TEXTOS DOCENTS

333

MATEMÁTICAS: FICHAS DE LA ASIGNATURA

C. Arenas

Departament d'Estadística

UNIVERSITAT DE BARCELONA

TEXTOS DOCENTS

333

MATEMÁTICAS: FICHAS DE LA ASIGNATURA

C. Arenas

Departament d'Estadística

Publicacions i Edicions

UNIVERSITAT DE BARCELONA

INDICE

LOS NUM3R0S: 1 P0C0 D3 H1ST0R1A

"Los números siempre han formado parte de la vida del hombre para contar cabezas de ganado, el paso de los días etc. Con seguridad fueron los diez dedos de la mano los que dieron lugar al sistema decimal actualmente por todos utilizado, pero otros números no tan conocidos son importantes en la naturaleza y merecen un poco de atención. Vamos a hablar pues del número cero, del número pi, del número de oro y del menos conocido número de plástico."

EL CERO

El número cero es relativamente moderno. No lo conocían ni babilonios, ni chinos, ni egipcios, ni griegos ni romanos. El cero es una "nada" que puede hacer cambiar los números de valor. Así en nuestro sistema de numeración, que es posicional, un 8 representa 8 objetos, pero con un simple 0 se convierte en un 80.

Se sabe que los mayas conocían el cero, pero no lo usaban para realizar cálculos (como harían los hindúes y los pueblos que acuñarían su sistema), sino como símbolo en sus ritos religiosos. Fue en el año 650 cuando en India nació el cero que conocemos. No está claro quien fue su inventor pero grandes matemáticos hindúes, como Aryabhata, Brahmagupta ó Mahariva pusieron los cimientos de la aritmética moderna entre los siglos VI y IX. En el siglo VI, el astrónomo hindú Aryabhata ideó un sistema numérico decimal de nueve cifras, incluyendo la denominada kha (posición). A finales del mismo siglo Brahmagupta posiblemente ideó el símbolo del cero. Tanto él como Mahariva (siglo IX) lo utilizaban para hacer cálculos.

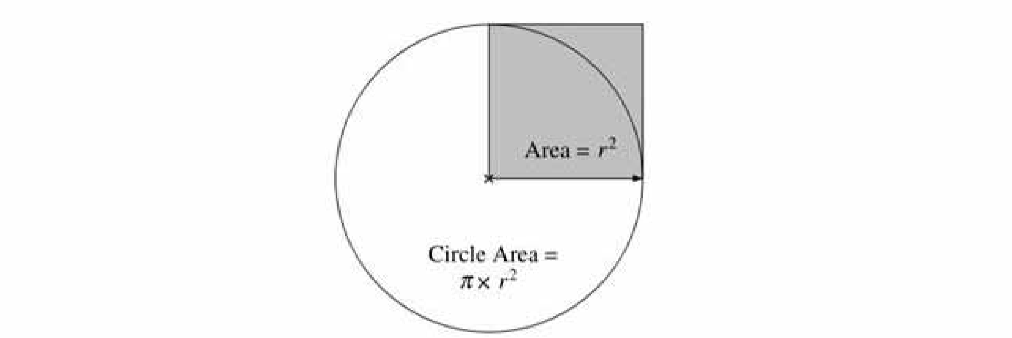
Retrato de Leonardo de Pisa, también llamado Fibonacci

(http://www.mathekiste.de/fibonacci/inhalt.htm)

La primera aparición documentada del cero, data del año 876 y fue descubierta en una inscripción en una piedra (encontrada al sur de Delhi) en la que se describe las dimensiones de un jardín como 187 por 270 hastas (antigua medida hindú, equivalente a unos 45 cm) y su producción, en 50 unidades por día. Lo más curioso es que 270 y 50 aparecen escritos casi como los conocemos en la actualidad. Desde India, los diez dígitos incluido el cero, pasaron a la cultura árabe y de ahí probablemente llego a Italia, extendiéndose por Europa. En 1202, Leonardo de Pisa, también llamado Fibonacci lo describió en su obra "Liber Abaci", alabando su gran utilidad frente al sistema de numeración romano.

