

TEXTOS DOCENTS

159

MECÀNICA I ONES

Xavier Batlle
Albert Díaz
Oscar Iglesias
Fèlix Ritort

Departament de Física Fonamental



UNIVERSITAT DE BARCELONA



TEXTOS DOCENTS 159

MECÀNICA I ONES

XAVIER BATLLE
ALBERT DÍAZ
OSCAR IGLESIAS
FÈLIX RITORT

Departament de Física Fonamental

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



ÍNDEX

1	Mecànica de la partícula	1
1.1	Introducció	1
1.1.1	La mecànica clàssica	1
1.1.2	Principi de relativitat. Les transformacions de Galileu	2
1.2	Moviments unidimensionals	3
1.2.1	Cas general	3
1.2.2	Forces que depenen del temps	4
1.2.3	Forces que depenen de la velocitat	4
1.2.4	Forces que depenen de la posició	7
2	Oscil·lador harmònic lineal esmorteït i forçat	13
2.1	Oscil·lador harmònic lineal esmorteït	13
2.1.1	Cas general	14
2.1.2	Oscil·lador feblement esmorteït ($\omega_0 > \gamma$)	15
2.1.3	Oscil·lador sobreesmorteït ($\omega_0 < \gamma$)	16
2.1.4	Oscil·lador esmorteït crític ($\omega_0 = \gamma$)	17
2.2	Oscil·lador harmònic forçat	17
2.2.1	Plantejament	17
2.2.2	Solució particular	19
2.2.3	Ressonàncies	21
2.3	Oscil·lador harmònic lineal sotmès a una força externa arbitrària	24
2.3.1	Principi de superposició	24
2.3.2	Força externa combinació lineal de funcions harmòniques	25
2.3.3	Força externa periòdica	26
2.3.4	Força externa no periòdica	27
2.4	Oscil·ladors acoblats	29
3	Camps de forces centrals	33
3.1	Forces centrals. Introducció	33

3.1.1	Definició	33
3.1.2	Propietats	34
3.1.3	Cinemàtica en el pla. Coordenades polars	36
3.2	Problema dels dos cossos	37
3.2.1	Reducció al problema d'un cos: massa reduïda i centre de masses	38
3.3	Solució formal del moviment	39
3.3.1	Solució de l'equació diferencial del moviment	39
3.3.2	Equació diferencial de l'òrbita	41
3.3.3	Anàlisi de l'energia potencial efectiva	42
3.4	Forces del tipus K/r^2	43
3.4.1	Anàlisi de l'energia potencial efectiva	44
3.4.2	Equació de les òrbites	46
3.4.3	Òrbites el·líptiques. Lleis de Kepler	48
4	Mecànica dels medis continus	51
4.1	Introducció als medis continus	51
4.2	Propietats elàstiques dels medis continus	52
4.2.1	Esforç i deformació	52
4.2.2	Constants elàstiques	53
4.3	Hidrostàtica	55
4.3.1	Origen microscòpic de la pressió	56
4.3.2	Pressió hidrostàtica en un fluid sotmès a un camp gravitatori	57
4.3.3	Principi d'Arquímedes	60
4.4	Hidrodinàmica	61
4.4.1	Equació del moviment d'un fluid	62
4.4.2	Equació de continuïtat	62
4.4.3	Equació de Bernoulli	63
4.4.4	Aplicacions de l'equació de Bernoulli	65
4.5	Viscositat	66
4.5.1	Coefficient de viscositat	66
4.5.2	Llei de Poiseuille	67
4.5.3	Fenomenologia	68
5	Ones	71
5.1	Tipus d'ones	71
5.2	Funció d'ona i equació d'ones	72
5.3	La corda vibrant	73
5.4	Propagació del so	76

5.5	Interferències, ones estacionàries i batecs	78
5.5.1	Interferències	78
5.5.2	Ones estacionàries	79
5.5.3	Batecs	82
5.6	Energia d'una ona: Reflexió i transmissió	84
5.7	Efecte Doppler	87

CAPÍTOL 1

Mecànica de la partícula

En aquest capítol, fem una breu introducció als conceptes fonamentals de la mecànica clàssica. discutim l'aproximació del punt material i plantejem el problema fonamental de la mecànica: trobar la posició d'un sistema en funció del temps. Tanmateix, enunciem el principi de relativitat i les transformacions de Galileu, les quals ens permeten estudiar el moviment en qualsevol sistema de referència inercial. Finalment, descrivim els procediments per trobar l'equació de moviment d'una partícula sotmesa a forces que depenen del temps, la velocitat o la posició.

