

ECONOMETRIA ACTUARIAL: MATERIAL DOCENT I CASOS PRÀCTICS

Montserrat Guillén
Mercedes Ayuso
Margarita Carrillo

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola



UNIVERSITAT DE BARCELONA



ECONOMETRIA ACTUARIAL: MATERIAL DOCENT I CASOS PRÀCTICS

Montserrat Guillén
Mercedes Ayuso
Margarita Carrillo

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



ÍNDEX

	INTRODUCCIÓ	7
CAPÍTOL 1	EL MODEL DE REGRESSIÓ (I)	9
CAPÍTOL 2	EL MODEL DE REGRESSIÓ (II)	51
CAPÍTOL 3	MÈTODE DELS MÍNIMS QUADRATS GENERALITZATS	77
CAPÍTOL 4	INTRODUCCIÓ ALS MODELS DE VARIABLE DEPENDENT QUALITATIVA I TEMES D'ECONOMETRIA AVANÇADA	107
	BIBLIOGRAFIA	125
	TAULES ESTADÍSTIQUES	131

INTRODUCCIÓ

La creació d'una llicenciatura en Ciències Actuarials i Financeres ha provocat la necessitat d'estructurar els programes de les assignatures per tenir en compte l'especificitat de la formació que rebran els futurs professionals.

Les pàgines que segueixen han estat pensades com a material docent de l'assignatura Econometria Actuarial, que es cursa obligatòriament el darrer any de l'esmentada llicenciatura de la Universitat de Barcelona. Aquest llibre vol suplir la manca de manuals d'econometria dedicats a especialistes en finances i assegurances, no tant des d'un punt de vista de l'aproximació metodològica, sinó des d'una vessant d'aplicació.

Els interessats en la matèria trobaran un bon nombre de manuals d'econometria d'àmplia difusió. Els manuals introdueixen els principals conceptes dels mètodes estadístics i matemàtics que s'utilitzen en el món econòmic i, habitualment, contenen un seguit d'exercicis al final de cada capítol a fi d'insistir en els coneixements introduïts. En l'àmbit més pràctic, trobem excel·lents llibres que mostren l'aplicació de l'econometria, sovint usant programes informàtics que fan molt senzilla la tasca de càlcul, on es posa èmfasi principalment en l'obtenció i la interpretació de resultats, així com en la selecció d'una metodologia adequada al problema.

La nostra experiència ens ha conduït a pensar que el futur actuari o expert en finances i banca no troba en les anteriors fonts bibliogràfiques exemples excessivament propers al que serà la seva futura pràctica professional. Per suplir aquest fet, i des d'un enfocament eminentment aplicat, la descripció de casos d'ús de tècniques econòmiques en l'anàlisi de situacions reals creiem que té una gran utilitat: motiva la introducció de cada tema i mostra els resultats (i limitacions) de la metodologia explicada. Les properes pàgines tenen aquest sentit: donar testimoni de l'ús de l'econometria en l'àmbit actuarial, assegurator, financer i bancari.

Cada capítol consta de quatre parts: la primera part inclou material d'interès per al seguiment de l'assignatura, quadres resum, explicació d'un tema o problemes plantejats; la segona presenta un cas, extret de la bibliografia especialitzada, que serà objecte de discussió a classe; la tercera mostra una petita base de dades per realitzar algun exercici amb ordinador de pràctica dels conceptes que s'han discutit, i, finalment, la quarta part recull un seguit d'exercicis proposats.

Cal fer constar l'agraïment a la primera promoció d'estudiants d'Econometria Actuarial per la seva contribució a gestar el material que es presenta, i a tots els companys del món universitari que l'han millorat.

Barcelona, juliol de 1996

Montserrat Guillén i Mercedes Ayuso
Coordinadores de l'edició de *Econometria Actuarial: material docent i casos pràctics*

CAPÍTOL I

1. EL MODEL DE REGRESSIÓ (I)

Aquest capítol té els apartats següents:

- Hipòtesis bàsiques i mètodes d'estimació.
- Propietats dels estimadors.
- Eines de validació del model.
- Contrast de paràmetres i estimació restringida.

