

Introducció a la metodologia de la Matemàtica

Josep Pla i Carrera



INTRODUCCIÓ A LA METODOLOGIA DE LA MATEMÀTICA

Josep Pla i Carrera

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



INTRODUCCIÓ A LA METODOLOGIA DE LA MATEMÀTICA

Començat el dia 1 d'agost de 2000
Acabat el dia 30 de juliol de 2005

JOSEP PLA I CARRERA
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Justificació

En aquest segle que, suara, comença —el segle XXI—, molts avenços tecnològics són fruit, més o menys directes, d'un llenguatge humà: el *llenguatge matemàtic*. Curiosament, cada cop més també, a causa potser de l'ímpetu creixent de la immediatesa de la imatge i a les seves possibilitats, s'eclipsa el valor indiscutible del llenguatge —sigui de la naturalesa que sigui, natural, simbòlic, científic, musical, etc.— i, de retruc, la precisió en la comprensió intel·lectual de les idees, que són la bastida indiscutible de qualsevol progrés fonamental de l'esperit humà. Tot això ha tingut un efecte nociu molt fort en l'aprenentatge de la matemàtica, sobretot en els estudiants de nivell mitjà que, en arribar al nivell superior, volen dedicar-se a aprofundir-ne la teoria i també aquells d'altres que volen aprofundir-ne les aplicacions en d'altres ciències i àmbits.

La matemàtica no és simplement un llenguatge, com voldrien fer-nos creure els *logicistes* més radicals. És molt més. Però no fóra res, o en tot cas no fóra tan potent com és, si no estigués estructurada damunt d'un llenguatge precís que cal aïllar i aprendre a poc a poc, com també, a poc a poc, aprenem el llenguatge natural.

En aquests moments que, sota la influència de Bolonya com a ressò de la influència que tingué en èpoques pretèrites —fou la primera ciutat que, al segle XIII, tingué Universitat—, els països que componen la Comunitat Europea plantegen la necessitat d'elaborar plans d'estudis comunitaris nous, basats en l'*adquisició d'habilitats*. I personalment crec fermament que no és possible bastir cap habilitat matemàtica seriosa si, d'antuvi, no aconseguim dominar-ne, des del començament, el llenguatge bàsic: *principis i lleis lògiques*, i la *teoria intuïtiva de conjunts*.

Aquesta és la raó i la justificació d'aquestes lliçons d'*Introducció a la Metodologia de la Matemàtica*. No pretenc pas ser pedant ni tampoc paternalista. Vull simplement *ser didacte* en el sentit com personalment entenc l'aprenentatge de la matemàtica. Per aquesta raó baso l'exposició en una presentació evolutiva en espiral, començant per les intuïcions més elementals i pujant, a poc a poc, cap a una formulació més teòrica. És una exposició pretesament repetitiva. Els conceptes i els exercicis es retroben una vegada i una altra en una evolució teòrica i conceptual més elaborada i avançada. Perquè, com s'ha dit, “quan era petit pensava com un infant, però ara que m'he fet gran, penso com una persona adulta”, o, en tot cas, m'agradaria pensar com si ja fos adulta o adult.

L'exposició es fonamenta en moltes explicacions, potser massa extenses en un text de matemàtiques, i alhora també en observacions que, en una primera lectura, poden passar desapercebudes. A més, el text està farcit d'exercicis —alguns dels quals, de fet, són problemes, és a dir la seva comprensió i/o resolució és força més complexa del que correspon a un exercici. Van acompanyats d'indicacions tan àmplies com he cregut convenient —en el benentès que es tracta d'un text iniciàtic— perquè puguin ser resolts pel lector interessat a aprendre. L'objectiu final d'un exercici i/o problema és que sigui resolt. Cal fer-lo, com sigui —sempre de forma correcta, és clar!—, però cal fer-lo. I, a més, cal fer-ne tants com calgui per anar-se habituant a usar amb facilitat però, sobretot, a comprendre amb claredat les nocions matemàtiques que en ell s'involucren. Cal —com un flautista, un pianista, un violinista, un intèrpret en general— exercitar els dits tocant i tocant, fent escales, introduint-se amb peces senzilles, arriscant-se amb obres més elaborades i complexes, tantes vegades com calgui perquè la música flueixi amb naturalitat gairebé sense pensar-hi, de forma aparentment intuïtiva i natural. Aquesta impressió és errònia. De fet, en cada interpretació cal una gran concentració que, ajudada per la pràctica quotidiana, provoca en el que escolta la melodia una sensació de *naturalitat*. Per això m'ha semblat adequat redactar-los en segona persona, adreçant-me directament al lector interessat amb una certa complicitat i companyerisme.

És, doncs, amb l'esperança i el desig que aquestes lliçons puguin contribuir a aquest planteig nou de l'ensenyament de la matemàtica i contribuir en la implantació correcta que he elaborat, a les portes de la meva jubilació, aquest text, a Tamariu (Girona), durant els mesos d'agost des de l'any 2000 fins al 2004.

JOSEP PLA I CARRERA
31 d'agost de 2004

Voldria agrair a la Marta Martínez Ripoll la dedicació, paciència i professionalitat amb què ha corregit les meves mancances lingüístiques i al Servei de Publicacions de la UB que havia editat el text amb tanta cura.

Índex

I	1
1 Introducció heurística	3
1.1 Introducció heurística geomètrica	3
1.2 Introducció heurística numèrica	19
1.3 Fal·làcies	30
2 Introducció metodològica	43
2.1 Una metodologia per resoldre problemes	43
2.1.1 Qüestions teòriques aptes per a la reflexió	44
2.1.2 Qüestions pràctiques aptes per a l'aprenentatge	47
2.2 Una metodologia per demostrar teoremes	52
2.2.1 Qüestions teòriques aptes per a la reflexió	52
2.2.2 Qüestions aptes per a l'aprenentatge	57
2.2.3 Algunes tècniques de demostració	61
II	73
3 El llenguatge de la matemàtica	75
3.1 El concepte de veritat	75
3.1.1 La veritat i les proposicions	76
3.1.2 Les condicions necessàries i suficients	83
3.1.3 La importància de les definicions	86
3.1.4 Els quantificadors lògics	90
3.1.5 El signe de la igualtat	101
3.2 Alguns mètodes clàssics de demostració	103
3.2.1 El mètode de reducció a l'absurd	103
3.2.2 El mètode del contrarecíproc	109

3.2.3	Demostracions diverses: d'unicitat, de màxims i mínims, etc.	110
3.3	Exercicis de recopilació	111
4	Els sistemes numèrics i llurs propietats	121
4.1	El sistema dels nombres naturals	121
4.1.1	La lògica dels nombres naturals	123
4.1.2	Les taules de sumar i de multiplicar. Els algorismes de càlcul	132
4.1.3	Alguns resultats essencials de l'àritmètica dels nombres naturals	137
4.1.4	L'axiomàtica de Peano dels nombres naturals	143
4.1.5	Les operacions aritmètiques de $\mathbb{N}$	156
4.1.6	Lleis bàsiques del conjunt dels nombres naturals	162
4.2	El conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters	166
4.3	El conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals	175
4.3.1	Els nombres racionals i llur expressió decimal	180
4.3.2	El mètode de Sylvester de representació dels nombres fraccionaris	184
4.4	L'axiomàtica del conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals	187
4.4.1	Potències enteres	195
4.4.2	Les potències d'exponent fraccionari	198
4.4.3	L'expressió decimal dels nombres irracionals	199
4.4.4	Concepte d'interval, de valor absolut i de distància	201
4.4.5	El pla cartesià $\mathbb{R}^2$	204
4.5	Els nombres complexos	207
4.5.1	Multiplicació i divisió de nombres complexos en forma trigonomètrica	209
4.5.2	Les n arrels n -àries d'un nombre complex	210
4.5.3	El teorema fonamental de l'àlgebra	213
4.5.4	Algunes qüestions relatives als nombres complexos	215
4.6	Exercicis de recopilació	217
III		223
5	Una teoria naïve de conjunts	225
5.1	El llenguatge bàsic	225
5.2	Conceptes bàsics de la teoria naïve de conjunts	229