1.1 Introducció

1.1.1 La mecànica clàssica

La mecànica és una teoria del moviment, és a dir, pretén calcular la posició d'un mòbil a l'espai en funció del temps. En gran part d'aquest curs considerarem que el sistema que es mou és una partícula. Aquesta aproximació es coneix com l'aproximació del punt material i consisteix a representar el sistema com un punt a l'espai, amb massa m i volum zero. Aquesta aproximació és molt útil tenint present que en estudiar el moviment sota l'acció d'un conjunt de forces externes, tot cos extens pot substituir-se per una partícula de massa equivalent situada en el centre de masses.

La mecànica pot dividir-se en tres grans blocs. La cinemàtica estudia la variació temporal de la posició, $\vec{r}$, velocitat, $\vec{v}$, i acceleració, $\vec{a}$, de la partícula (magnituds cinemàtiques), sense ocupar-se de la causa del moviment. La dinàmica s'ocupa d'aquest origen a partir de les anomenades magnituds dinàmiques, a saber, la massa, m , i la força externa resultat, $\vec{F}$, que actua sobre la partícula. L'estàtica estudia la distribució de forces en sistemes que estan en equilibri. Poden dir, doncs, que la mecànica és una teoria del moviment que relaciona les magnituds dinàmiques amb les cinemàtiques.

La mecànica clàssica descriu el moviment d'un conjunt de partícules que es mouen a velocitats molt inferiors a la velocitat de la llum i s'aplica a sistemes no quàntics, sistemes pels quals l'acció (el producte de l'energia involucrada en el moviment i la durada d'aquest) és ordres de magnitud superior a la constant de Planck, $\hbar$ ($\hbar = 6.626 \times 10^{-34}$ Js). Paral·lelament, la mecànica relativista estudia sistemes que es mouen amb velocitats comparables a la de la llum i la mecànica quàntica aquells pels quals l'acció és de l'ordre d' $\hbar$. En aquest curs ens ocuparem únicament de la mecànica clàssica.

Les lleis de la mecànica clàssica van ser enunciades amb l'objectiu de trobar la posició de la partícula en funció del temps, $\vec{r}(t)$ (equació del moviment), a partir de les condicions inicials (posició i velocitat en l'instant inicial, t_0 : $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = t_0)$ i $\vec{v}_0 = \vec{v}(t = t_0)$), i del conjunt de forces que actuen sobre aquella, entenent per força tota interacció entre la partícula i l'entorn.

La solució a aquest problema pot plantejar-se per dos camins: (i) a partir de la segona llei de Newton, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (anomenada també equació fonamental de la mecànica), on $\vec{p}$ és la quantitat de moviment, $\vec{p} = m\vec{v}$, i (ii) a partir de les lleis de conservació de la quantitat de moviment, moment angular i energia.

La mecànica de la partícula es generalitza, per exemple, en la mecànica dels sistemes de partícules, el sòlid rígid i la mecànica dels medis continus i deformables.

1.1.2 Principi de relativitat. Les transformacions de Galileu

El principi de relativitat o postulat d'equivalència afirma que tota llei de la física pren la mateixa forma en tot sistema de referència inercial. En el cas de la mecànica clàssica, aquest principi implica que no podem distingir entre repòs i moviment rectilini i uniforme, i que les lleis de Newton són invariants sota canvis de sistema de referència inercial.

Imaginem dos observadors situats, respectivament, en els orígens O i O' de dos sistemes de referència inercials que es mouen un respecte de l'altre amb velocitat relativa constant $\vec{V}$. Prenem O=O' per a $t = 0$. Sigui un mòbil de massa m situat en el punt P de l'espai. Estudiem com es relacionen les magnituds cinemàtiques mesurades en ambdós sistemes de referència (Fig. 1.1).

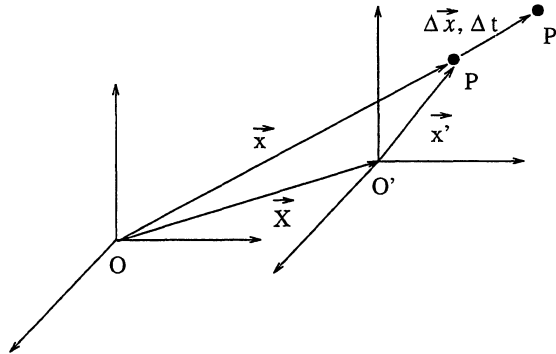


Figura 1.1: Sistemes de referència inercials amb orígens O i O' que es mouen amb velocitat relativa constant $\vec{V}$. $\vec{x}$ és el vector posició de P respecte d'O. $\vec{x}'$ és el vector posició de P respecte d'O'. $\vec{X}$ és el vector posició d'O' respecte d'O.