Per a la seva introducció és molt útil examinar, en primer lloc, alguns exemples clàssics d'ús del model en economia. Els quadres resum serveixen com a síntesi dels diferents apartats del tema, però convé comprendre els conceptes a què es refereixen i la deducció de les propietats per a un seguiment adequat. Amb vista a la preparació personal del tema s'inclouen exercicis per resoldre. El cas pràctic d'aplicació es discutirà en grup per afavorir l'intercanvi d'idees i, finalment, una petita base de dades servirà per efectuar una sessió amb ordinadors.

La denominació d'*econometria* va aparèixer per primera vegada els anys 30, quan es va fundar la revista *Econometrica*. Una de les definicions més acceptades de l'abast d'aquesta matèria és la que diu que: "L'econometria és l'estudi de l'aplicació dels mètodes estadístics a l'anàlisi dels fenòmens econòmics."

El model de regressió és una de les eines bàsiques de l'econometria i clàssicament constitueix el primer pas per comprendre el tractament de qüestions empíriques. L'econometria tracta de resoldre el problema de contrastar les hipòtesis teòriques de relacions entre variables econòmiques: relacions entre oferta i demanda, les funcions de cost i de producció, entre d'altres. El cas més senzill es pot examinar amb l'ús d'un model de regressió lineal.

Com es veurà també en l'apartat del cas pràctic, la tècnica que s'introdueix en aquest capítol es pot aplicar també en el context assegurator. Per tant, no hem de pensar en aquests mètodes com a exclusius de l'anàlisi econòmica, sinó que cal aprofundir en la seva aplicabilitat en altres entorns i, fonamentalment en aquest cas, en l'àmbit de les relacions que s'estableixen entre variables financeres o típicament en problemes d'assegurances.

El model de regressió lineal es basa en el concepte de dependència estocàstica entre variables i tracta d'introduir un marc adequat per al seu tractament. El plantejament de contrastos estadístics és precisament inherent al fet que suposa que les relacions entre les variables que s'estudien no són exclusivament deterministes, sinó que involucren un grau d'aleatorietat que podem considerar com a una part de pertorbació que no és possible especificar.

1.1 Material de treball

Els esquemes que es presenten a continuació es dediquen a resumir les nocions principals de les hipòtesis bàsiques del model de regressió.

1.1.1 Hipòtesis bàsiques del model de regressió lineal múltiple (MRLM)

Hipòtesis bàsiques MRLM	Notació matemàtica	Desenvolupament matricial
1. Es defineix una relació lineal estocàstica entre la variable dependent (endògena), les variables explicatives (exògenes) i el terme de pertorbació aleatori del model.	$Y = X\beta + U$ Y: vector columna d'ordre (N*1) format pels valors observats de la variable dependent. X: matriu d'ordre (N*K) de rang K formada pels valors observats de les variables explicatives del model. β: vector columna d'ordre (K*1) format pels coeficients de la regressió (paràmetres del model). U: vector columna d'ordre (N*1) format pels termes de pertorbació aleatoris del model.	$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (N*1)$ $X = \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix} \quad (N*K)$ $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (K*1)$ $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (N*1)$
2. El nombre d'observacions relatives a les variables explicatives del model ha de ser igual o superior al nombre de coeficients a estimar.	$N \geq K$ N: Nombre de dades mostrals. K: Nombre de paràmetres a estimar.	

3. Les variables explicatives del model són deterministes (fixes).		
4. Absència de multicol·linealitat exacta entre les variables explicatives del model.	$\rho(X) = K$	
5. No existeix correlació entre les variables explicatives i el terme de pertorbació aleatori del model.	$E[x_{it}u_i] = 0, \forall i, k; k=1,2,\dots,K$ $i=1,2,\dots,N$	
6. El model se suposa correctament especificat i sense errors (no hi ha omisió de variables rellevants ni inclusió de variables irrelevantes).		
7. S'adopta la hipòtesi de PERMANÈNCIA ESTRUCTURAL: els paràmetres de la regressió són constants tant per al període d'observació com per a la predicció.		
8. El valor esperat del terme de pertorbació del model és zero.	$E[U] = 0_N$ $E[u_i] = 0; \forall i=1,2,\dots,N$	$E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{(N+1)}$

