

TEXTOS DOCENTS

199

ÀLGEBRA LINEAL I GEOMETRIA. PROBLEMES

Robert Estalella
Guillem Anglada
Rosendo Vílchez
Rosario López
Ferran Sala

Departament d'Astronomia i Meteorologia



UNIVERSITAT DE BARCELONA



TEXTOS DOCENTS

199

ÀLGEBRA LINEAL I GEOMETRIA. PROBLEMES

Robert Estalella
Guillem Anglada
Rosendo Vílchez
Rosario López
Ferran Sala

Departament d'Astronomia i Meteorologia

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



INTRODUCCIÓ

L'Àlgebra Lineal i Geometria és una assignatura obligatòria de l'Ensenyament de Física de la Universitat de Barcelona, que s'imparteix al primer curs del primer cicle de l'Ensenyament. Comprèn un total de 9 crèdits, dels quals 6 són teòrics i 3 pràctics.

El programa de l'assignatura aborda conceptes bàsics de l'àlgebra lineal i de la geometria lineal, a través dels quals es pretén familiaritzar l'estudiant amb recursos fonamentals en el tractament matemàtic de problemes. Els conceptes introduïts a l'assignatura d'Àlgebra Lineal i Geometria són recursos fonamentals comunament utilitzats tant en les assignatures de matemàtiques com en la resta d'assignatures de l'Ensenyament.

Els continguts del programa d'Àlgebra Lineal i Geometria estan distribuïts en els temes següents:

1. **ESPAIS VECTORIALS**
Espais vectorials. Subespais vectorials. Bases. Coordenades. Espai vectorial quocient.
2. **APLICACIONS LINEALS**
Aplicacions lineals. Matriu associada a una aplicació lineal. Espai vectorial de les aplicacions lineals. Àlgebra dels endomorfismes. Espai dual.
3. **DETERMINANTS I SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS**
Determinants. Rang. Matriu inversa. Sistemes d'equacions lineals. Existència i obtenció de solucions.
4. **DIAGONALITZACIÓ D'ENDOMORFISMES**
Vectors propis. Valors propis. Polinomi característic. Diagonalització d'endomorfismes.
5. **ESPAIS VECTORIALS EUCLIDIANS**
Formes bilineals. Producte escalar. Norma. Producte vectorial. Aplicacions ortogonals.
6. **GEOMETRIA LINEAL**
Espais afins. Varietats lineals. Coordenades cartesianes. Espais afins euclidians. Distància.

El programa està basat essencialment en parts del llibre de M. Castellet i I. Llerena ("Àlgebra lineal i Geometria", Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra 1990), que es fa servir durant el curs com a llibre de text. Recomanem vivament als estudiants que estudiïn l'assignatura amb el llibre, i no únicament a base dels apunts presos a classe, que acostumen a ser una versió dolenta, i sovint plena d'errors, del text del llibre.

Al llarg de les aproximadament 15 setmanes docents que comprèn el semestre, es donen cada setmana 3 hores de teoria i 2 hores més de problemes. Les classes de problemes tenen la finalitat principal d'ajudar a la comprensió de la teoria explicada anteriorment, aplicant-la a la resolució de problemes. La capacitat de l'estudiant al final del curs en la resolució de problemes és un dels criteris importants que es fa servir per a la seva avaluació final.

La col·lecció de problemes d'aquest text-guia cobreix tots els temes tractats en l'assignatura, a més

de dos apèndixs sobre temes complementaris, que poden ser d'interès per a l'estudiant: el primer sobre relacions d'equivalència i el segon sobre grups.

En particular, en començar el curs, se suposa que l'estudiant té uns coneixements bàsics sobre resolució de sistemes d'equacions lineals pel mètode de Gauss, vectors, dependència i independència lineal de vectors, producte escalar i vectorial de vectors, i la capacitat necessària per efectuar càlculs geomètrics al pla i a l'espai.

ÍNDEX

1	PROBLEMES PROPOSATS	3
1.1	Espais vectorials	4
1.2	Aplicacions lineals	7
1.3	Determinants i sistemes d'equacions lineals	11
1.4	Diagonalització d'endomorfismes	14
1.5	Espais vectorials euclidians	16
1.6	Geometria lineal	19
A.1	Apèndix: Relacions d'equivalència	21
A.2	Apèndix: Grups	22
2	PROBLEMES RESOLTS	25
2.1	Espais vectorials	26
2.2	Aplicacions lineals	33
2.3	Determinants i sistemes d'equacions lineals	42
2.4	Diagonalització d'endomorfismes	49
2.5	Espais vectorials euclidians	54
2.6	Geometria lineal	61
A.1	Apèndix: Relacions d'equivalència	64
A.2	Apèndix: Grups	65
3	EXEMPLE DE RESOLUCIÓ D'UN EXAMEN	73
3.1	Enunciat de l'examen	74
3.2	Solució de l'examen	75

CAPÍTOL 1

PROBLEMES PROPOSATS

Aquesta llista de problemes proposats constitueix el material que es fa servir per a les classes de problemes. Estan classificats segons els temes del programa (Temes 1 a 6), a més de dos apèndixs complementaris (relacions d'equivalència i grups).