EL NÚMERO PI

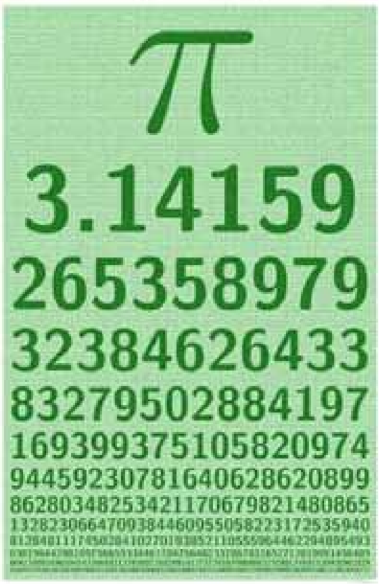
Probablemente es el número más famoso de la historia y representa la relación existente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.



Relación existente entre la longitud de una circunferencia, su diámetro y el numero Pi

(http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Circle_Area.svg)

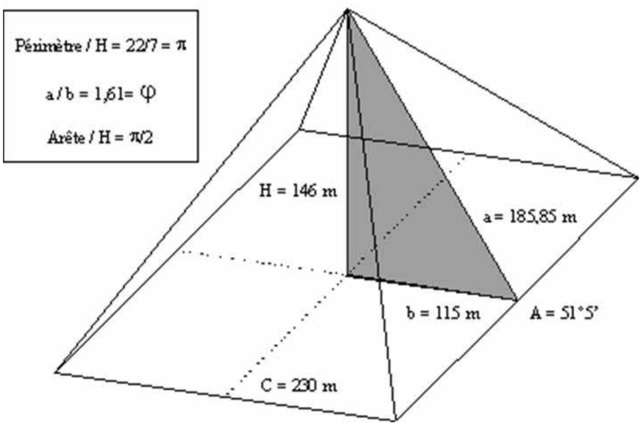
Aunque para la mayoría de la gente pi será siempre tres-catorce-dieciséis, su valor es 3.1415926 5358979323846l... y así hasta el infinito sin que su secuencia de cifras se repita jamás.



Póster representando el símbolo del número pi, así como gran cantidad de sus decimales

(http://unihedron.com/projects/pi/)

Aparece en las gotas de lluvia, las estrellas, los planetas, las burbujas de agua, las ondas de un estanque. Del Libro de los Reyes (s.VI a.C.) se deduce que el valor atribuido en Oriente Próximo a la circunferencia era el 3. Los antiguos egipcios y babilonios sabían que su valor era algo mayor. Y es conocido como el número pi aparece en la construcción de las pirámides.



El numero Pi era utilizado en la construcción de las pirámides egipcias

(http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Esoteris/Image595.gif)

El científico griego Arquímedes de Siracusa, en su obra "Sobre la medida del circulo" se aproximó al cálculo de la longitud de una circunferencia a través de un sistema basado en inscribir una circunferencia en un polígono de 9 lados, afirmando que el valor de pi debía de estar entre 3 10/71 y 3 1/7, expresándolo como fracción ya que los griegos no conocían los decimales. El astrónomo y geógrafo griego Ptolomeo (150 d.C.) equiparó pi a 3.1416. En el siglo V, el matemático y astrónomo Tsu Ch'ung Chi fijó el valor de pi en 355/113, que es exacto hasta la sexta cifra decimal. En 1430 el iraní Jamshid al-Kash escribió en "El tratado de la circunferencia" 14 decimales de pi, una exactitud que en Europa tardaría siglo y medio en superarse. Hacia 1600 el alemán Ludolph van Ceulen calculó, utilizando polígonos de 32000 millones de lados, el valor de pi con 35 decimales. Como homenaje se grabaron las 36 cifras de pi en su tumba, en Leiden. En su honor el número pi también se llama número ludolfino. En 1706 el matemático ingles William Jones propuso el nombre de pi. Parece ser que eligió esta letra griega por ser el equivalente de nuestra p de perímetro. Pero fue en 1748 cuando el suizo Leonhard Euler fijó el empleo de este termino en su obra "Introducción al cálculo infinitesimal". A finales del siglo XIX el matemático ingles William Shanks calculó a mano, tardando 20 años, 707 decimales de pi. En 1945 se detectó un error en su desarrollo y solo las 527 primeras cifras eran correctas. Los informáticos Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi consiguieron superar los 6000 millones de decimales. Dos años más tarde consiguieron los 51000 millones.

