgetragen wird, wirklich nicht viel bildende Momente enthält. Statt den eigentlichen Sinn mathematischer Operationen zu entwickeln, statt in der Geometrie das lebendige Anschauungsvermögen auszubilden, wird die Zeit zur Erlernung eines geistlosen Formalismus oder zur Übung in prinziplosen Kunststücken verwandt. Da lernt man mit Virtuosität lange Buchstabenausdrücke zu reduzieren, bei denen niemand sich etwas vorstellt [...] Soll aber der so gebildete Schüler seine Gedanken selbständig entwickeln, [...] so fehlt es ihm an jeder Spur von eigener Initiative.»

*Das Erlanger Programm: Vergleichende Betrachtungen
über neuere geometrische Forschungen (1871).*

«Meine Mutter stammte aus ebenfalls zugewanderten Kreisen der Aachener Industrie. [...] Die Mutter erteilte mir, ihrer starken pädagogischen Neigung folgend, den ersten Unterricht, so daß ich als sechsjähriger mit einigen Vorkenntnissen im Lesen, Schreiben und Rechnen in die Elementarschule eintreten konnte.»

«Schließlich war das gesamte Gebiet mathematischen Lernens von den bescheidenen Anfängen in der Volksschule bis zur höchsten wissenschaftlichen Spezialforschung als ein organisches Ganzes zu erfassen und auszugestalten.»

«Den amerikanischen Anregungen folgend, war es von vornherein meine Absicht, industrielle Kreise für diese Gedankengänge im allgemeinen und für unser Göttinger Institut im besonderen zu interessieren. Obwohl mich hierbei der Gedanke reizte, in unserem überall auf Staatshilfe wartenden Volke einmal aus privater Initiative Ideen zur Verwirklichung zu bringen, lag mir dennoch bedeutend mehr an der befruchtenden gegenseitigen Einwirkung, welche ich mir von der

Zusammenarbeit des stillen Gelehrten und des im praktischen Leben stehenden schöpferisch tätigen Großindustriellen versprach.»

Lebensbilder von eigener Hand (1923)

«It became almost the custom to regard modern mathematical speculation as something having no general interest or importance, and the proposal has often been made that, at least for purpose of instruction, all results be formulated from the same standpoints as in the earlier period. Such conditions were unquestionably to be regretted.

This is a picture of the past. I wish on the present occasion to state and to emphasize that in the last two decades a marked improvement from within has asserted itself in our science, with constantly increasing success.

The matter has found simpler than was at first believed. It appears indeed that the different branches of mathematics have actually developed not in opposite, but in parallel directions, that it is possible to combine their results into certain general conceptions. Such a general conception is that of the *Function*, in particular that of analytical function of the complex variable. Another conception of perhaps the same range is that of *Group*, which just now stands in the foreground of the mathematical progress. Proceeding with this idea of groups we learn more and more to coordinate different mathematical sciences.

The unifying tendency, originally purely theoretical, comes inevitable to extend to the applications of mathematics into other sciences, and on the other hand sustained and reinforced in the development and extension of these latter.»

The present state of Mathematics (1893)

FRAGMENT D'UNA CARTA DE GRACE YOUNG

«The lecture came off yesterday, and if it is a success to interest one twelfth of one's audience I may be said to have achieved one. As to the other eleven I do not know what they thought about it, but May Winston says they were all quite wide awake, which is something that cannot be said for all the preceding lectures. I never felt the pulse of an audience so little, and I was much too nervous to have made any alterations if I had been more aware of how they were taking it. I noticed once that Mr. Woods was wrinkling his eyebrows over one of my figures, and trying to work out a result I had stated as clearly evident. If I had been speaking English I should have stopped and explained more fully, but I had not the nerve to do it then. You see I did not read a written paper, but I just spoke it extempore after two rehearsals, one in the school and one here. I got into one or two hopeless muddles with the German tongue, but I think I was mostly intelligible, and these people are so used to our limping speech that I was sure of sympathy in my attempt.

It took a little over an hour to deliver and there were a good many interruptions, which is always a good sign. Once I had written some equations down and Professor Klein asked me to verify them as there seemed to be discrepancy. Now I did not feel equal to doing any brain work then and there, and for one moment I had a pang of despair; but Dr. Ritter got up and explained that I had rubbed out a minus sign by mistake and I blessed him; that showed he was attending.