En el marc de la mecànica clàssica, el temps és una magnitud absoluta (no depèn de l'observador), de manera que els observadors en els orígens O i O' assignen la mateixa coordenada temporal a un esdeveniment.

$$t = t' \quad (1.1)$$

En conseqüència, els vectors posició $\vec{x}$, $\vec{x}'$ i $\vec{X}$ es relacionen segons (vegeu Fig. 1.1),

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{x}' \quad (1.2)$$

Les equacions 1.1 i 1.2 ens menen a la llei d'additivitat de velocitats:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \quad (1.3)$$

que expressa matemàticament el que diu el nostre sentit comú: la velocitat de P respecte d'O és la suma de les velocitats de P respecte d'O' i d'O' respecte d'O. Òbviament, de l'equació 1.3 se'n deriva que

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (1.4)$$

de manera que s'acompleix el principi de relativitat i, efectivament, les lleis de Newton s'expressen d'igual manera en tots els sistemes de referència inercials. Les equacions 1.1 - 1.4 es coneixen com a transformacions de Galileu i ens indiquen com transformar les magnituds cinemàtiques en canviar de sistema de referència inercial. Diem, doncs, que les lleis de Newton són invariants sota transformacions de Galileu. Tanmateix, quan la partícula es mou entre P i P' (Fig. 1.1), els observadors situats a O i O' mesuren el mateix interval temporal ($\Delta t = \Delta t'$) i espacial ($\Delta \vec{x} = \Delta \vec{x}'$) entre aquests dos esdeveniments. Aquest resultat reflecteix les hipòtesis fonamentals de la mecànica clàssica d'espai i temps com a magnituds absolutes.

Atès que la teoria de la relativitat restringida (Einstein, 1905) postula la hipòtesi que la velocitat de la llum mesurada per a observadors en diferents sistemes de referència inercials és la mateixa i és la màxima a la qual poden propagar-se les ones en el buit, la mecànica relativista no es regeix per les transformacions de Galileu. Espai i temps deixen de ser absoluts: el temps entre dos successos i la distància entre dos punts depenen de l'observador, de manera que la llei d'additivitat de velocitats ja no és vàlida. Veureu a l'assignatura Electrodinàmica Clàssica que, en mecànica relativista, les anomenades transformacions de Lorentz asseguren la validesa del principi de relativitat.

1.2 Moviments unidimensionals

1.2.1 Cas general

En aquest curs estudiarem essencialment el moviment d'un sistema en una dimensió (coordenada x), per a diversos tipus de forces. L'objectiu és trobar la posició de la partícula en funció del temps, $x(t)$, conegudes les condicions inicials, $x_0 = x(t_0)$ i $v_0 = v(t_0)$, i la força externa resultant, F , que actua sobre aquella. En el cas més general possible, la força externa resultant pot dependre explícitament de la posició, la velocitat i el temps, $F(x, v, t)$. Implícitament, atès que $x = x(t)$ i $v = v(t)$, l'única variable independent de la mecànica és el temps. Tot es redueix, doncs, a trobar les solucions d'una equació diferencial de segon ordre del tipus $F(x, v, t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$, amb condicions inicials x_0 i v_0 (equació diferencial del moviment).

En aquesta secció discutirem breument quin és el procediment de resolució per a tres casos particulars: (i) forces que depenen únicament del temps, $F(t)$, com, per exemple, la força que

actua sobre un electró dins un condensador, (ii) forces que depenen únicament de la velocitat, $F(v)$, com, per exemple, la força de fregament que actua sobre un sòlid quan es mou en el si d'un fluid, i (iii) forces que depenen únicament de la posició, $F(x)$, com, per exemple, la interacció gravitatòria o la força recuperadora associada a una deformació elàstica.

1.2.2 Forces que depenen del temps

Aquest és el cas més senzill i la solució de l'equació de moviment s'obté per integració directa de la segona llei de Newton. Prenem una força, $F(t)$, que actua sobre una partícula de massa m , amb condicions inicials x_0 i v_0 . Podem escriure:

$$F(t) = m \frac{dv}{dt} \quad (1.5)$$

Integrant:

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') dt' . \quad (1.6)$$

A partir de la definició de velocitat, integrant $dx = v(t)dt$, obtenim:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{t'} F(t'') dt'' \right) dt' \quad (1.7)$$

Exercici: *Sigueu un electró sotmès a un camp elèctric altern (per exemple, un electró dins un condensador), del tipus $E_x = E_0 \cos(\omega t + \theta)$. Preneu $t_0 = 0$. Trobeu l'equació de moviment i representeu-la per al cas particular de $x_0 = v_0 = 0$ i $\theta = 0$. Compareu aquesta equació de moviment amb la dependència temporal del camp elèctric.*

1.2.3 Forces que depenen de la velocitat

Fregament sòlid-fluid

Les forces que depenen de la velocitat poden representar el fregament que actua sobre un sòlid en moure's en el si d'un fluid, com, per exemple, la caiguda lliure d'un objecte, el descens d'un paracaigudes, el moviment d'una barca en l'aigua, la força que patim en treure la mà per la finestra d'un cotxe en moviment, d'entre d'altres.