EL NÚMERO DE ORO

Su valor numérico es 0.618033988749894848 2l….. y representa una proporción. Supongamos que dividimos una barra de un metro en dos trozos desiguales, de forma que la proporción entre la barra entera y el trozo mayor sea la misma que entre éste y el menor. Justamente esa proporción es el número de oro. Este número aparece en la naturaleza, desde la imbricación de las semillas en ciertas flores hasta la organización de las escamas en las piñas y otros frutos, ó la distribución de las hojas de un tallo. El número áureo es antiquísimo. Su cálculo aparece en las obras de Euclides, matemático griego a caballo entre los siglos IV y III a. C. Pero probablemente, ya en el siglo VI a.C., el filósofo griego Pitágoras, fundador de una secta místico-religiosa dedicada al estudio de las matemáticas, lo investigó. En el arte, la Grecia clásica empezó a considerar la proporción Áurea como la máxima calidad estética de un diseño. El Partenón levantado en la Atenas de Pericles, es una de las primeras manifestaciones de la aplicación del número áureo en la arquitectura.

Partenón, primera muestra de utilización del número de oro en arquitectura (http://archigroup79.persianblog.com/).

Por ejemplo la distancia existente entre las columnas de su fachada es armónica. En el Renacimiento se rescatan las teorías geométricas de Grecia aplicadas a la arquitectura y escultura. La relación entre artistas y matemáticos era muy estrecha. Un ejemplo se encuentra en las figuras de Leonardo da Vinci y el matemático Luca Pacioli, autor de “La Divina proporción”.

FICHA 1: RECORDATORIO

En esta ficha se repasan algunos conceptos básicos como el de conjunto, número, ordenación, valor absoluto, intervalos ó factorial, así como algunas operaciones básicas y las áreas y volúmenes de las principales figuras geométricas.

Conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos. Los objetos de un conjunto se denominan *elementos* del conjunto.

Notación

El elemento x está en el conjunto A $x \in A$

El elemento x no está en el conjunto A $x \notin A$

El conjunto de todos los x que verifican la propiedad P $\{x : P\}$

Clasificación de los números reales **R**

Números naturales (ó enteros positivos) **N** 1,2,3,……

Enteros **Z** 1, -1, 4, 10, -5, -6……

Números racionales **Q** {x: x = *p/q* con *p* y *q* enteros, $q \neq 0$ }

Números irracionales **R \ Q** números reales que no son racionales, así por ejemplo :

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{11}, \pi .$$

Orden en los números

Los números reales están ordenados. Los símbolos $\leq, \geq$ se llaman desigualdades y $<, >$ se llaman desigualdades estrictas.

Algunas propiedades

i) si $a < b$ *y* $b < c$ *entonces* $a < c$.

ii) si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ para tódo número real c.

iii) si $a < b$ *y* $c < d$ entonces $a + c < b + d$.

iv) si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

v) si $a < b$ *y* $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número a es la distancia de a al 0. Se representa por $|a|$ y viene

dado por $\begin{array}{l} |a| = a, \text{si } a \text{ es positivo}, a \geq 0 \\ |a| = -a, \text{si } a \text{ es negativo}, \text{a} < 0 \end{array}$

Si se tiene $|a-c|$ representa la distancia entre a y c siendo su valor

$\begin{array}{l} |a-c| = a-c, \text{si } a-c \geq 0 \\ |a-c| = -a+c, \text{si } a-c < 0 \end{array}$ es decir $\begin{array}{l} |a-c| = a-c, \text{si } a \geq c \\ |a-c| = -a+c, \text{si } a < c \end{array}$

Intervalos

Sea $a < b$,

i) El intervalo abierto (a, b) es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b : $(a,b) = \{x : a < x < b\}$

ii) El intervalo cerrado $[a, b]$ es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b incluyendo los puntos a y b: $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

Otros intervalos son:

iii) $(a, b] = \{ x : a < x \leq b \}$

iv) $[a, b) = \{ x : a \leq x < b \}$

v) $(a, \infty) = \{ x : a < x \}$

vi) $[a, \infty) = \{ x : a \leq x \}$

vii) $(-\infty, b] = \{ x : a \leq b \}$

viii) $(-\infty, b) = \{ x : a < b \}$

ix) $(-\infty, \infty)$ = conjunto de todos los reales.

Factorial de un número

Sea n un entero positivo, el factorial de n es el producto de todos los enteros de 1 a n

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$

Por convenio 0!=1.