5.2.1	Definició de subconjunt	229
5.2.2	El conjunt buit	230
5.2.3	Intersecció, unió, diferència, complementari, i diferència simètrica	231
5.2.4	El parell ordenat i el producte cartesià	239
5.2.5	El conjunt parts d'un conjunt o conjunt potència d'un conjunt	241
5.2.6	Unió i intersecció de famílies de conjunts	242
5.3	Relacions	244
5.3.1	Les relacions binàries	244
5.3.2	Relacions d'equivalència	247
5.3.3	Relacions d'ordre	258
5.4	Les aplicacions i les funcions	262
5.4.1	Aplicacions injectives i exhaustives	269
5.4.2	Aplicació inversa i composició d'aplicacions	272
5.4.3	Operacions aritmètiques entre funcions	274
5.5	Operacions binàries	279
5.6	Els morfismes	282
5.7	Les estructures algèbriques més corrents	284
5.8	El cardinal d'un conjunt finit	286
5.9	Equipotència de conjunts i cardinal	291
5.10	Exercicis de recopilació	301
6	El llenguatge conjuntista	317
6.1	Els axiomes de la teoria ZF de conjunts	317
6.2	Relacions binàries	328
6.3	Relacions d'ordre, d'equivalència i particions	331
6.4	Aplicacions i funcions	334
6.5	L'axioma de l'infinit i els nombres naturals	339
6.6	Els axiomes més sofisticats de la teoria ZF	345
6.7	Exercicis de recopilació	352
IV		357
7	Els conjunts $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$	359
7.1	El conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters	359
7.2	Un xic de divisibilitat en $\mathbb{Z}$	366
7.3	Una mica d'anàlisi combinatòria	373

7.4	El conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals	382
7.5	Aproximació heurística al conjunt $\mathbb{R}$	387
7.6	Construcció conjuntística del cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals	396
7.7	El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos	408
7.7.1	La subtilitat i inutilitat dels nombres complexos	408
7.7.2	La necessitat dels nombres complexos	409
7.7.3	Algunes consideracions finals sobre els complexos	421
7.8	Exercicis de recopilació	423
8	Bibliografia	439

Capítol 1

Introducció heurística

El procés d'aprenentatge de la matemàtica no el podem deslligar del procés de *descoberta matemàtica*. Per això, des de bon començament, cal posar de manifest el fet següent. Hi ha un entremat molt íntim, i difícilment separable, entre *fer* i/o *calcular* i *demostrar*, és a dir establir rigorosament.

1.1 Introducció heurística geomètrica

Com van observar els matemàtics grecs, la matemàtica consta de dues menes d'entitats ben diferenciades: els *problemes*, que cal *resoldre*, i els *teoremes*, que cal *demostrar*. Aquest fet l'exposa amb tota claredat Pappos d'Alexandria, al capítol III de la *Sintaxi Matemàtica*.¹ Per als matemàtics grecs resoldre un problema era equivalent a fer una construcció geomètrica. Establir un teorema era sinònim de donar-ne una demostració rigorosa basada en uns postulats ben establerts i en l'ús d'unes lleis de deducció precises i acceptades d'avant mà pel col·lectiu dels geòmetres.

Per tal de comprendre amb claredat el significat d'aquestes paraules ens fixarem en la proposició 1 del llibre I dels *Elements* d'Euclides.²

Teorema

Fer un triangle equilàter de costat $\overline{AB}$, donat.

Abans de resoldre aquesta qüestió, aturem-nos un moment i reflexionem una mica. La proposició consta de dues parts:

¹Pappos d'Alexandria [~IV]. Vegeu VERA, F. [1970], II, 925.

²Euclides [~330–275 aC]. Vegeu VERA, F. [1970], I, 705–706.

1. Fer un triangle equilàter
2. de costat $\overline{AB}$, donat d'avantmà.

En la part (1) sorgeixen dues qüestions que cal tenir ben clares des del començament:

- (1a). Què és un triangle equilàter?
- (1b). Com es fa, en l'àmbit de la geometria, un objecte geomètric?

- (1a) Per saber “què és un triangle equilàter”, prèviament l'hem d'haver *definit*. Aquí apareix el concepte de *definició*. Com observà, al segle IV aC, el filòsof grec Aristòtil,³ aquest concepte és *clau* en un desenvolupament ben fonamentat de la matemàtica.

En matemàtiques no ens poden referir a res que prèviament no hàgim definit. És a dir, a res del qual no n'hàgim precisat les característiques bàsiques, aquelles que fan que sigui allò que és i que, per tant, no es pugui confondre amb cap altre objecte matemàtic.⁴

Definició

Un *triangle equilàter* és una figura geomètrica feta amb tres segments rectilinis iguals que, dos a dos, s'uneixen pels seus extrems. □⁵

O bé,

Definició

Un *triangle equilàter* és un triangle que té els tres costats iguals.⁶ □

Ens trobem que, en una definició, hem de recórrer sempre a d'altres ens i/o conceptes matemàtics o bé prèviament definits, o bé indefinibles però bàsics.

³Aristòtil [384–322 aC]. Vegeu HEATH, sir T. [1931], edició de 1963, 38, 92, 174–175, 195, 216–217; HEATH, sir T. [1908], edició de 1956, 143–151; o VITRAC, B. [1990], I, 125–133.

⁴Els ens matemàtics existeixen? Aquesta pregunta ens portaria a analitzar el *platonisme* versus el *formalisme*.

⁵Usarem □ per indicar el final de les definicions.

⁶Vegeu *Elements* d'Euclides, llibre I, definicions 19, i 20, a VERA, F. [1970], I, 703.

Observació. Això comporta una dualitat. O bé no és possible definir res de res perquè sempre cal haver definit quelcom abans, o bé hem d'acceptar uns ens *matemàtics primers*, lliures de la necessitat de ser definits.

En la matemàtica dels nostres dies, a diferència de la matemàtica grega, aquests ens són els *conjunts*.⁷ És a dir, un cop acceptats uns conjunts bàsics —ens indefinits o indefinibles—, podem definir i construir la resta de conjunts necessaris per poder desenvolupar la major part de la matemàtica actual.

Ara bé aquests ens i conceptes no definits estan sotmesos als lligams que els imposen els *postulats* o *axiomes*. És a dir, estan sotmesos a limitacions.

(1b) L'altra qüestió és d'una naturalesa ben diferent.

En la geometria grega, com es fa una figura geomètrica?

És clar que la resposta a aquesta pregunta passa indefugiblement per la qüestió següent:

Quines són les eines acceptables en la construcció?

Cal convenir les eines amb les quals és lícit fabricar ens geomètrics. Després tot consistirà a aplicar-les correctament. És a dir, hem de tenir ben clar què és lícit fer i què no és lícit fer, quines eines podem usar i quines no, i com podem usar-les.

En la geometria grega, els ginyes acceptables —els únics vàlids— eren les rectes i les circumferències.⁸ Només podem considerar ben construïts els punts del pla que s'obtenen tallant dues rectes o dues circumferències ja construïdes, o una recta i una circumferència ja construïdes.⁹ Una recta està ben construïda quan se'n coneixen dos punts prèviament construïts. I una circumferència ho està, de ben construïda, quan, prèviament, se n'han construït un punt i el centre.

Això és el que fa que un problema sigui resoluble o irresoluble. Dit d'una altra manera, la *resolubilitat d'un problema* depèn de la seva naturalesa que, d'alguna manera, força les eines amb les quals és resoluble.

La resolubilitat d'un problema no és, doncs, quelcom absolut. És relatiu.

⁷Vegeu la part IV.

⁸Vegeu *Elements* d'Euclides, llibre I, postulats 1, 2, i 3, a VERA, F. [1970], I, 704.

⁹Limitem aquesta exposició a la geometria plana.

Observació. Com ja hem indicat abans, en l'actualitat —a diferència de Grècia—, els ens primaris són els conjunts. Això fa necessari conèixer molt bé quines són les operacions vàlides per poder construir conjunts nous a partir de conjunts ja construïts.

La part (2) queda justificada pel fet que, aparentment, sembla que, igual que en el cas de les definicions, és impossible disposar de res ben construït, perquè calen punts per construir rectes i circumferències, però alhora calen rectes i circumferències per construir punts. Com es construeixen els primers objectes?

Per tal d'evitar la regressió a l'infinit dels punts, rectes, i circumferències, cal *donar* quelcom. Així apareixen les *dades* del problema.

Definició

Una *dada* és allò que tenim com a existent, com a vertader, i en base a la qual podem treballar. □

Si no tenim cap dada, no podem fer res. Tanmateix, sobretot en els enuncis dels teoremes o dels problemes genèrics, sembla que no en tenim cap, de dada. Això es deu al fet que, en ésser *genèric* o *abstracte*, les dades són *genèriques*, *abstractes* o *hipotètiques*.