Sabem que la força de fregament entre dos sòlids és constant i pot descriure's en funció d'un coeficient de fregament que solament depèn dels dos materials en contacte. El fregament sòlid-fluid és més complicat i, de fet, no hi ha una expressió analítica exacta, sinó que la relació és numèrica: per a cada velocitat v_i , la força val $F_i = F(v_i)$. Això és degut al fet que es tracta d'un procés de retroalimentació dinàmic: quan la velocitat de la partícula és gran, el fregament és important; la velocitat decreix ràpidament i, consegüentment, el fregament també.

Experimentalment, hom observa que el conjunt de parelles $(v_i, F(v_i))$ pot aproximar-se analíticament per una funció potencial del tipus $F(v) = \mp bv^n$, on (i) b és una constant que depèn de la geometria del sòlid i del tipus de fluid, (ii) n és número major o igual que 1 i que depèn de la velocitat i la geometria del sòlid, i del tipus de fluid, i (iii) els signes $\mp$ assegurin que la força de fregament s'oposa sempre al moviment i provoca la dissipació d'energia. Per a exponents senars, per exemple, $F = -bv$, la força sempre ha de portar signe negatiu per tal d'assegurar-nos que s'oposa a la velocitat, independentment del sentit positiu que haguem escollit per a aquesta. Per a exponents parells, per exemple, $n = 2$, quan $v > 0$, llavors $F(v) = -bv^2$, i quan $v < 0$, llavors $F(v) = bv^2$, de manera que cal parar compte alhora de resoldre l'equació diferencial resultant de la segona llei de Newton, ja que el signe de la força de fregament sòlid-fluid depèn del sentit positiu que hem escollit per a la velocitat.

Finalment, la força de fregament depèn fortament de la geometria dels objectes ja que aquesta caracteritza el que anomenem coeficient de penetració. És en aquest sentit que diem que cotxes i avions estan dissenyats per ser aerodinàmics, i.e., per desplaçar-se en l'aire amb el mínim fregament possible. Podeu trobar una explicació amb més detall d'aquest fet en el cap. 4.

Forces de fregament lineals amb la velocitat. Concepte de velocitat límit

Imagineu una barca que es desplaça en un llac i que en l'instant $t_0 = 0$ apaga els motors, la velocitat és v_0 i, com l'origen de coordenades no està fixat, prenem $x_0 = 0$. Si la força de fregament és lineal amb la velocitat i negligim el fregament amb l'aire, podem escriure:

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \quad (1.8)$$

Integrant:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \quad (1.9)$$

Per tant, una força de fregament que actua sobre un sistema que es mou amb velocitat inicial v_0 provoca una caiguda exponencial d'aquesta (vegeu Fig. 1.2).

Cal observar que $v(t)$ no és estrictament zero fins a temps tendint a infinit. Aquest fet és resultat de modelitzar la força de fregament per una funció analítica i de la propietat de retroalimentació abans esmentada. Es tracta d'un límit purament matemàtic ja que físicament el sistema s'atura en un temps finit i recorre una distància finita. A temps suficientment llargs, la velocitat és tant petita (malgrat no és estrictament zero), que el sistema pot considerar-se en repòs. Per exemple, un valor raonable per a la velocitat de tall v_c (velocitat per sota de la qual considerarem el sistema en repòs) pot ser la velocitat aleatòria mitjana de les onades. La barca assolirà la velocitat v_c en un temps t_c :

$$t_c = \frac{m}{b} \ln \left(\frac{v_0}{v_c} \right) \quad (1.10)$$

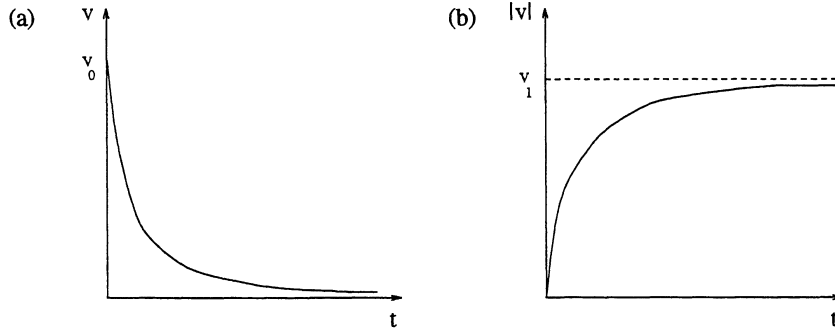


Figura 1.2: (a) $v(t)$ per una força tipus $F(v) = -bv$, aplicada sobre un cos amb velocitat inicial v_0 . (b) $v(t)$ en presència d'un camp gravitatori g i d'una força de fregament com en el cas (a), per un cos amb $v_0 = 0$ (caiguda lliure).