Algunas fórmulas básicas

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^{-a} = 1/x^a$$

$$x^{a+b} = x^a x^b$$

$$x^{a-b} = x^a / x^b$$

$$x^0 = 1, x \neq 0$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

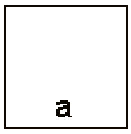
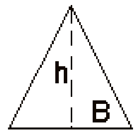
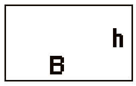
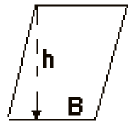
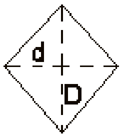
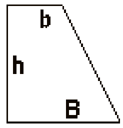
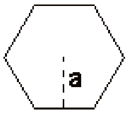
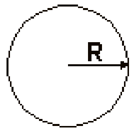
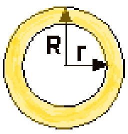
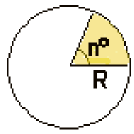
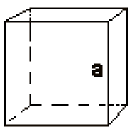
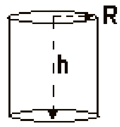
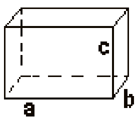
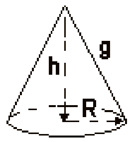
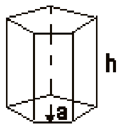
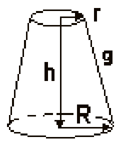
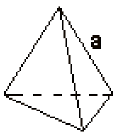
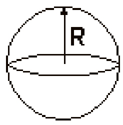
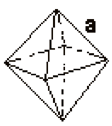
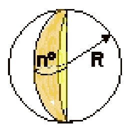
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

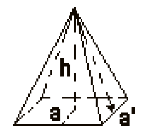
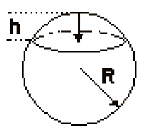
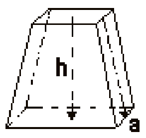
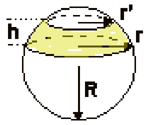
$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^y = y \ln x$$

Si $x = e^y$ entonces $\ln x = y$

Si $x = a^y$ entonces $\ln_a x = y$

TABLA DE ÁREAS Y VOLÚMENES			
	**cuadrado** $A = a^2$	**triángulo** $A = B \cdot h / 2$	
	**rectángulo** $A = B \cdot h$	**romboide** $A = B \cdot h$	
	**rombo** $A = D \cdot d / 2$	**trapecio** $A = (B + b) \cdot h / 2$	
	**polígono regular** $A = P \cdot a / 2$ [(1)]	**círculo** $A = \pi \cdot R^2$ $P = 2 \cdot \pi \cdot R$	
	**corona circular** $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$	**sector circular** $A = \pi \cdot R^2 \cdot n / 360$	
	**cubo** $A = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$	**cilindro** $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (h + R)$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	
	**ortoedro** $A = 2 \cdot (a{\cdot}b + a{\cdot}c + b{\cdot}c)$ $V = a \cdot b \cdot c$	**cono** $A = \pi \cdot R^2 \cdot (h + g)$ [(2)] $V = \pi \cdot R^2 \cdot h / 3$	
	**prisma recto** $A = P \cdot (h + a)$ $V = A_B \cdot h$ [(3)]	**tronco de cono** $A = \pi \cdot [g{\cdot}(r+R)+r^2+R^2]$ $V = \pi \cdot h \cdot (R^2+r^2+R{\cdot}r) / 3$	
	**tetraedro regular** $A = a^2 \cdot \sqrt{3}$ $V = a^2 \cdot \sqrt{2} / 12$	**esfera** $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ $V = 4 \cdot \pi \cdot R^3 / 3$	
	**octaedro regular** $A = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$ $V = a^3 \cdot \sqrt{2} / 3$	**huso. cuña esférica** $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot n / 360$ $V = V_E \cdot n / 360$	

	**pirámide recta** $A = P \cdot (a + a') / 2$ $V = A_B \cdot h / 3$	**casquete esférico** $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ $V = \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot R - h) / 3$	
	**tronco de pirámide** $A = \frac{1}{2}(P+P') \cdot a + A_B + A_{B'}$ $V = (A_B + A_{B'} + \sqrt{A_B} \cdot \sqrt{A_{B'}}) \cdot h/3$	**zona esférica** $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ $V = \pi \cdot h \cdot (h^2 + 3 \cdot r^2 + 3 \cdot r'^2) / 6$	

(1) ***P*** **es el perímetro (suma de la longitud de los lados) ;** ***a*** **es la apotema**

(2) ***g*** **es la generatriz ; √ es la raíz cuadrada del número**

(3) A_B **es el área de la base ;** ***h*** **es la altura ;** ***R*** **y** ***r*** **son los radios ;**