Another time Professor Klein asked for an explanation of certain facts, a thing he is very fond of doing. I had been more frightened than anything of his questions, it is so difficult to think on an occasion like that, and although the same thing happens to nearly every one I always think it looks foolish not to be able to answer. The Gods willed on this occasion that my brain should work, and I gave the explanation to my own astonishment, and I fancy, to his too.»

SELECCIÓ D'OBRES DE FELIX KLEIN

- KLEIN, F.: *Das Erlanger Programm: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Verlag Harry Deutsch, Frankfurt/ Main 1995, editat el 1871.
- KLEIN, F.: *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen*. Teubner, Leipzig 1882.
- KLEIN, F.: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, editat per Peter Slodowy. Birkhäuser Verlag Basel, 1993 (Obra original de 1884).
- KLEIN, F. (ed.): August Ferdinand Möbius: *Gesammelte Werke*. 4 Bde. Hrsg. v. R. Baltzer und Klein, F. Nachdruck d. A. Leipzig 1885-1887.
- KLEIN, F.: *The present state of mathematics*. Remarks made at the opening of the Congress on Mathematics and Astronomy on the 21st of August 1893. Chicago. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Bd. 2.K. Springer Verlag, Berlin 1923.
- KLEIN, F.: Über die Entwicklung der Gruppentheorie während der letzten zwanzige Jahre. En el llibre E. Hastings Moore; Oskar Bolza; Heinrich Maschke; Henry S. White (eds.): *Mathematical Papers read by the International Mathematical Congress held in Connection with the World's Columbian Exposition*. Chicago 1893 (Papers Published by the American Mathematical Society - Vol. I), New York (Macmillan and Co.) 1896.
- KLEIN, F.: Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts. En el llibre, Rudin, F. (ed.): *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis zum 11. August 1897*. Leipzig 1898. Reimpressió, Nendeln/Liechtenstein (Kraus Reprint Limited) 1967, S. 300-306.
- KLEIN, F. (ed.): *Gauß' wissenschaftliches Tagebuch*. Mit Anmerkungen. Teubner Leipzig, 1902.
- KLEIN, F.: *Vorlesung über die moderne Entwicklung des mathematischen Unterrichts 1910/11*. Vieweg, Wiesbaden 1996.
- KLEIN, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*. Bd. 1: Arithmetik, Algebra, Analysis. Bd. 2: Geometrie. Vorlesung gehalten im Sommersemester 1908. Bd. 3: Präzisions und Approximationsmathematik.

- Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 14 bis 16
Teubner Verlag Leipzig (1908/09 Nachdruck mit Zusätzen 1911/13).
- KLEIN, F.: *Göttinger Professoren. Lebensbilder aus eigener Hand*. Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen, 5. Jg., Heft 1, 1923, S. 23.
- KLEIN, F.: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. 3 Bände. Bd. 1: *Liniengeometrie. Grundlegung der Geometrie. Zum Erlanger Programm* Bd. 2: *Anschauliche Geometrie. Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie. Zur mathematischen Physik* Bd. 3: *Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen. Hyperelliptische und Abelsche Funktionen. Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen*. Primera edició: Berlin 1921/22/23. Hrsg. v. Fricke, Ostrowski & Vermeil. Springer Verlag, Berlin 1923.
- KLEIN, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. 2 Bde. (GMW, Bde. 24 u. 25) Springer, Berlin, 1926-1927.
- KLEIN, F.: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*. Neu bearbeitet von W. Rosemann. (GMW, Bd. 26) Springer, Berlin, 1928.
- KLEIN, F.: *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion gehalten an der Universität Göttingen im Wintersemester 1893/1894*. (GMW Bd. 39) Springer, Berlin 1933.
- KLEIN, F.; FRICKE, R.: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen modulfunktionen I und II*. Teubner Stuttgart, 1966 (Reimpressió de 1890/92).

AGRAÏMENTS

Agraeixo a Marcel·lí Bayer, Mercè Otero-Vidal, Xavier Pons, Maria Teresa Sucarrats i Artur Travesa les seves encertades observacions arran de lectures prèvies d'aquest escrit.