9. El terme de pertorbació del model té variància constant i igual per a totes les observacions (HOMOSCEDASTICITAT).	$\text{Var}(u_i) = E(u_i^2) = \sigma_u^2; \forall i=1,2,\dots,N$	
10. Els termes de pertorbació d'observacions diferents estan incorrelacionats (NO-AUTOCORRELACIÓ).	$\text{Covar}[u_i, u_j] = E[u_i u_j] = 0; \forall i \neq j; i=1,2,\dots,N, j=1,2,\dots,N$	
11. Es diu que la matriu de variàncies i covariàncies del terme de pertorbació és ESFÈRICA quan es compleixen les dues hipòtesis anteriors (9 i 10).	$\text{Var-Cov}[U] = \sigma_u^2 I_N$ $I_N = \text{matriu identitat } (N \times N)$ $\text{Var-Cov}[U] = E[U U^T] = E \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_N \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \dots & u_2 u_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N u_1 & u_N u_2 & \dots & u_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_u^2 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 I_N$	
12. El terme de pertorbació aleatori del model es distribueix segons una llei normal.	$u_i \sim N(0, \sigma_u^2) \quad \forall i=1,\dots,N$ $U \sim N(0, \sigma_u^2 I_N)$	

1.1.2 Principals consideracions sobre el comportament de la variable dependent en l'MRLM

Tenint en compte les hipòtesis bàsiques, la variable dependent (Y) del model presenta les característiques següents:

- * Es defineix a partir d'una combinació lineal en què apareix un terme d'aleatorietat (el terme de pertorbació del model, u_i). Això fa que sigui també un variable aleatòria.
- * Es distribueix segons una llei normal.
- * La relació entre la variable dependent i les variables independents incloses en el model és, en mitjana, determinista:

$$E[Y] = E[X\beta + U] = X\beta + E[U] = X\beta$$

$$E(y_i) = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}; \quad \forall i; i=1,2,\dots,N.$$

- * La seva variància és constant i no depèn dels valors de les variables explicatives (és la variància del terme de pertorbació del model):

$$\text{Var}[Y] = E[Y - E(Y)]^2 = E[(X\beta + U) - X\beta]^2 = E[U]^2 = \sigma_u^2 I_N.$$

- * Els valors per la variable dependent, corresponents a observacions diferents de la mostra, són independents entre si:

$$\text{Covar}[y_i, y_j] = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

- * Matricialment, podem escriure:

$$Y \sim N(X\beta, \sigma_u^2 I_N)$$

1.1.3 Mètodes d'estimació del model de regressió lineal múltiple

Els mètodes més habituals d'estimació de l'MRLM són:

- * Mètode de mínims quadrats ordinaris (MQO)
- * Mètode de màxima versemblança

1.1.3.1 Mètode de mínims quadrats ordinaris

Els estimadors dels mínims quadrats ordinaris (MQO) són aquells que minimitzen la suma, per a tota la mostra, de les diferències al quadrat entre els valors observats de la variable endògena i els estimats per a la mateixa pel model de regressió. D'aquesta forma, els estimadors MQO són aquells que fan mínima la suma de quadrats dels errors (SQE) dins del model.

Per a l'observació i -èsima, sent $e_i = y_i - \hat{y}_i$, l'obtenció del $\hat{\beta}_{i(MQO)}$ implica:

$$\min SCE = \min \sum_{i=1}^N e_i^2 = \min \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Matricialment, podem escriure $e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$; i aleshores l'obtenció del vector d'estimadors MQO, $\hat{\beta}_{(MQO)}$, es dedueix de:

$$\min SCE = \min (e'e) = \min [(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})].$$

D'aquesta forma,

$$\hat{\beta}_{MQO} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Propietats dels estimadors MQO

Suposant que es compleixen les hipòtesis bàsiques de l'MRLM:

* 1a propietat:

- El vector d'estimadors MQO és un vector d'estimadors lineals (combinació lineal de la variable dependent):

$$\hat{\beta}_{MQO} = (X'X)^{-1}X'Y.$$

- El vector d'estimadors MQO és una variable aleatòria:

$$\hat{\beta}_{MQO} = \beta + (X'X)^{-1}X'U.$$

- El vector d'estimadors MQO es distribueix segons una llei normal:

$$\hat{\beta}_{MCO} \sim N [E(\hat{\beta}_{MCO}), Var(\hat{\beta}_{MCO})].$$

*** 2a propietat:**

- El vector d'estimadors MQO és un vector d'estimadors no esbiaixat:

$$E[\hat{\beta}_{MCO}] = \beta.$$

*** 3a propietat:**

- Els estimadors MQO són eficients (òptims): dins el conjunt d'estimadors lineals i no esbiaixats, són els que posseeixen variància mínima (teorema de Gauss-Markov).

$$Var(\hat{\beta}_{MCO}) = E \left([\hat{\beta}_{MCO} - E(\hat{\beta}_{MCO})][\hat{\beta}_{MCO} - E(\hat{\beta}_{MCO})]' \right),$$

$$Var[\hat{\beta}_{MCO}] = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}.$$

$$Var[\hat{\beta}_j] = \sigma_u^2 a_{jj}; \text{ sent } a_{jj} \text{ l'element de la matriu } (X'X)^{-1} \text{ que ocupa la posició } jj.$$

*** 4a propietat:**

- Els estimadors MQO són consistents:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\beta}_{MCO}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma_u^2}{n} \left(\frac{X'X}{n} \right)^{-1} \right] = 0.$$

Donat l'acompliment de les propietats anteriors, el vector d'estimadors MQO és un vector d'estimadors anomenats BLUE (estimadors lineals sense biaix òptims) i consistents, amb distribució de probabilitat:

$\hat{\beta}_{MCO} \sim N [\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1}]$

Anàlisi dels residus MQO

Els residus MQO (e_i) es defineixen com la diferència entre els valors reals de la variable dependent i els valors ajustats pel model de regressió.

$$e_i = y_i - [\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ki}], \quad \forall i=1,2,\dots,N.$$

Matricialment:

$$e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}.$$

Les propietats fonamentals dels residus MQO són:

1. Hi ha ortogonalitat entre les variables explicatives incloses en el model de regressió i el vector de residus MQO:

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} e_i = 0, \quad \forall j=1,2,\dots,k.$$

Matricialment:

$$X'e = 0_{(k \times 1)}.$$

* Si hi ha terme independent dins del model, la suma dels residus MQO és zero:

$$\text{Si } x_{1i} = 1, \forall i=1,2,\dots,N \Rightarrow \sum_{i=1}^N e_i = 0 \Rightarrow \bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^N e_i}{N} = 0.$$

2. El vector de residus MQO és una combinació lineal del vector d'observacions de la variable dependent.

$$e = MY, \quad \text{sent } M = [I - X(X'X)^{-1} X'].$$

3. El vector de residus MQO és una combinació lineal del vector de pertorbacions aleatòries del model.

$$e = MU.$$

4. Davant la presència de terme independent dintre del model de regressió, el vector de residus MQO compleix les propietats següents:

$$* \text{ Esperança nul·la } \Rightarrow E(e) = 0_{(N \times 1)}.$$

$$* \text{Var-Covar } [e] = E [(e - E(e)) (e - E(e))'] = E [ee'].$$

$$E(ee') = \sigma_u^2 M \Rightarrow \text{Covar } (e_i, e_j) \neq 0, \forall i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N.$$

5. El vector de residus MQO és una variable aleatòria ja que és una combinació lineal del terme de perturbació del model. Per tant, la seva distribució de probabilitat és:

$$e \sim N(0_N, \sigma_u^2 M)$$

$$e_i \sim N(0, \sigma_u^2 m_{ii}), \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Estimació de la variància del terme de perturbació

A partir dels residus MQO,

$$E(e'e) = \sigma_u^2 (\text{tr} M) = \sigma_u^2 (N - K)$$

D'aquesta forma, és possible demostrar que:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'e}{N - K}$$