Així, si considerem la barca aturada quan v_c és un 1% de v_0 , $t_c = 4,6 \frac{m}{b}$; si és un 0,1%, $t_c = 6,9 \frac{m}{b}$; si és un 0,01%, $t_c = 9,2 \frac{m}{b}$, etc. Per tant, malgrat v_c varia en dos ordres de magnitud, t_c només varia en un factor dos.

Integrant (1.9), l'equació de moviment s'escriu:

$$x(t) = \int_0^t e^{-\frac{b}{m}t} dt = \frac{mv_0}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t}) \quad (1.11)$$

mentre que la distància recorreguda, d , val

$$d = \frac{mv_0}{b} \quad (1.12)$$

Adonem-nos que $\frac{m}{b}$ té unitats de temps. Si definim $\tau = \frac{m}{b}$, τ ens dona un ordre de magnitud del temps característic d'esmoreïment (de vegades anomenat temps de relaxació), ja que $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$, és a dir, en un temps $t = \tau$, $v(\tau) = \frac{v_0}{e}$, i la velocitat s'ha dividit per un factor e . τ depèn del mòbil (mitjançant la massa m) i del medi (mitjançant la constant de fregament, b). El concepte de temps característic és de gran utilitat en molts camps de la física i pot representar, per exemple, el temps característic de retorn a l'equilibri d'un sistema que ha estat pertorbat instantàniament, el temps característic de les desintegracions radioactives, etc.

De totes les potències v^n , escollirem aquella que doni les expressions $v(t)$ i $x(t)$ que millor s'ajustin als valors experimentals de la velocitat i la posició. Si l'exponent n és gran, el frenat inicial és molt important, la velocitat decau ràpidament i la força de fregament es fa molt petita. Això dona lloc a una aturada molt lenta i, en alguns casos, significa que la partícula recorreria una distància infinita abans d'aturar-se, la qual cosa no té cap significat físic. D'altra banda, hem vist que per $n = 1$, la partícula s'atura a distància finita. Concloent, la relació analítica $F(v) = \mp bv^n$ no s'ha de mantenir constant al llarg del moviment. Per exemple, per a objectes petits que es mouen en l'aire, $n = 2$ per a velocitats superiors a uns 24 m/s i $n = 1$ per a velocitats inferiors. Per tant, si el fregament és petit (i.e., la velocitat del mòbil és petita i la seva geometria no és molt anisòtropa), podem prendre $F(v) = -bv$. El coeficient b s'ajusta experimentalment: donat el conjunt experimental de velocitats $v(t_i)$, la hipòtesi $F(v) = -bv$ és vàlida si $\ln[v(t_i)]$ vs t_i pot ajustar-se a una regressió lineal, el pendent de la qual val $-\frac{b}{m}$.

Prenem, ara, un cos en caiguda lliure (condicions inicials, $v_0 = 0$ i $x_0 = 0$), tal que la força de fregament és lineal amb la velocitat. L'equació diferencial que descriu el moviment és (sentit positiu: eix vertical creixent):

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - bv \quad (1.13)$$

d'on, integrant (vegeu Fig. 1.2),

$$v(t) = -\frac{mg}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t}) \quad (1.14)$$

Per a temps suficientment llargs, el sistema assoleix una velocitat constant anomenada velocitat límit, v_l ,

$$v_l = -\frac{mg}{b} \quad (1.15)$$

Aquest fet és típic del moviment d'un sistema sotmès a una força constant (en aquest cas, el camp gravitatori) i a una força de fregament lineal amb v . v_l pot també trobar-se imposant $\frac{dv}{dt} = 0$ a l'equació 1.13.

Integrant $v(t)$, assolim l'equació del moviment

$$x(t) = \frac{m^2g}{b^2}(1 - \frac{b}{m}t - \exp^{-\frac{b}{m}t}) \quad (1.16)$$

la qual, per a temps suficientment llargs, esdevé:

$$x(t) \sim \frac{m^2g}{b^2} + v_l t \quad (1.17)$$

Exercici: En el cas anterior, calculeu el temps que triga el cos en arribar a la superfície de la Terra, si ha caigut des d'una altura h .