Exemples

- Fer un triangle equilàter.
- Existeixen triangles equilàters.
- Trobar les solucions de l'equació polinòmica $X^2 + aX + b = 0$.
- Tota equació polinòmica de segon grau, amb discriminant > 0 , té dues arrels reals. ■

De fet, si no disposem de cap segment rectilini, no podem fer cap triangle equilàter. Quan llegim l'expressió

“Fes un triangle equilàter”,

entenem el següent:

“Quan es disposa d'un costat $\overline{AB}$, es pot fer un triangle equilàter. A més, la construcció no depèn del segment particular $\overline{AB}$.”

I així amb els altres exemples.

Per això cal dir, com fa la proposició 1, del llibre I dels *Elements*:¹⁰

Fer un triangle equilàter sobre un costat donat.

Hem de tenir present que “donar un costat” significa donar un segment rectilini $\overline{AB}$. De retruc, els extrems A i B són punts donats i, per tant, són punts acceptables. És a dir, són aptes per construir quelcom a partir d’ells.¹¹

Ara tot és ja a punt per *resoldre* el problema plantejat en el teorema de la pàgina 3.¹²

Resolució. Donat el segment $\overline{AB}$ i, de retruc, els punts A i B , hem de construir, fent servir rectes i circumferències construïbles, un punt C que

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}.^{13}$$

Ho farem pas a pas, basant-nos en la figura 1.

1. Disposem dels punts A i B .
2. Amb centre en el punt A fem una circumferència que passi per B .
3. Anàlogament, amb centre en B , fem una circumferència que passi per A .¹⁴
4. Aquestes dues circumferències, en tallar-se, proporcionen un punt C *acceptable* perquè està ben construït.
5. Unim els punts A i C , i obtenim el costat $\overline{AC}$.¹⁵
6. Unim els punts B i C , i obtenim el costat $\overline{BC}$.

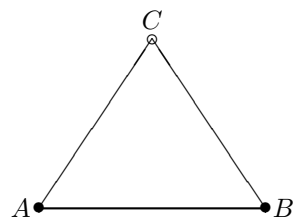


Figura 1

¹⁰Els *Elements* d'Euclides constitueixen l'obra més important de la literatura matemàtica. Recordem que, després de la *Bíblia* del poble jueu, els *Elements* és l'obra que més vegades s'ha editat i que s'ha traduït a més llengües. I, fins ben entrat el segle XX, era un text de lectura imprescindible per a tot estudiós.

¹¹Cal recordar que, per als geomètres grecs, una “recta” era el que nosaltres anomenem un “segment rectilini”. Per això, a la definició 3 del llibre I dels *Elements*, llegim: “Els extrems d’una recta són punts”. I, al postulat 2: “Una recta sempre es pot perllongar d’una recta” [VERA, F. [1970], I, 702 i 704].

¹²Seguirem la resolució d'Euclides. Vegeu VERA, F. [1970], I, 705–706.

¹³Entenem que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ significa que les tres rectes tenen la mateixa longitud. De fet, són segments *superposables*. Hom anomena, a voltes, *còngrues* les figures geomètriques que es poden superposar. Al text dels *Elements* la noció de longitud no hi és present. És una de les moltes conseqüències epistemològiques de la *incommensurabilitat* descoberta pels pitagòrics.

¹⁵El postulat 1 dels *Elements* permet de garantir l’existència del costat $\overline{AB}$. Anàlogament, en el punt 6, garanteix la del costat $\overline{BC}$.

7. El triangle $\triangle ABC$ és un triangle equilàter. ■¹⁶

Aquí s'acaba la part que correspon a la resolució del problema —és a dir, a la construcció del triangle. Però, sorgeix una qüestió nova:

Com sabem que hem fet un triangle equilàter?

Amb certesa no ho sabrem fins que no ho hàgim *demonstrat*. És a dir, un cop feta la construcció, hem d'establir, sense cap mena de dubte, que hem construït el que volíem construir. És a dir, l'objecte construït compleix les propietats que li suposem.¹⁷

En concret, hem de veure que el triangle $\triangle ABC$, construït, és un triangle equilàter. Dit altrament, basant-nos en el que hem usat en la construcció, hem de veure que

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}.$$

El raonament trobarà la seva justificació última en les lleis o *principis bàsics del raonament* que hàgim convingut prèviament.

Per això, cal recórrer a les propietats dels objectes usats, a les propietats que s'estableixen en les definicions, i a les que imposen els postulats. Però, a més, calen alguns *principis bàsics de la lògica*.¹⁸

Demostració. Cal, doncs, que $\overline{AC} = \overline{AB}$, i $\overline{BC} = \overline{AB}$. Però, atès que els punts B i C són, ambdós, punts de la circumferència de centre A i radi $\overline{AB}$, d'acord amb la definició de circumferència,¹⁹ $\overline{AC} = \overline{AB}$. Anàlogament, atès que A i C són punts de la circumferència de centre B i radi $\overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{BA}$.²⁰

A continuació, usem el principi lògic següent:²¹

¹⁶Usarem, com és corrent actualment, aquest símbol per indicar el final d'una demostració o d'una resolució. De fet substitueix les sigles clàssiques QED —“quod erat demonstrandum”— que, malgrat que creiem molt adequades, les hem evitat per no semblar pedants.

¹⁶El postulat 3 del llibre I dels *Elements* d'Euclides garanteix l'existència de les circumferències dels punts 2 i 3.

¹⁷És clar que el geòmetre, en fer la construcció, la fa de manera que s'obtingui allò que vol aconseguir. Tanmateix, però, podria errar el camí. Per això és necessària la demostració.

¹⁸En els *Elements* d'Euclides, aquests principis són les *nocions comunes*. Vegeu VERA, F. [1970], I, 705.

¹⁹Vegeu VERA, F. [1970], I, 15, i 16.

²⁰Dos punts determinen una recta única. És a dir, la recta $\overline{BA}$ i la recta $\overline{AB}$ són la mateixa recta.

²¹És la primera de les nocions comunes dels *Elements* d'Euclides, com podem veure al quadre de la pàgina 12, que conté les nocions comunes.

Principi lògic

Dues coses iguals a una tercera són iguals entre si. $\square$

Tenim, doncs, que

$$\overline{AC} = \overline{AB}, \quad \text{i} \quad \overline{BC} = \overline{BA}.$$

Per tant,

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{BA}$$

i el triangle $\triangle ABC$ és equilàter, tal com volíem. $\blacksquare$

Observació. La definició de circumferència diu que tots els radis d'una mateixa circumferència són iguals. D'això se'n segueix que, si AB i AC són dos radis particulars d'una mateixa circumferència, són iguals.

En el raonament anterior hem usat un principi lògic nou, que Euclides no precisa mai, però que, en canvi, usa en diverses ocasions.

Principi lògic

Allò que val per a tots els objectes d'un domini val, en particular, per a cada un d'ells. $\square$

Amb tot aquest habitualment, hem plantejat un problema, l'hem resolt, i hem provat que la resolució era correcta.

Tanmateix cal que observem que *resoldre* un problema no és el mateix que *demostrar* un teorema. En la resolució del problema cal trobar d'alguna manera —a vegades força estranya— una solució. En la demostració d'un teorema no és necessari construir res. Però, si s'hagués construït —*si existís*—, tindria les propietats que estableix el teorema.

Un teorema estableix lligams entre objectes *hipotètics*. És a dir, estableix lligams entre objectes encara que no s'hagin construït.

Però, si s'haguessin construït, tindrien aquestes propietats. Tanmateix, la construcció no és necessària.

A vegades, un teorema estableix l'existència d'un objecte. És a dir, a vegades, estableix que l'objecte és *construïble* amb els ginyes acceptats en les construccions.

Atenció! L'existència dels objectes matemàtics no és real en el sentit que hagin d'existir en el món físic que ens envolta. A voltes s'ha defensat que és

ideal en el sentit que hi ha un reialme —el reialme dels ens matemàtics— en el qual solament existeixen formalment.²²

Moltes vegades, els problemes estan lligats, *per generalització*, amb els teoremes. De retruc, els teoremes, *particularitzats* a situacions concretes permeten, a vegades, resoldre problemes concrets.

Aquest lligam vol una gran capacitat d'observació, d'anàlisi, d'habilitat per fer-se preguntes, per formular conjectures, per establir induccions, per aconseguir demostracions, etc. És una part de l'ofici matemàtic. Un matemàtic és més bo com més capaç és de passar dels problemes als teoremes, i dels teoremes als problemes.

