

# XARXA DE POBLACIONS ESTABLES I TAULES DE MORTALITAT

(calculades amb el model 100 de S. Ledermann)

Armand Sáez



UNIVERSITAT DE BARCELONA



# XARXA DE POBLACIONS ESTABLES I TAULES DE MORTALITAT

(calculades amb el model 100 de S. Ledermann)

Armand Sáez

**Publicacions i Edicions**



UNIVERSITAT DE BARCELONA



## SUMARI

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| Xarxa de poblacions estables .....                       | 7   |
| <i>Red de poblaciones estables</i> .....                 | 25  |
| <i>Network of Stable Populations</i> .....               | 43  |
| <i>Un réseau de populations estables</i> .....           | 61  |
| Taules i resums generals .....                           | 79  |
| Taules de mortalitat. Model 100 de Sully Ledermann ..... | 99  |
| Sèrie de poblacions estables 1 .....                     | 113 |
| Morts per edat .....                                     | 161 |
| Sèrie de poblacions estables A .....                     | 193 |
| Morts per edat .....                                     | 225 |
| Sèrie de poblacions estables B .....                     | 247 |
| Morts per edat .....                                     | 279 |
| Sèrie de poblacions estables C .....                     | 301 |
| Morts per edat .....                                     | 329 |

# XARXA DE POBLACIONS ESTABLES

## ÍNDEX

### Pàgina

|                                                                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. INTRODUCCIÓ .....                                                                                                                                                           | 9   |
| 2. CRITERIS I MÈTODES .....                                                                                                                                                    | 9   |
| 3. LES VARIABLES .....                                                                                                                                                         | 9   |
| 3.1. La taxa de creixement natural .....                                                                                                                                       | 9   |
| 3.2. La fecunditat .....                                                                                                                                                       | 9   |
| 3.3. La mortalitat .....                                                                                                                                                       | 10  |
| 3.3.1. Les taules de mortalitat .....                                                                                                                                          | 10  |
| 4. LA DETERMINACIÓ DE LES POBLACIONS ESTABLES .....                                                                                                                            | 11  |
| 5. EL CÀLCUL: APROXIMACIONS, CONVENCIONS I PRECISIONS .....                                                                                                                    | 12  |
| 6. LES POBLACIONS ESTABLES DETERMINADES PER LA FUNCIO DE<br>SUPERVIVÈNCIA I LA TAXA DE CREIXEMENT NATURAL .....                                                                | 13  |
| 6.1. Les poblacions masculines i la població total .....                                                                                                                       | 14  |
| 6.2. La Sèrie 1 .....                                                                                                                                                          | 15  |
| 7. LES POBLACIONS ESTABLES DETERMINADES PER UNA FUNCIO DE<br>SUPERVIVÈNCIA I LA FECUNDITAT DEFINIDA PER LA SEVA<br>DISTRIBUCIÓ PER EDATS I UNA TAXA BRUTA DE REPRODUCCIÓ ..... | 16  |
| 7.1. El càlcul de $r$ .....                                                                                                                                                    | 16  |
| 7.2. Les sèries A, B, C .....                                                                                                                                                  | 18  |
| 8. RESUMS GENERALS .....                                                                                                                                                       | 19  |
| 9. COHERÈNCIA I CORRECCIÓ DELS CÀLCULS .....                                                                                                                                   | 20  |
| 10. POBLACIONS REPETIDES O GAIREBÉ .....                                                                                                                                       | 20  |
| 11. CONSIDERACIONS GENERALS SOBRE ELS MÈTODES PER CALCULAR<br>XARXES DE POBLACIONS ESTABLES .....                                                                              | 21  |
| 12. OBSERVACIONS FINALS .....                                                                                                                                                  | 22  |
| BIBLIOGRAFIA .....                                                                                                                                                             | 23  |
| Taules i resums generals .....                                                                                                                                                 | 79  |
| Taules de mortalitat. Model 100 de Sully Ledermann .....                                                                                                                       | 99  |
| Sèrie de poblacions estables 1 .....                                                                                                                                           | 113 |
| Morts per edat. Sèrie 1 .....                                                                                                                                                  | 161 |
| Sèrie de poblacions estables A .....                                                                                                                                           | 193 |
| Morts per edat. Sèrie A .....                                                                                                                                                  | 225 |
| Sèrie de poblacions estables B .....                                                                                                                                           | 247 |
| Morts per edat. Sèrie B .....                                                                                                                                                  | 279 |
| Sèrie de poblacions estables C .....                                                                                                                                           | 301 |
| Morts per edat. Sèrie C .....                                                                                                                                                  | 329 |

# XARXA DE POBLACIONS ESTABLES

## 1. INTRODUCCIÓ

S'han construït quatre sèries de poblacions estables amb la finalitat que fossin útils per a estudis històrics, com a ajuda per determinar les característiques d'una població poc o mal coneguda, amb dades fragmentàries, incompletes o incorrectes.