I finalment es pot obtenir directament l'estimació de la variància dels estimadors MQO:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_{MCO}) &= \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} \\ \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_{jMCO}) &= \hat{\sigma}_u^2 a_{jj} \end{aligned}$$

Càlcul de la suma dels quadrats dels errors (SQE)

Segons les propietats dels residus MQO:

$$* \boxed{SQE = e'e = Y'M'MY = Y'MY}$$

$$* \boxed{SQE = e'e = U'M'MU = U'MU}$$

$$* \boxed{SQE = e'e = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y = Y'Y - \hat{Y}'\hat{Y}}$$

A partir de l'última expressió, en la qual suposem la presència de terme independent en el model, podem assenyalar que la diferència entre la suma dels quadrats dels valors reals de la variable dependent i la suma dels quadrats dels valors de la variable dependent explicats pel model de regressió (dependent ajustada) és la suma de quadrats dels errors o suma residual.

1.1.3.2 Mètode de màxima versemblança

Els estimadors de màxima versemblança (MV) són aquells valors dels paràmetres per als quals la mostra donada (les dades o observacions) seria la més probable. D'aquesta forma, els estimadors de màxima versemblança són aquells que maximitzen la funció de versemblança, basada en les característiques distribucionals del terme de pertorbació del model.

A partir del model: $Y = X\beta + U$, l'aplicació del mètode de màxima versemblança suposa establir una sèrie d'hipòtesis:

1. Amb relació al terme de pertorbació del model (U).

Els termes de pertorbació aleatòria del model es distribueixen segons una llei normal, amb valor esperat nul i variància constant:

$$f(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} [u_i - E(u_i)]^2 \right\}.$$

$$* E(u_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \Rightarrow f(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} [u_i]^2 \right\}; \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

$$* \text{Var}(u_i) = \sigma_u^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Matricialment, per al vector $U_{(N \times 1)}$ direm que:

* El vector d'esperança del terme de pertorbació és zero:

$$E(U) = 0 \Rightarrow E \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

* Sota les hipòtesis d'homoscedasticitat i de no-autocorrelació entre els termes de pertorbació de les diferents observacions, la seva matriu de variàncies i covariàncies és:

$$\text{Var-Cov}[U] = E[UU'] = \sigma_u^2 I_N.$$

* El vector $U_{(N \times 1)}$ es distribueix segons una llei normal multivariant de dimensió N, de forma que la funció de densitat conjunta té l'expressió:

$$f(U) = f(u_1, u_2, \dots, u_N) = f(u_1) f(u_2) \dots f(u_N) = (2\pi)^{-N/2} (\sigma_u^2)^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} U'U \right\}.$$

2. Amb relació a la matriu de variables explicatives (X):

És una matriu fixa d'ordre (N*K), sent "N" el nombre de observacions mostrals i "K" el nombre de variables explicatives.

3.- Amb relació al vector de variables dependents:

El vector $Y_{(N \times 1)}$ es distribueix segons una normal multivariant de dimensió N i la seva funció de densitat conjunta és la mateixa que la trobada per al vector de termes de pertorbació aleatòria del model. Es pot demostrar que:

$$f(Y) = f(U) = (2\pi)^{-N/2} (\sigma_u^2)^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} U'U \right\}.$$

* Per tant, segons les hipòtesis anteriors, la FUNCIO DE VERSEMBLANÇA és:

$$L(Y; \beta, \sigma_u^2) = (2\pi)^{-N/2} (\sigma_u^2)^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} (Y - X\beta)' (Y - X\beta) \right\}$$

i els estimadors de màxima versemblança (MV) de β són aquells que la maximitzen, donades les observacions de la variable dependent i de les variables explicatives.

D'aquesta forma, si es calcula:

$$\frac{\partial L(Y; \beta, \sigma_u^2)}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln L(Y; \beta, \sigma_u^2)}{\partial \beta} = 0,$$

s'obté el vector d'estimadors de màxima versemblança:

$$\hat{\beta}_{MV} = (X'X)^{-1} X'Y$$

Propietats dels estimadors dels paràmetres de la regressió per màxima versemblança

* 1a propietat:

Si es compleix la hipòtesi de normalitat en la distribució del terme de pertorbació, l'estimador $\hat{\beta}_{MV}$ és igual a l'estimador $\hat{\beta}_{MQO}$.