Els teoremes es *demostran*. Una demostració és un procés de concatenació de principis lògics i de principis matemàtics, aplicats a les peculiaritats dels objectes matemàtics que intervenen, explícitament o ímplicita, en el teorema. Els principis lògics són, d'alguna manera, les lleis del pensament humà que s'accepten en l'àmbit de la matemàtica. S'aprenen de la mateixa manera com l'infant aprèn a usar el llenguatge dels pares, tot escoltant i imitant. Però, un cop el nen és més gran, el mestre posa de manifest les lleis gramaticals que ha adquirit de forma natural. Aquesta és també la millor manera d'adquirir les lleis lògiques que s'usen en la matemàtica.

Com a exemple de les bases de la tècnica demostrativa dels geòmetres grecs, a les pàgines 11 i 12, reproduïm les definicions, les nocions comunes, i els postulats dels *Elements* d'Euclides.²³

Les *definicions* —fruit de les aportacions de l'Acadèmia de Plató i del Liceo d'Aristòtil— són vint-i-tres. Les *nocions comunes* varien molt més. Recordem que no disposem de cap original dels *Elements*. Tot són còpies força tardanes —àrabs o europees dels segles XII al XIV. És molt possible trobar variacions del copista. En canvi, els *postulats* es redueixen a cinc, dels quals el més interessant i controvertit és el cinquè o *postulat de les paral·leles*, que fixa el caràcter euclidià de la geometria. Aquest postulat, si bé és qüestionat com a postulat per la seva manca de simplicitat —quelcom indispensable en un postulat—, no és posat en dubte fins al segle XIX, quan els matemàtics s'adonen de l'existència de geometries en les quals falla el postulat de les paral·leles. Aleshores, o bé (1) per un punt exteriors a una recta no és possible fer-li cap paral·lela o bé (2) se'n poden fer més d'una, de paral·leles.

Concretant, doncs, tenim:

²²Això és una mica complicat. Aprofundir-hi ens endinsaria en la *filosofia de la matemàtica* i aquest no és pas l'objectiu d'aquest curs introductori.

²³Vegeu *Elements*, llibre I, a VERA, F. [1970], 702–704.

Definicions del llibre I dels *Elements* d'Euclides

1. El *punt* és allò que no té parts.
2. La *línia* és longitud sense amplada.
3. Els *extrems de la línia* són punts.
4. La *línia recta* és aquella que descansa per igual damunt de tots els seus punts.
5. La *superfície* és allò que només té llarg i ample.
6. Els *extrems de la superfície* són línies.
7. La *superfície plana* és aquella que descansa per igual damunt de les seves rectes.
8. Un *angle pla* és la inclinació de dues línies que es troben en un pla i que no descansen les dues sobre una recta.
9. Si les dues línies que contenen l'angle són rectes, l'angle és *rectilini*.
10. Si una recta, tirada damunt d'una altra, forma amb ella dos angles contigus iguals, cada un d'ells és *recte*, i la recta és *perpendicular* a aquella damunt la qual s'ha tirat.
11. L'*angle obtús* és el que és més gran que el recte.
12. L'*angle agut* és el que és més petit que el recte.
13. El *límit* és l'extrem d'alguna cosa.
14. Una *figura* és allò que es troba comprès per un o diversos límits.
15. Un *cercle* és una figura plana limitada per una sola línia que s'anomena *perifèria* [*circumferència*], respecte de la qual són iguals totes les rectes que incideixen damunt d'ella tirades des d'un dels punts situats dins de la figura.
16. Aquest punt rep el nom de *centre* del cercle.
17. El *diàmetre* del cercle és qualsevol recta que passi pel centre i de manera que les dues parts tinguin els extrems en la circumferència. Aquestes rectes divideixen el cercle en dues parts iguals.
18. El *semicercle* és la figura limitada per un diàmetre i per la circumferència. El centre del semicercle és el mateix que el del cercle.

..

..

19. Les *figures rectilínies* són les que estan limitades per *rectes*. Són *trilàteres*, si estan limitades per tres rectes; *quadrilàteres*, si ho estan per quatre; *multilàteres*, si ho estan per més de quatre.
20. Entre les figures trilàteres el triangle és *equilàter*, si tots tres costats són iguals, és *isòsceles*, si té dos costats iguals, i és *escalè*, quan els tres costats són desiguals.
21. Entre les trilàteres, el *triangle rectangle* és el que té un angle recte; l'*obtusangle*, el que té un angle obtús; i l'*acutangle*, el que té els tres angles aguts.
22. Entre les figures quadrilàteres, el *quadrat* és equilàter, i equiangle; el *rectangle* és equiangle però no equilàter; el *rombe* és equilàter però no rectangular; el *romboide*, sense ser ni equilàter ni equiangle, té iguals els costats i els angles oposats. La resta de figures quadrilàteres s'anomenen *trapezis*.
23. Les *rectes paral·leles* són aquelles que, trobant-se en un mateix pla, encara que les perllonguem indefinidament mai no es tallen. □

Nocions comunes dels *Elements* d'Euclides

1. Coses iguals a una mateixa cosa són iguals entre si.
2. Si, a coses iguals, els afegim coses iguals, obtenim coses iguals.
3. Si, de coses iguals, en traiem coses iguals, obtenim coses iguals.
4. Si, a coses diferents, els afegim coses iguals, els totals són diferents.
5. Les coses dobles d'una mateixa cosa són iguals entre si.
6. Les coses meitats d'una mateixa cosa són iguals entre si.
7. Les coses *còngrues* entre si són iguals entre si.
8. El tot és més gran que la part.
9. Dues rectes mai no comprenen espai.

els que es descriuen, veiem que aquests dos objectes són iguals, en el sentit que es poden superposar.²⁵

Vegem ara, com a exemple, alguns teoremes i llurs demostracions.²⁶

Teoremes

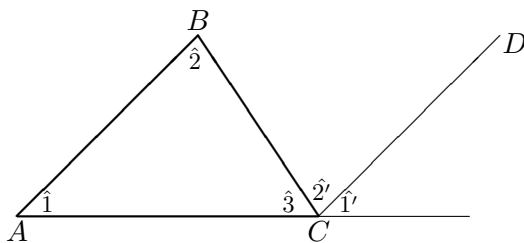
1. En qualsevol triangle $\triangle ABC$, la suma dels angles val dos angles rectes.
2. En qualsevol figura plana, rectilínia i tancada, la suma dels angles interns val tantes vegades dos angles rectes com costats té la figura menys dos.
3. Els angles en la base d'un triangle isòsceles són iguals.
4. En tot triangle $\triangle ABC$, la bisectriu $\overline{AD}$ de l'angle $\angle BAC$ determina, en el costat $\overline{BC}$, dos segments $\overline{BD}$ i $\overline{DC}$ que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Teorema 1. *En qualsevol triangle $\triangle ABC$, la suma dels angles val dos angles rectes.*

Demostració. Sigui $\triangle ABC$ un triangle *arbitrari*. Volem veure que $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$ val dos rectes. Per veure-ho, fem algunes construccions geomètriques:

1. Perllonguem el costat $\overline{AB}$ de la banda de B .²⁷
2. Fem una paral·lela al costat $\overline{AC}$ que passi per B .²⁸
3. Atès que la recta $\overline{BD}$ és paral·lela a la recta $\overline{AC}$, els angles $\hat{1}'$ i $\hat{2}'$ són iguals, respectivament, als angles $\hat{1}$ i $\hat{2}$.²⁹
4. En resulta que $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = \hat{1}' + \hat{2}' + \hat{3} =$ dos rectes en virtut de la noció comuna 2 i de la definició 10. ■



²⁵La congruència de figures significa que són iguals en el sentit que poden superposar-se. Una altra tipus d'igualtat consisteix a tenir la mateixa longitud, superfície, volum, etc., malgrat tenir formes diferents.

²⁶Vegeu *Elements*, I, 32; 8; i VI, 3, a VERA, F. [1970], I, 710–711, 724, 808; i HEATH, sir T. [1908], edició de 1956, 322.

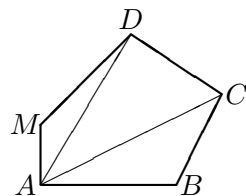
²⁸Això és possible perquè Euclides ho ha demostrat abans a la proposició 29 dels *Elements*.

²⁹Vegeu *Elements*, llibre I, proposició 29, a VERA, F. [1970], 722–723.

Observació. En la demostració hem usat un teorema ja demostrat. Aquest és un dels passos que hom pot fer al si d'una demostració, i és absolutament correcte.