L'origen dels problemes d'aquesta col·lecció és molt divers. Alguns són originals dels autors, o de la resta de professors d'aquesta assignatura i de la d'Àlgebra Lineal i Geometria de l'antic pla d'estudis de l'Ensenyament de Física. Altres són adaptats de diferents llibres d'àlgebra. Alguns dels problemes proposats s'han fet servir per als examens de l'assignatura.

L'estudiant, al final de curs, hauria de ser capaç de resoldre, amb més o menys dificultat, tots els problemes proposats en aquesta col·lecció. Dintre de cada tema, s'ha procurat seguir un ordre lògic en els problemes, de forma que els últims problemes de cada tema acostumen a ser els que necessiten més recursos de la teoria corresponent.

1.1 Espais vectorials

1. Proveu que $E = \{f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\}$ és un $\mathbf{R}$ -espai vectorial i digueu quins dels següents conjunts són subespais de E :

- (a) $\{f; f(x^2) = f(x)^2\}$.
- (b) $\{f; f(0) = f(1)\}$.
- (c) $\{f; f(3) = 1 + f(-5)\}$.
- (d) $\{f; f(-1) = 0\}$.
- (e) $\{f; f \text{ contínua en } \mathbf{R}\}$.
- (f) $\{f; f(t) = f(-t), \forall t \in \mathbf{R}\}$.
- (g) $\{f; f(t) = -f(-t), \forall t \in \mathbf{R}\}$.

2. Sigui l'espai vectorial $E = \{f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\}$. Quines de les següents famílies d'elements de E són linealment independents?

- (a) $\sin x, \cos x, 1$.
- (b) e^x, e^{x+2} .
- (c) $2, x+2, x^2$.
- (d) $0, 1, x+1$.

(Problema resolt, Capítol 2)

3. Proveu, a partir de la definició de base, que els vectors $a = (1, 1, 0)$, $b = (1, -1, 0)$ i $c = (1, 1, 1)$ són una base de $\mathbf{R}^3$.
4. Demostreu que els vectors $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ formen una base de $\mathbf{R}^3$. Trobeu les coordenades del vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ en la base que formen.
5. Sigui $M_3(\mathbf{C})$. Demostreu que les matrius

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix}$$

formen un subespai. Trobeu-ne la dimensió i una base.

6. Demostreu que $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$, determineu la dimensió dels subespais i trobeu-ne un subespai complementari, en els casos:
- (a) $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$, $d = (5, 0, -7)$.
 - (b) $a = (2, 3, -1, 0)$, $b = (-3, 1, 0, 2)$, $c = (-4, 5, -1, 4)$, $d = (9, 8, -3, -2)$.
7. Siguin els subespais $U = \langle (0, 1) \rangle$, $V = \langle (1, 1) \rangle$, $W = \langle (2, 1) \rangle$. Demostreu que $\mathbf{R}^2$ és suma directa de U i W , i també de V i W .

8. Siguien l'espai vectorial $E = \{f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\}$, i els subespais P , I ,

$$\begin{aligned} P &= \{f; f(t) = f(-t), \forall t \in \mathbf{R}\}, \\ I &= \{f; f(t) = -f(-t), \forall t \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Comproveu que E es pot expressar com a suma directa de P i I .

9. Siguien

$$F = \langle (1, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 6), (0, 2, 4, 4) \rangle, \quad G = \langle (1, 0, -1, 2), (2, 3, 0, 1) \rangle.$$

Determineu les dimensions i trobeu una base de

- (a) F ,
- (b) G ,
- (c) $F \cap G$,
- (d) $F + G$.

(Problema resolt, Capítol 2)

10. Siguien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que $T^3 = 0$. Trobeu A^n , per a un n qualsevol. Es recomana considerar $A = I + T$ i comprovar que I i T commuten.

11. Sigui $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$. Trobeu una base de $M_{2 \times 2}(\mathbf{R})/M$.
(Problema resolt, Capítol 2)

12. Sigui el subespai vectorial de $\mathbf{R}^4$

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4; a_1 = a_2 - 3a_3, a_3 = a_4\}.$$

- (a) Determineu una base de U .
- (b) Determineu una base d'un subespai complementari de U .
- (c) Determineu una base de l'espai quocient $\mathbf{R}^4/U$.

(Problema d'examen, resolt al Capítol 3)

13. Trobeu totes les matrius A de $M_2(\mathbf{R})$ tals que $A^2 = I$.

14. Trobeu totes les matrius A de $M_2(\mathbf{R})$ tals que $A^2 = -I$. Trobeu-ne dues amb tots els coeficients enters.

15. Trobeu totes les matrius A de $M_2(\mathbf{R})$ que compleixen que $A^2 = A$.

16. Signin $S = \{\text{matrius simètriques de } M_n(K)\},$ $A = \{\text{matrius antisimètriques de } M_n(K)\}.$ (a) Demostreu que $M_n(K)$ és suma directa de S i A .(b) Trobeu les dimensions de S i de A .**17.** Considereu l'espai vectorial dels polinomis de grau ≤ 2 , i les bases $\{1, x, x^2\}$ i $\{1, x - a, (x - a)^2\}$.

(a) Trobeu la matriu del canvi de base i la del canvi de base invers.

(b) Trobeu les coordenades del polinomi $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ en les dues bases. Comproveu que $p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}p''(a)(x - a)^2$ (fórmula de Taylor).

(Problema d'examen)