* 2a propietat:

Com a conseqüència de la propietat anterior, podem afirmar que l'estimador dels paràmetres obtingut per màxima versemblança no té biaix:

$$E[\hat{\beta}_{MV}] = \beta = E[\hat{\beta}_{MQO}].$$

* 3a propietat:

La matriu de Var-Cov poblacional del vector d'estimadors és:

$$\text{Var-Cov} [\hat{\beta}_{MV}] = \text{Var-Cov} [\hat{\beta}_{MQO}] = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}.$$

Anàlisi dels residus de l'estimació de màxima versemblança

Els residus de l'estimació de màxima versemblança ($e_{i, MV}$) es defineixen com la diferència entre els valors observats per a la variable dependent i els valors ajustats obtinguts amb l'estimació:

$$e_i = y_i - [\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ki}] \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Matricialment,

$$e_{MV} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}_{MV}$$

i com que $\hat{\beta}_{MV} = \hat{\beta}_{MQO}$, es complirà:

$$(Y - X\hat{\beta}_{MV})' (Y - X\hat{\beta}_{MV}) = (Y - X\hat{\beta}_{MQO})' (Y - X\hat{\beta}_{MQO}).$$

$$\boxed{e'_{MV} e_{MV} = e'_{MQO} e_{MQO}}$$

Estimació de la variància del terme de pertorbació

A partir de la funció de versemblança $[L(Y; \beta, \sigma_u^2)]$, calculant:

$$\frac{\partial L(Y; \beta, \sigma_u^2)}{\partial \sigma_u^2} = \frac{\partial \ln L(Y; \beta, \sigma_u^2)}{\partial \sigma_u^2} = 0,$$

obtenim l'estimació de la variància del terme de pertorbació mitjançant l'expressió:

$$\boxed{\hat{\sigma}_{u, MV}^2 = \frac{e'e}{N}}$$

És important assenyalar que l'estimador de màxima versemblança de la variància del terme de pertorbació aleatori del model difereix de l'estimador obtingut per mínims quadrats ordinaris:

$$\hat{\sigma}_{u, MV}^2 \neq \hat{\sigma}_{u, MQO}^2.$$

La matriu de Var-Cov estimada per als paràmetres del model seguirà, com per als MQO, l'expressió:

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_{MV}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1}$$

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_{jMV}) = \hat{\sigma}_u^2 a_{jj}.$$

No obstant això, el fet que $\hat{\sigma}_{u, MV}^2 \neq \hat{\sigma}_{u, MQO}^2 \Rightarrow \hat{Var}(\hat{\beta}_{MV}) \neq \hat{Var}(\hat{\beta}_{MQO})$. Per tant, solament parlant en termes *asimptòtics*, podem dir que:

$$\frac{e'e}{N} \approx \frac{e'e}{N-K} \Rightarrow \hat{\sigma}_{u, MV}^2 \approx \hat{\sigma}_{u, MQO}^2 \Rightarrow \hat{Var}(\hat{\beta}_{MV}) \approx \hat{Var}(\hat{\beta}_{MQO}).$$

Propietats asimptòtiques dels estimadors de màxima versemblança

* **1a propietat:** són no esbiaixats $\Rightarrow E(\hat{\beta}_{MV}) = \beta$.

* **2a propietat:** són consistents $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Prob \hat{\beta}_{MV} = \beta$.

* **3a propietat:** són asimptòticament eficients, és a dir, tenen variància mínima en el conjunt d'estimadors sense biaix.

* **4a propietat:** es distribueixen asimptòticament segons una normal.

Per tant, asimptòticament es compleix:

$$\boxed{\hat{\beta}_{MV} \sim AN(\beta, R^{-1})}; \text{ sent } R = -E \left[\frac{\partial^2 L n L}{\partial \beta \partial \beta'} \right].$$