Teorema 2. *En qualsevol figura poligonal, la suma dels angles interns val tantes vegades dos angles rectes com costats té la figura poligonal menys dos.*

Demostració. Suposem que $ABCD \dots M$ és una figura poligonal. Unim el vèrtex A amb els vèrtexs $B, C, D, \dots, M$ de la figura poligonal. Obtenim tants triangles com costats té la figura poligonal, menys dos. Els angles de cada un dels triangles obtinguts sumen dos rectes. En total, doncs, els angles del polígon sumen tantes vegades dos rectes com costats té la figura poligonal, menys dos. ■



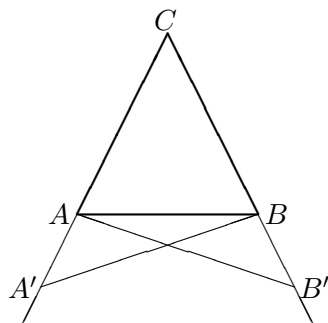
Observació. És un corol·lari —és a dir, és una conseqüència absolutament immediata— d'un teorema ja demostrat. En aquest cas, és un corol·lari del teorema 1.

Teorema 3. *Els angles en la base d'un triangle isòsceles són iguals.*

Demostració. Sigui $\triangle ACB$ un triangle isòsceles de costats $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ iguals. Volem veure que els angles $\angle CAB$ i $\angle CBA$ són iguals.

Fem els passos i raonaments següents:

1. Perllonguem $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ i, a partir dels vèrtexs A i B , afegim una mateixa recta. Obtenim els punts A' i B' que fan que els segments $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ siguin iguals.
2. Unim A' amb B i B' amb A . Obtenim dos triangles $\triangle CB'A$ i $\triangle CA'B$, que són iguals [Per què?]
3. Aleshores els triangles $\triangle ABB'$ i $\triangle BAA'$ també són iguals [Per què?]
4. En resulta que els angles $\angle CAB$ i $\angle CBA$ són iguals [Per què?]
5. Finalment, els angles $\angle CAB$ i $\angle CBA$ són iguals [Per què?] ■



►EXERCICI

4. Repassa, amb cura, els raonaments del teorema 3, i completa'ls usant, si et fan falta, els exercicis 1, 2, i 3.

Teorema 4. *La bisectriu a l'angle $\angle CAB$ del triangle $\triangle ABC$, divideix el costat oposat $\overline{CB}$ en dos segments $\overline{CD}$ i $\overline{DB}$ proporcionals, respectivament, als costats $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$.*

Demostració. Donat el triangle $\triangle ABC$, fem la bisectriu $\overline{AD}$ a l'angle $\angle CAB$.³⁰

Per C tirem una paral·lela a la bisectriu $\overline{AD}$. Sigui E el punt en què talla la perllongació de la recta $\overline{BA}$. Els angles $\angle BAD$, $\angle AEC$, i $\angle ACE$ són iguals. [Per què?] Per tant, el costat $\overline{CA} = \overline{AE}$.

El teorema de Tales, aplicat al triangle $\triangle BCE$ i a la paral·lela $\overline{DA}$ al costat $\overline{CE}$ estableix que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

■

Aquest darrer teorema fa servir resultats del llibre VI dels *Elements* d'Euclides i en particular el *teorema de Tales de Milet*.

Observacions. 1.— Fer una demostració no és fàcil. On comença? Aquesta és una de les dificultats. Per què, per exemple, en la demostració del teorema 1, comencem fent la paral·lela $\overline{BD}$ a la recta $\overline{BC}$? O, en la del teorema 3, perllonguem els costats $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ d'un mateix segment?

Una resposta fàcil és la següent: Comencem així perquè sabíem que cal començar així!! Si no, ni se'ns hauria acudit!!!

Aquesta resposta és parcialment vertadera i parcialment falsa.

Nosaltres ho podem saber perquè ho hem copiat dels *Elements* d'Euclides. Ara bé, el primer que ho va fer, ho va haver d'intuir, d'ensumar, d'inventar, o com ho vulgueu dir.

Aprendre a *ensumar* el camí, a *intuir* per on cal anar i, en definitiva, a *inventar*, és el que cal fer en l'aprenentatge de la matemàtica.

2.— També hem fet servir l'expressió "sabem que". És a dir, en una demostració, hem usat, quan ha fet falta, resultats que han estat demostrats sense fer

³⁰Recordem que la bisectriu a un angle $\angle CAB$ és la recta que passa pel vèrtex A de l'angle i el divideix en dos angles, $\angle CAD$ i $\angle BAD$, iguals.

servir el teorema que estem demostrant ni cap de les seves conseqüències.³¹ Només podem recórrer a teoremes *independents* del que s'està demostrant. Dit d'una forma més descriptiva, només podem recórrer a teoremes *lògicament anteriors*. Però la qüestió que es planteja aleshores és:

Qui ho sap que un resultat ja ha estat demostrat abans?

Se'ns podria dir: "Jo no ho sabia!!".

Bé doncs, per tal de poder fer demostracions noves, cal "saber coses". Això també forma part de l'aprenentatge. S'ha d'aprendre a retenir els resultats bàsics i alhora s'ha d'aprendre a recórrer a resultats que, en un moment donat, no es tenen presents, però dels quals s'intueix que fan falta per poder seguir endavant, de la mateixa manera com l'escriptor busca al diccionari les paraules més adients per poder expressar allò que vol transmetre, o els esdeveniments històrics que embolcallen la seva història, o les dades tècniques i científiques que fan que la seva narració sigui més creïble, etc.

Així, per exemple, cal saber que els angles *alterns interns* i els *angles corresponents* són iguals per poder fer la demostració del teorema 1, i cal saber el *teorema de Tales*, per fer la del teorema 4. En el pitjor dels casos "s'ha de saber" que hi ha un resultat que diu quelcom sobre els angles alterns interns, o sobre els costats dels triangles semblants, i ser capaç de buscar-ho i trobar-ho.³²

3.— Finalment, observem que s'usen *principis lògics* que, en el cas dels *Elements* d'Euclides, són les nocions comunes com en el pas (4) del teorema 1:

A l'angle $\hat{3}$ li sumem, d'una banda, els angles $\hat{1}$ i $\hat{2}$ i, d'altra, els angles $\hat{1}'$ i $\hat{2}'$.

Però la noció comuna 2 diu:

"Si, a coses iguals, els afegim coses iguals, obtenim coses iguals".

Per tant, és lícit usar-ho.

Tots aquests fets fan que, a poc a poc, els teoremes siguin més difícils de demostrar perquè el volum d'allò que cal "saber" és molt més ampli i, per tant, molt més difícil de retenir. És necessari aprendre a seleccionar allò que és més important, més central, més general.

³¹Si en la demostració d'un enunciat s'usa un resultat que depèn del que s'està demostrant, s'incorre en una *petició de principi* o *cercle viciós*. Això és absolutament incorrecte! És possible demostrar el que sigui, si, en la demostració, s'usa el que es vol demostrar! Més endavant, a la pàgina 30, en parlarem amb més deteniment.

³²Més delicada és l'altra qüestió. Com podem saber que no fem servir algun resultat que depèn lògicament i matemàtica del que volem demostrar? Recordem la història de les preteses demostracions del postulat de les paral·leles, en les quals diversos autors —alguns d'ells molt prestigiosos— feien servir un resultat equivalent al que volien demostrar, però l'equivalència del qual els passava desapercebuda.

4.— Però, per si tot això no fos prou, en els teoremes i en les demostracions apareixen, cada cop, més i més objectes i, cada cop, més diversos. És del tot imprescindible saber què són, qui són, quines són les seves propietats més característiques, etc. En el teorema 4, per exemple, apareix la *bisectriu d'un angle*. Però què és la bisectriu d'un angle? Quines propietats té?

Si a l'hora de fer la demostració del teorema no ho sabem —o no ho recordem— haurem de buscar-ho i estudiar-ho fins a tenir-ho ben clar. Si ho fem així, podrem entendre la demostració i, quan calgui, podrem reconstruir-la. Altrament, difícilment podrem reconstruir-la.

5.— Una darrera dificultat és la següent. En tots els teoremes que hem fet, hem basat la demostració en un dibuix. Això, atenció!, és perfectament correcte i, des del punt de vista de l'aprenentatge, és absolutament aconsellable perquè ajuda a forjar intuïcions. Ara bé pot comportar errors!

Volem provar un teorema que diu

“En tot triangle $\triangle ABC$...”

i, per fer-ho, en dibuixen *un de concret*, de triangle.

Com sabem que la demostració no depèn del dibuix concret?

Una possibilitat és refer la demostració amb un altre dibuix totalment diferent. . . Però, en tot cas, la justificació última de la correcció de la demostració rau en la constatació que només hem fet servir allò que està autoritzat per les propietats genèriques dels objectes, pels postulats matemàtics acceptats i pels principis lògics establerts.³³

Imaginem l'enunciat

En tot triangle $\triangle ABC$, un angle és sempre més petit que la suma dels altres dos.