Exercici: Trobeu $v(t)$ i $x(t)$ per a pujada lliure des de la superfície de la Terra (velocitat inicial v_0). Calculeu el temps que triga el cos en aturar-se. Amb quina velocitat arriba de nou a la superfície de la Terra?

Exercici: Escriviu les equacions diferencials de moviment per caiguda i pujada lliure en el cas d'una força de fregament proporcional al quadrat de la velocitat.

1.2.4 Forces que depenen de la posició

Forces conservatives i no conservatives. Dissipació de l'energia

La interacció electrostàtica, la gravitatòria, la nuclear forta i les forces recuperadores en els cossos deformables són exemples de forces que depenen de la posició. A les assignatures de Fonaments de Física us han introduït el concepte d'energia potencial i els teoremes de conservació.

En un moviment en una dimensió, si una força depèn explícitament (i únicament) de la posició, $F = F(x)$, llavors és conservativa, és a dir, podem definir la funció energia potencial, $U(x)$, atès que el treball que ha de realitzar el camp de forces per portar la partícula entre dos punts no depèn de la trajectòria (solament hi ha una trajectòria possible). Per tant, en una dimensió, tota força que depèn explícitament (i únicament) de la posició, és conservativa.

$U(x)$ es defineix com:

$$U(x) = \int_x^{x_0} F(x) dx + \text{constant} \quad (1.18)$$

on x_0 és un origen arbitrari d'energies. $U(x)$ no està unívocament definida ja que podem escollir x_0 en qualsevol punt de l'espai i la constant en l'equació anterior canvia. Solament està unívocament definit el treball realitzat per la força en portar la partícula entre x_1 i x_2 , W_{12} .

$$W_{12} = U(x_1) - U(x_2) = -\Delta U \quad (1.19)$$

La qual cosa, juntament amb el teorema treball-energia, ens mena al teorema de conservació de l'energia mecànica, $E = T + U(x) = \text{constant}$, on T és l'energia cinètica. Tanmateix, $F(x) = -\frac{dU}{dx}$.

Quan sobre la partícula actuen forces no conservatives, l'energia mecànica no es conserva. Si F_1 és una força conservativa i F_2 és no conservativa, E depèn del temps com:

$$\frac{dE}{dt} = F_2 v(t) \quad (1.20)$$

La variació temporal d' E és equivalent a la potència (dissipada o proporcionada) associada a la força no conservativa.

Estudi del moviment a partir de l'energia potencial

Coneguda $U(x)$, l'energia mecànica, E , s'escriu:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{constant} \quad (1.21)$$

d'on, integrant, obtenim:

$$t = \int_{x_0}^x \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (1.22)$$

on, ara, x_0 és la posició inicial i el signe s'escull segons $v > 0$ o $v < 0$ en les diferents zones de moviment. En conseqüència, si som capaços d'integrar l'expressió anterior, obtindrem $t(x)$ i si podem invertir aquesta relació, assolirem $x(t)$. A partir del teorema de conservació de l'energia mecànica podem, doncs, formalment, trobar l'equació de moviment.

Exercici: (a) Demostreu que una força tipus $F(x) = -Kx$ que actua sobre una partícula de massa m dona lloc a un moviment harmònic simple (MHS), i deduiu l'equació de moviment a partir de la conservació de l'energia mecànica (Eq. 1.22), si l'amplitud de moviment val A . Trobeu la freqüència angular, ω_0 , i l'angle de defasatge, ϕ , de la solució $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$, en funció de k , m , A i x_0 . Calculeu el període del moviment, T , a partir de l'equació 1.22 i mostreu que $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. b) Demostreu, a partir de la segona llei de Newton, que tot MHS és solució d'una equació diferencial tipus, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Trobeu A i ϕ en funció de les condicions inicials, x_0 i v_0 .

Petites oscil·lacions al voltant d'un mínim de l'energia potencial

A Fonaments de Física heu après a descriure qualitativament el moviment a partir de la representació gràfica de l'energia potencial. Ja que $F(x) = -\frac{dU}{dx}$, els extrems de l'energia potencial ($\frac{dU}{dx} = 0$) representen punts d'equilibri, perquè la força que hi actua sobre la partícula és nul·la. Aquests extrems poden ser punts d'equilibri estable ($\frac{d^2U}{dx^2} > 0$; mínims de la funció energia potencial) o inestable ($\frac{d^2U}{dx^2} < 0$; màxims de la funció energia potencial).