Si, a l'hora de demostrar-lo, considerem un triangle acutangle, el teorema és vertader perquè, en aquest cas, la suma de dos angles és més gran que un angle recte i, per tant, més gran que l'altre angle. Però, si el triangle és obtusangle, pot esdevenir que la suma de dos dels angles aguts sigui més petita que un angle recte

³³ Això obliga a ser molt curosos amb les regles lògiques, amb els postulats, amb els trets característics dels objectes fixats per llur definició. Tanmateix, aquesta manera d'entendre la matemàtica no s'aconseguí del tot fins al primer terç del segle XX amb la *formalització de la teoria de conjunts* i l'establiment de la *lògica de predicats de primer ordre*. Tanmateix la professionalitat dels matemàtics —i la genialitat dels seus prohoms— ha fet avançar la matemàtica, des de l'antigor, usant fets imprecisos i no sempre totalment clars. Recordo aquella frase de la novel·la *La mà esquerra de Déu*: “Déu escriu dret amb la mà esquerra” [“God writes right with the left hand”]. Els matemàtics troben les veritats matemàtiques usant, en ocasions, raonaments no gaire ortodoxos.

En la meua opinió, això és el que significa la regla quarta del *mètode* de Descartes. Vegeu PLA, J. [1999].

i, per tant, de retruc, més petita que l'angle obtús.³⁴

Cal, doncs, ser molt acurats en les demostracions *universals* i no basar-les mai en casos *particulars*.

Vegem ara alguns exercicis senzills de construcció geomètrica amb regla i compàs.

► EXERCICIS

5. Construeix la *bisectriu* d'un angle. Demuestra que la construcció que has fet és correcta.
6. Construeix la *perpendicular* a una recta AB des d'un punt P de la recta, i des d'un punt Q , exterior a la recta. Demuestra la correcció de la construcció.
7. Fes una paral·lela a la recta AB des d'un punt Q , exterior AB . Demuestra la correcció de la construcció.

1.2 Introducció heurística numèrica

Fins aquí hem fet una introducció geomètrica en la qual no hi han intervingut ni els nombres, ni els conjunts. Però no és pas aquesta la *metodologia matemàtica* actual. Anem, doncs, a analitzar, amb un parell d'exemples, fins a quin punt la introducció dels nombres ha permès fer simplificacions tant a l'hora de resoldre problemes com de fer demostracions matemàtiques. Tanmateix, la introducció dels nombres incorpora les complicacions pròpies de la complexitat numèrica.

Problema 1. *Donat un segment $\overline{AB}$, volem determinar un punt C de manera que el triangle $\triangle ABC$ sigui equilàter.*

Ara, però, volem fer-ho numèricament. És a dir, assignant als segments els nombres que corresponen a llurs longituds. Volem evitar la demostració estrictament geomètrica. Per fer-ho, recorrem a les *coordenades*, seguint la línia de raonament desenvolupada, al segle XVII, pels matemàtics francesos René Descartes i Pierre de Fermat.³⁵

Resolució. Considerem que el punt A és l'origen de coordenades d'un sistema cartesià, i el punt B el punt unitat. És a dir, la longitud del segment $\overline{AB}$ és la unitat del sistema de coordenades.

³⁴Imaginem, per exemple, una triangle isòsceles amb un angle obtús de 120 graus.

³⁵La metodologia numèrica no és d'inspiració grega. És d'inspiració oriental, pròpia de la matemàtica egípcia, babilònica, índia, i xinesa. Arribà a Occident de la mà dels matemàtics de l'islam.

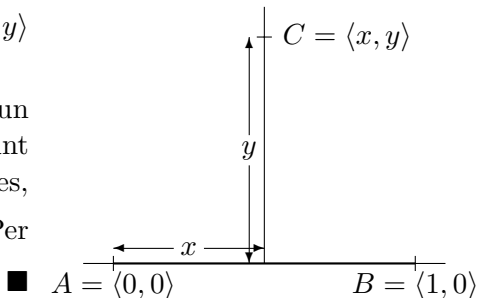
Ara desitgem trobar, si existeix, un punt C de coordenades x i y en el sistema cartesià que hem introduït, que $\overline{AC} = \overline{BC}$.

És a dir, volem un punt $C = \langle x, y \rangle$ que $d(A, C) = d(B, C) = d(A, B) = 1$.

El fet que els punts A i B tinguin un comportament simètric respecte del punt C fa que $x = \frac{1}{2}$. Pel teorema de Pitàgores,

resulta que $d(A, C) = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = 1$. Per

tant, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i $x = \frac{1}{2}$.



Resulta, doncs, que el punt C existeix en tot domini numèric en el qual existeixen els nombres $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$. És a dir, existeix, per exemple, en el domini $\mathbb{R}$ dels nombres reals.

Apareix un fet nou que cal remarcar ja des d'ara mateix. Un problema concret —tant si és geomètric com si és purament numèric— té solució o no depenent del *domini numèric* en què estiguem treballant. Així, per exemple, el problema que acabem de resoldre té solució al si dels nombres reals, però no en té en el món dels nombres racionals perquè la coordenada y del punt C no ho és, de racional.³⁶

Reconsiderem ara el teorema 4.³⁷

Teorema 4. *Si la recta AD és la bisectriu de l'angle $\angle BAC$ del triangle $\triangle ABC$, aleshores*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

Demostració. Usem, per exemple, el *teorema dels sinus*, aplicat als triangles

³⁶Una qüestió més delicada es planteja quan es vol esbrinar quin sentit pot tenir la solució numèrica d'un problema que no té solució geomètrica [vegeu el paràgraf §7.7 de la part IV, dedicat als nombres complexos]. I molt particularment quan allò que volem resoldre és, de fet, un problema geomètric, amb recursos numèrics. En aquest sentit són d'una gran utilitat els nombres complexos, atès que, quan la solució numèrica és complexa, podem dir, seguint les paraules d'Isacc Newton, que “el problema geomètric no té solució”.

³⁷En endavant, no escriurem $\overline{BD}$ per indicar un segment rectilini d'extremes B i D . Simplement escriurem BD . En canvi per designar la recta (indefinida) —tota sencera— que passa pels punts B i D , parlarem de la “recta BD ”.

$\triangle ACD$ i $\triangle ABD$ [vegeu el dibuix de la pàgina 16]:

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin \angle ADC} &= \frac{CD}{\sin \alpha}, \\ \frac{AB}{\sin \angle ADB} &= \frac{BD}{\sin \alpha},\end{aligned}\tag{1}$$

on $\alpha = \angle CAD = \angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAB$.

Però $\angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$. Per tant, $\sin \angle ADB = \sin(180 - \angle ADC) = \sin \angle ADC$. Dividint els dos membres de les igualtats de (1), resulta que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD},$$

com volíem demostrar. ■

Cal observar que la tècnica de recórrer a la trigonometria, per a la resolució de problemes geomètrics, o bé per demostrar teoremes, és una tècnica basada en els nombres. Hom suposa que els segments estan amidats i els angles també.

Tenim, doncs, formes més *modernes* —més vinculades als nombres— per resoldre problemes i per demostrar teoremes geomètrics que no pas les exposades al §1.1.

En l'exercici següent veurem una altra manera de demostrar el teorema 4.

►EXERCICI

8. Suposa que $A = \langle 0, 0 \rangle$, $B = \langle a, 0 \rangle$, i $C = \langle b, c \rangle$.

- Dóna les equacions de les rectes que passen per A, B , per B, C , i per A, C .
- Dóna l'equació de la bisectriu de l'angle $\angle BAC$.
- Determina les coordenades del punt D en què es tallen la recta BC i la bisectriu AD .
- Determina la longitud dels costats AB i AC i la dels segments BD i CD .
- Prova que $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

Com ja hem dit abans, per resoldre un problema hem d'usar alguna propietat que ens sigui coneguda o que hàgim establert en algun moment, i que sigui rellevant per a la resolució del problema. Si no en coneixem cap, l'hauem de buscar per nosaltres mateixos.

Per copsar-ho millor, considerem el problema següent.

Problema 2. *Quina és la superfície del triangle $\triangle ABC$, del qual sabem que els costats AB, BC , i CA tenen, respectivament, 4, 5 i 3 cm. de longitud.*

Abans de resoldre'l, voldria fer notar que, en moltes ocasions, un problema es pot resoldre de formes diverses. I, resoldre'l, significa precisament això: *resoldre'l*. El mètode seguit no és important, sempre que sigui correcte. Això no obstant, aprendre matemàtiques consisteix també a resoldre els problemes de la manera més senzilla possible. Tanmateix, aquest fet és secundari, i té més a veure amb l'elegància de la resolució que no pas amb la seva correcció.³⁸

Veurem ara maneres diverses de resoldre el problema 2. Cada una d'elles es basarà en algun fet que cal conèixer d'avantmà. La resolució la utilitzarà un cop hàgim estat capaços d'observar que és rellevant en la resolució del problema en qüestió.

(1) La manera més fàcil de resoldre'l.

Si ens adonem que el triangle $\triangle ABC$ és rectangle, aleshores l'àrea s'obtindrà simplement multiplicant els dos catets, i dividint el resultat obtingut per la meitat.

Calen, doncs, els dos resultats següents:

Teorema de Pitàgores. *Un triangle $\triangle ABC$ és rectangle si, i només si, les longituds a, b, c dels costats BC, AC, AB satisfan la coneguda identitat de Pitàgores $c^2 = a^2 + b^2$.*

L'angle recte és l'angle que s'oposa al costat de longitud c . És a dir, és el costat AB que s'anomena la *hipotenusa* del triangle rectangle $\triangle ABC$. Els altres dos costats són els *catets*. De retruc, en resulta que els catets són *perpendiculars*, és a dir, es tallen formant un angle recte. ■

Teorema 2.1. *L'àrea d'un triangle qualsevol s'obté calculant $\frac{1}{2}bh$, on b és la longitud d'un dels seus costats i h és la longitud de l'alçada del vèrtex oposat al costat.*³⁹ ■

Ara ja disposem de tot el que fa falta per resoldre el problema 2.

Resolució fàcil. D'antuvi, observem que el triangle $\triangle ABC$ és un triangle rectangle de catets a , i b . Això es deu al fet que $5^2 = 3^2 + 4^2$. Per tant, l'àrea del triangle $\triangle ABC$ és $\frac{1}{2}ab$, perquè un catet és l'alçada que correspon a l'altre catet. Aplicant-ho al nostre cas, obtenim

³⁸A vegades, curiosament, resulta més fàcil resoldre un problema usant mètodes més complicats del que és estrictament necessari. D'aquest fet en són testimoni viu moltes de les resolucions obtingudes al llarg de la història de la matemàtica, on la primera resolució no és pas necessàriament la més simple.

³⁹Recordem que les alçades d'un triangle són els segments que ixen dels vèrtex i són perpendiculars als costats oposats.

$$\text{àrea}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} (3 \times 4) = 6 \text{ cm}^2. \quad \blacksquare$$

(2) Podem considerar la *fórmula d'Heró*.

Teorema d'Heró. *Sigui $\triangle ABC$ un triangle arbitrari amb costats de longituds a, b , i c . L'àrea ve donada per la fórmula*

$$\text{àrea}(\triangle ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

on p és el semiperímetre del triangle. És a dir, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. $\blacksquare$

Resolució per la fórmula d'Heró. En el nostre cas, $p = \frac{1}{2}(5+4+3) = 6$. Per tant,

$$\text{àrea}(\triangle ABC) = \sqrt{6 \times (6-5) \times (6-4) \times (6-3)} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}^2. \quad \blacksquare$$

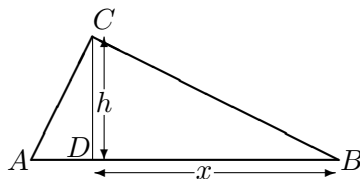
Observació. En aquest cas, no cal mirar prèviament si el triangle és rectangle, perquè la fórmula d'Heró és vàlida per a qualsevol triangle.

(3) Encara un altre mètode, molt més algèbric.

Resolució algèbrica. Suposem que

$$\begin{aligned} AC &= 3, & CB &= 4, & BA &= 5, \\ BD &= x, & AD &= 5-x, & CD &= h, \end{aligned}$$

on h és l'alçada del vèrtex C damunt del costat AB .



Els triangles $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$ són rectangles. Per tant,

$$\begin{aligned} x^2 + h^2 &= 16, \\ (5-x)^2 + h^2 &= 9. \end{aligned}$$

Restant membre a membre, resulta que $x^2 - (5-x)^2 = 7$. D'on: $-25 + 10x = 7$. Per tant, $x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$ cm. Ja podem determinar h :

$$h^2 = 16 - \frac{16^2}{5^2} = \frac{16 \times (25 - 16)}{5^2} = \frac{16 \times 9}{5^2}.$$

En resulta que $h = \frac{12}{5}$. Ara, usant el teorema 2.1, tenim finalment el que cercàvem:

$$\text{àrea}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} \left(5 \times \frac{12}{5} \right) = 6 \text{ cm}^2. \quad \blacksquare$$

Hem usat recursos diferents per resoldre un mateix problema. Alguns d'aquests recursos són, de fet, vàlids per a tota mena de triangles com ara la fórmula d'Heró i l'expressió que dóna l'àrea del triangle en funció d'un costat i de l'alçada respectiva. Això fa que siguin aplicables també en el cas del problema concret que ens ha tocat resoldre. És el que hem fet en la segona i tercera solucions. En la primera, en canvi, ens hem adonat d'un fet vàlid en el cas concret que ens demanen que resolguem, però que, en general, pot ser fals. El nostre triangle és rectangle. Això ha simplificat enormement la resolució, perquè, en els triangles rectangles, un catet fa de costat i l'altre n'és l'alçada respectiva.

► EXERCICIS

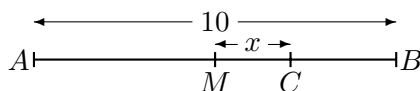
9. Demostra, d'alguna manera, el teorema de Pitàgores.
10. Demostra la fórmula d'Heró. [*Indicació.* Fes les tres bisectrius, recorda que es tallen en un punt —anomenat l'*incentre*— i que és el centre de la circumferència inscrita al triangle.]
11. Demostra que, en efecte, les tres bisectrius es tallen a l'incentre.

A vegades la resolució d'un problema concret ens pot suggerir un teorema. Si la resolució del problema concret podem refer-la amb independència de les dades —això és el que rep el nom de *procés de generalització*—, tenim un resultat general. El podem enunciar en forma de teorema.⁴⁰

Vegem-ne un exemple senzill.

Problema 3. *Volem dividir un segment AB de longitud 10 cm per un punt C de manera que l'àrea del rectangle de costats AC i CB sigui màxima.*

Demostració. Dividim 10 en dues parts iguals, per mitjà del punt M . Suposem que el punt C es troba entre M i B i fem $MC = x$.



Aleshores

$$AC = 5 + x$$

$$CB = 5 - x.$$

L'àrea del rectangle és, doncs, $A_x = (5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$, i sabem que en el món dels nombres reals $x^2 \geq 0$. Per tant,

$$A_x = 25 - x^2 \leq 25.$$

⁴⁰Ja ho hem indicat abans, quan hem parlat de la dependència del dibuix. Si la naturalesa del dibuix no afecta els raonaments, aleshores la validesa de la demostració és indiscutible.

El valor màxim s'obté, doncs, quan $x = 0$.

En aquest cas resulta que

$$A_0 = \text{àrea màxima} = 5^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2.$$

El punt C coincideix amb el punt mig M del segment AB . ■

Observació. És clar que aquesta no és pas l'única manera de resoldre el problema.⁴¹

Aquesta resolució la podem repetir fil per randa quan la longitud del segment AB és arbitrària.

És a dir, sigui quina sigui la longitud, tenim el teorema següent:

Teorema 6. *Segui AB un segment de longitud arbitrària a , el punt C del segment AB pel qual el rectangle de costats AC i CB té àrea màxima és el punt mig M del segment AB .* ■

►EXERCICIS

12. Demostra el teorema anterior.

13. Donat un segment de longitud 25 fes-ne dos trossos que donin un rectangle d'àrea 40.

D'altres vegades els teoremes s'aconsegueixen observant un fet que es repeteix una vegada i una altra. Aquest mètode rep el nom de *mètode inductiu*.

Un problema inductiu. *Fem les sumes successives dels nombres senars, i vegem què passa.*

Anàlisi de la qüestió.

Si sumen un nombre senar, tenim	$S_1 = 1$	$= 1$	$= 1^2$,
Si en sumen dos, tenim	$S_2 = 1 + 3$	$= 4$	$= 2^2$,
Si en sumen tres, tenim	$S_3 = 1 + 3 + 5$	$= 9$	$= 3^2$,
Si en sumen quatre, tenim	$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7$	$= 16$	$= 4^2$,
etcètera.			