Quan una partícula es troba en una posició de l'espai que correspon a un màxim de la funció energia potencial i la pertorbem, s'allunya de la posició d'equilibri, ja que apareix una força que tendeix a allunyar-la (imaginem, per exemple, una barra que aguantem amb un dit per la seva part inferior). Contràriament, quan pertorbem una partícula que es troba en una posició que correspon a un mínim de l'energia potencial, la pertorbació sempre tendeix a retornar la partícula a la posició d'equilibri (per exemple, la mateixa barra suspesa per l'extrem superior). Al voltant dels mínims de l'energia potencial, una partícula descriu un moviment periòdic (Fig. 1.3).

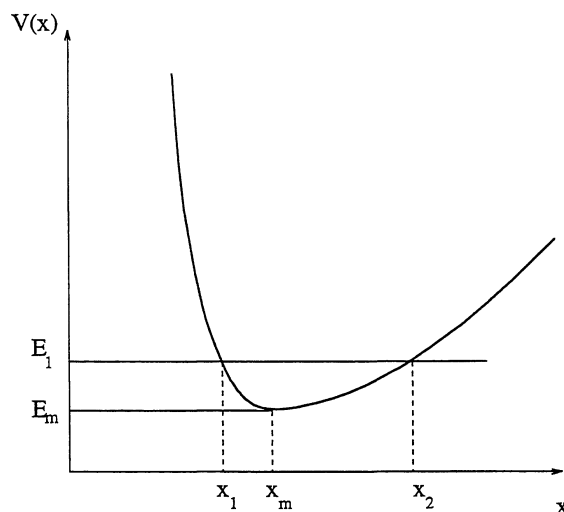


Figura 1.3: Representació esquemàtica d'un punt d'equilibri estable de l'energia potencial. El moviment que descriu una partícula amb energia mecànica E_1 és periòdic no harmònic simple entre x_1 i x_2 (raoneu-ho).

Suposem que la partícula es troba en equilibri al punt x_m , amb energia E_m . Si augmentem la seva energia fins a E_1 , per exemple, desplaçant-la de x_m a x_1 , com a x_1 la força que pateix no és nul·la, la partícula descriurà un moviment periòdic no harmònic simple entre $[x_1, x_2]$. L'energia

cinètica és $T(x) = E_1 - U(x)$, de manera que $T(x_1) = T(x_2) = 0$ i $T(x_m) = T_{max}$. Recordeu que la partícula solament pot moure's entre x_1 i x_2 , perquè necessàriament $T(x) \geq 0$, és a dir, $E_1 \geq U(x)$. El moviment és periòdic perquè hi ha dos punts de retorn, però no és harmònic simple ja que la funció energia potencial no és de la forma $U(x) = U(x_m) + \frac{1}{2}k(x - x_m)^2$ (no és una paràbola simètrica centrada en el mínim $(x_m, U(x_m))$).

L'equació de moviment $x(t)$ resultarà de calcular la integral a l'equació 1.22, on $U(x)$ és la funció energia potencial ($U(x) \neq \frac{1}{2}kx^2$), i x_1 i E_1 són la posició inicial i l'energia total, amb $E_1 = U(x_1) = U(x_2) = \text{constant}$. El període del moviment al voltant de x_m pot calcular-se segons:

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E_1 - U(x)}} \quad (1.23)$$

Tanmateix, desenvolupant la funció $U(x)$ en sèrie de potències de Taylor al voltant del mínim x_m , $U(x)$ s'escriu:

$$U(x) = U(x_m) + \frac{1}{2!} \frac{d^2U(x_m)}{dx^2} (x - x_m)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3U(x_m)}{dx^3} (x - x_m)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n U(x_m)}{dx^n} (x - x_m)^n + \dots \quad (1.24)$$

Suficientment a prop del mínim, $(x - x_m) \ll 1$, llavors, $(x - x_m)^2 \gg (x - x_m)^3 \gg \dots \gg (x - x_m)^n$, amb la qual cosa podem escriure:

$$U(x) \approx U(x_m) + \frac{1}{2} \frac{d^2U(x_m)}{dx^2} (x - x_m)^2 \quad (1.25)$$

És a dir, per a desplaçaments petits al voltant de la posició d'equilibri, una partícula descriu un moviment harmònic simple (MHS) de constant recuperadora equivalent $K = \frac{d^2U(x_m)}{dx^2} = U''(x_m) > 0$ (derivada segona en el mínim). La freqüència de les petites oscil·lacions harmòniques al voltant del mínim val $\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_m)}{m}}$, el període $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ i la força recuperadora causant d'aquest moviment, $F(x) = -U''(x_m)(x - x_m)$.

Aquesta aproximació es coneix com a aproximació harmònica i és molt important perquè ens permet tractar moviments molt complicats de manera senzilla. Exemples típics són la vibració dels àtoms d'un sòlid al voltant de la posició d'equilibri a temperatures molt inferiors a la temperatura de fusió i la vibració dels moments magnètics d'un sòlid magnètic a temperatures molt inferiors a la temperatura de Curie.