Sembla, doncs, que, en tot cas,

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2. \quad \blacksquare$$

⁴¹Si no se'ns acut que $A_x = 25 - x^2 \leq 25$, podem fer-ho derivant A_x . Aleshores, tindrem que $A'_x = 2x = 0$. D'on $x = 0$.

És una resolució molt més sofisticada del que correspon als nostres objectius. Cal recórrer a la derivació de les funcions reals de variable real. Nosaltres evitarem, en tot moment, aquesta mena de recursos que, òbviament, són correctes, però no constitueixen l'objecte del nostre interès.

La qüestió que es planteja és la següent:

La igualtat anterior val sempre?

i la resposta és clara:

Mentre no ho hàgim demostrat

simplement és una *conjectura*.

Una *conjectura matemàtica* és un enunciat matemàtic que sembla plausible —és a dir, molt probablement cert— però que encara no s’ha demostrat.⁴²

Observació. En l'exemple anterior hem fet servir una *nomenclatura* —la nomenclatura dels *punts suspensius*— força corrent en matemàtiques. Cal entendre’n el significat i aprendre a manejar-la amb naturalitat.

En l’expressió matemàtica

$$n^2 = 1 + 3 + \cdots + \overset{n}{} + (2n - 1),$$

el símbol n designa un *nombre natural arbitrari*, n^2 designa el seu quadrat, i $2n - 1$ significa dues vegades el nombre natural n menys una unitat. Finalment,

$$1 + 3 + \cdots + \overset{n}{} + (2n - 1)$$

representa la suma de tots els nombres enters senars *començant* per l’1 i acabant en el nombre *genèric senar* $2n - 1$. El valor d’aquesta suma és n^2 . El superíndex n) que hi ha damunt dels punts suspensius indica el nombre total de sumands que conté la suma.⁴³

El sumatori encara es pot contreure més i escriure:

$$\sum_{j=1}^n (2j - 1).$$

Aquesta expressió compacta significa que sumem els nombres enters senars —els de la forma $2j - 1$ — quan l’índex j pren els valors naturals que hi ha entre 1 i n .⁴⁴

Amb aquesta nomenclatura, tindríem, en definitiva, que

⁴²Les conjectures s’aconsegueixen per *inducció incompleta*, com en l'exemple anterior. Les proves realitzades donen sempre el mateix resultat. De proves, però, només en podem fer un “nombre finit”, mentre que l’enunciat que derivem de la validesa de les proves és un enunciat que “val per a infinits casos”. Una veritat per a infinits casos només es pot aconseguir amb una demostració. Mai de la simple anàlisi d’uns quants casos concrets.

⁴³Normalment queda totalment determinat i precisat pel context i s’omet. En el nostre exemple, aquest superíndex és superflu, perquè, entre el nombre $1 = 2 \times 1 - 1$ i el nombre enter senar $2n - 1$, hi ha exactament n nombres enters senars.

⁴⁴Atenció! n és un nombre natural genèric, però podria ser concret. Per exemple, podria ser 7, 1001, etc.

$$n^2 = \sum_{j=1}^n (2j - 1).$$

Conjectura

Sigui quin sigui el nombre natural n , la suma

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

dels n primers nombres senars és sempre igual a n^2 .

Només serà un teorema quan hàgim aconseguit demostrar-lo.

►EXERCICIS

14. Demosta la conjectura anterior.

15. Conjectura que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$. És certa la conjectura?

Amb les conjectures cal anar amb molt de compte. Fins que no l'hàgim demostrat no podrem estar segurs de la seva veracitat.

Per veure el que vull dir considerem la conjectura següent, lligada amb els nombres primers. Recordem que un nombre natural, diferent d'1, és *primer* si, i només si, únicament és divisible per ell mateix i per la unitat.

Ara farem una conjectura sobre els nombres primers. Agafem els k primers nombres primers.⁴⁵ Els multipliquem i, al resultat obtingut, li afegim una unitat. S'obté un nombre natural. És primer el nombre natural així obtingut?

Si fem els càlculs que calen observem:

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & 1 \times 2 + 1 & = & 3, \\ E_2 & = & 1 \times 2 \times 3 + 1 & = & 7, \\ E_3 & = & 1 \times 2 \times 3 \times 5 + 1 & = & 31, \\ E_4 & = & 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 & = & 211, \\ E_5 & = & 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 & = & 2311, \\ E_5 & = & 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 & = & 30.031, \\ \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Sembla que s'obté sempre un nombre primer. Per tant,

⁴⁵Recordem que els *nombres primers* més petits que 100 són els nombres

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Conjectura sobre els nombres primers

Els nombres E_k definits per

$$E_k = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p_k + 1,$$

on p_k és el k -èsim nombre primer, és un nombre primer.

►EXERCICIS

16. És certa aquesta conjectura? [*Indicació.* Falla per a algun valor de k ?]
 17. Si el nombre E_k no ho és, de primer, pots garantir que, no obstant això, sempre és *divisible* per un nombre primer? Et sembla que aquest nombre primer haurà de ser diferent dels que intervenen en el producte —és a dir, dels nombres primers $2, 3, \dots, p_k$? Per què?

Una conjectura molt bonica, però *falsa*!, la va fer el gran matemàtic francès del segle XVII, Pierre de Fermat. És la següent:

Conjectura de Fermat

Tots els nombres F_n de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ són nombres primers.

Atenció! Aquesta conjectura és falsa!

►EXERCICI

18. Calcula el valor dels nombres de Fermat F_0, F_1, F_2, F_3 , i F_4 . És a dir, fes n successivament igual a 0, 1, 2, 3, i 4, en l'expressió

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Per a cada valor de n , obtindràs un nombre concret. [*Indicació.* Quan $n = 0$, s'obté $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$, i així els altres valors de n .] Els nombres que s'obtenen, són primers?

A la vista dels resultats que hagis obtingut, pots *conjecturar* que tots ho són, de primers? Ara fes $n = 5$. Què passa? S'obté un nombre primer o un nombre compost? [*Indicació.* Si et cal fes servir una calculadora de butxaca.]

Ara com ara, quan $n \geq 5$, *no sabem* si algun dels F_n és primer. Els aritmètics creuen que no, que els únics nombres de la forma $2^{2^n} + 1$ que són primers s'obtenen quan $n = 0, 1, 2, 3, 4$, i prou.

Hem trobat un cas en el qual la conjectura que havíem plantejat és falsa. Per veure que un enunciat matemàtic de tipus general és fals, *n'hi ha prou a trobar un cas particular* en el qual l'enunciat falli.

Així, per exemple, si enunciem que, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

E_n és primer,

tindrem que l'enunciat és fals, si trobem un n concret —el que sigui— que E_n sigui compost.

Si diem, per exemple, que

 En tot triangle $\triangle ABC$, la suma de dos angles superen l'altre angle,

perquè sigui fals n'hi haurà prou a trobar un triangle concret en el qual això sigui fals.

Aquesta tècnica per establir la falsedat d'un enunciat general —del tipus “per a tot”— es coneix amb el nom de *trobar un contraexemple*.

Recordem que un enunciat general és cert si ho és en tots i cada un dels casos possible.⁴⁶

Observació. Cal indicar, encara que només sigui de passada, dues qüestions. No sempre és fàcil trobar un contraexemple. Tant de bo! Però demostrar un resultat de tipus general també pot resultar difícil.

► EXERCICIS

19. Troba un contraexemple de l'afirmació següent: “Per a tot nombre natural n , la suma $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ és igual al valor de l'expressió $\frac{5n^2}{2} - \frac{7n}{2} + 3$ ”.
20. Dóna un triangle concret en el qual falli la conjectura: “La suma dels angles $\angle BAC$ i $\angle CBA$ és més gran que l'angle $\angle ACB$ ”.
21. Afirmo que “En tot polígon convex el nombre de diagonals que podem fer és igual a $n^2 - 6n + 10$, on n és el nombre de costats”. És cert o fals? I si dic que és igual a $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$? Sabries demostrar la validesa de l'expressió certa?
22. Prova que $n^2 - n + 41$ és un nombre primer per a $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 40$. És suficient per garantir que és primer per a tot n ? Falla per algun valor de n ? Quin?
23. Prova que, si $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ per a $n = k \geq 1$, aleshores també és cert per a $n = k + 1$. Pots deduir-ne que la igualtat $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ és vàlida per a tot $n \in \mathbb{N}$.

⁴⁶De fet, quan trobem un contraexemple, trobem un exemple —un cas concret— que falseja l'enunciat general. És a dir, un exemple que va en contra de la validesa de l'enunciat general.