Anharmonicitat

En l'apartat anterior hem vist que un moviment al voltant del mínim de l'energia potencial és en general periòdic no harmònic simple (si hi ha dos punts de retorn) i esdevé MHS en el límit de petites oscil·lacions (suficientment a prop del mínim). Això vol dir que podem fer l'aproximació de

l'equació 1.25. En allunyar-se del mínim, la partícula ja no descriu un moviment harmònic simple i haurem d'anar sumant progressivament més termes al desenvolupament d' $U(x)$:

$$U(x) \sim U(x_m) + \frac{1}{2}K(x - x_m)^2 + \frac{1}{6}K'(x - x_m)^3 + \frac{1}{24}K''(x - x_m)^4 + \dots \quad (1.26)$$

amb $K = \frac{d^2U(x_m)}{dx^2}$, $K' = \frac{d^3U(x_m)}{dx^3}$, $K'' = \frac{d^4U(x_m)}{dx^4}$... La força ja no és lineal amb el desplaçament, $(x - x_m)$, i s'escriu:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \sim -K(x - x_m) - \frac{1}{2}K'(x - x_m)^2 - \frac{1}{6}K''(x - x_m)^3 + \dots \quad (1.27)$$

El primer terme de l'equació 1.27 correspon a l'aproximació harmònica ja que dona lloc a oscil·lacions harmòniques simples. La resta de termes es coneixen com a termes anharmònics i donen lloc a oscil·lacions no harmòniques, resultat del fet que el sistema es mou amb oscil·lacions cada cop més allunyades de la posició d'equilibri. Per exemple, fixem-nos que la llei de Hooke, $F(x) = -K(x - x_m)$, solament és vàlida per a desplaçaments petits (per sota del que anomenem límit proporcional) perquè a mesura que deformem progressivament un sòlid caldrà anar a termes quadràtics, cúbics... (sèrie de potències de la deformació $(x - x_m)^n$).

Cal assenyalar que no tot moviment suficientment a prop del mínim de l'energia potencial és necessàriament harmònic simple. Per exemple, si en desenvolupar $U(x)$ en sèrie de Taylor resulta que $U''(x_m) = 0$, la partícula mai pot descriure un MHS i el moviment serà, com a molt, periòdic. Alhora, per energies potencials del tipus $U(x) = bx^n$, per $n > 2$, és obvi que la partícula tampoc descriu un MHS.

Exercici: Demostreu que per a una energia potencial del tipus $U(x) = bx^4$, el període del moviment depèn de l'energia com:

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_a} \frac{dx}{\sqrt{E - bx^4}} \quad (1.28)$$

on $\pm x_a$ són els punts de retorn ($T(\pm x_a) = 0$), que compleixen $x_a = (E/b)^{1/4}$. Noteu que hem aprofitat el fet que l'energia potencial és una funció simètrica. El mateix argument serveix per a qualsevol energia potencial del tipus $U(x) = bx^n$, amb n un nombre natural major que 2. Demostreu que, amb un canvi de variable tipus $y = (E/b)^{1/n}x$, el període $T(E)$ és proporcional a $E^{1/n-1/2}$ i a la integral $I = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$, la qual podeu trobar en qualsevol llibre de taules (e.g., SPIEGEL) a partir de la funció Γ d'Euler. Per tant, el període és independent de l'energia solament per al cas $n = 2$ (MHS).

Exercici: Considereu un pèndol simple (sistema constituït per un fil de massa negligible i longitud l , del qual hi penja una massa m). Demostreu que l'equació diferencial del moviment s'escriu, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$, on θ és l'angle respecte de l'eix vertical i g l'acceleració de la gravetat. Comproveu que un pèndol simple descriu un MHS únicament en el límit de petites oscil·lacions (θ inferior a uns 30° aproximadament), amb freqüència $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, l'equació de moviment val, $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \psi)$, i A i ψ depenen de les condicions inicials, θ_0 i $\dot{\theta}_0$ (trobeu-ne la relació).

En el cas general, l'energia potencial val $U(\theta) = 2mgl \sin^2(\frac{\theta}{2})$, si la referim al pla horitzontal que passa pel punt més baix de la seva trajectòria. Noteu que únicament en el cas de petites oscil·lacions pot $U(\theta)$ aproximar-se per una funció proporcional a θ^2 (paràbola simètrica). Una descripció del càlcul del període del moviment d'un pèndol simple quan l'aproximació harmònica no és vàlida pot trobar-se a ORTEGA, c ap. 13.