Aquesta finalitat ha determinat l'elecció de les variables i dels seus intervals de variació, així com els criteris i mètodes de selecció de les poblacions. Els càlculs es deriven d'aquestes eleccions i de la teoria i tècniques disponibles. La notació és tradicional o es defineix al moment oportú.

## 2. CRITERIS I MÈTODES

Per al càlcul de les poblacions estables s'ha adoptat, en termes generals, l'enfocament de J. Bourgeois-Pichat (1966).

Una sèrie s'ha construït associant una funció de supervivència,  $p(x)$ , amb una taxa de creixement natural,  $r$ .

I tres sèries més s'han construït associant una funció de supervivència amb la fecunditat definida per un conjunt de taxes brutes de reproducció,  $R$ , i tres distribucions per edat de la fecunditat,  $F(x)$ . Per fer-ho s'han calculat les tres sèries de taxes de creixement que determinen les tres variables ( $R$ ,  $F(x)$ ,  $p(x)$ ).

Un primer criteri general de selecció és que no s'han considerat les poblacions amb creixement negatiu ni superior a 2,5 % –de fet, a 2,56– (per tant, no s'han construït les poblacions corresponents a taxes  $r > 2,5\%$  o  $r < 0$ ).

El segon és que tampoc s'han tingut en compte les poblacions amb una taxa bruta de reproducció superior a 4,5 (amb les excepcions que es veuran més endavant).

Finalment, s'ha considerat útil que fos una xarxa densa, amb petits intervals de variació de les variables que les determinen.

## 3. LES VARIABLES

Les variables que considerem conegudes segons els casos i a les quals assignem un conjunt de valors, elegits en funció dels criteris citats, són les següents:

### 3.1. LA TAXA DE CREIXEMENT NATURAL

Les taxes de creixement natural que s'han triat per construir la primera sèrie són les següents, en %:

- a) el conjunt irregular (pensat, sobretot, per a poblacions prehistòriques o molt antigues)  
0,00 (població estacionària), 0,01, 0,025, 0,050, 0,10
- b) la sèrie  
0,25 – 0,50 – 0,75 – ... – 2,25 – 2,50 (15 en total)

### 3.2. LA FECUNDITAT

La fecunditat es concreta en una sèrie de valors de la *taxa bruta de reproducció*:  
1 – 1,5 – 1,75 – 2 – 2,25 – 2,50 – 2,75 – ... – 4,25 – 4,50 (14 en total)

i tres *distribucions per edat* (taula A i gràfic A) que tenen com a mitjana les edats: 27, 29, 31 anys.

Les tres distribucions són una estilització de la mitjana dels països d'alta fecunditat cap a la meitat del segle XX i de dos dels seus extrems, superior i inferior, de variació.

Aquesta aproximació empírica ha semblat més realista i útil que les distribucions homotètiques, a partir d'un model, de Coale-Demeny, per exemple.

### 3.3. LA MORTALITAT

La funció de supervivència és l'expressada per una sèrie de taules de mortalitat (de cada sexe, M i F, i de tota la població MF) que tenen com a esperança de vida en néixer (de tota la població),  $e_0MF$ , la sèrie:

20, 22, 24, ..., 36, 38, 40 anys; en total, per tant, 11.

Les taules de mortalitat són les corresponents al model 100 de S. Ledermann (que té  $e_0MF$  com a "entrada").

#### 3.3.1. Les taules de mortalitat

L'obra de S. Ledermann *Nouvelles tables-type de mortalité* (INED, 1969) es concreta, després del text i l'argumentació estadística, en set models de taula de mortalitat d'una entrada i tres de dos entrades (*entrada*: variable que, a partir d'un valor conegut, permet el càlcul de tota la taula de mortalitat, de cada sexe i de tota la població), seguits d'uns conjunts de taules corresponents a cada model —a una sèrie de valors de cada entrada—. *Són aquestes taules publicades les que normalment s'han citat i utilitzat en les últimes dècades* (el llibre explica detalladament com s'han de fer les interpolacions).

Els models són senzilles equacions lineals del tipus:

$$\log q_x = a_{0x} + a_{1x} \cdot \log Q + \varepsilon_x$$

(per als models d'una entrada; amb un altre terme  $a_{2x} Q$  si són de dues entrades)  $Q$ , es el valor conegut d'una variable (*l'entrada*); les  $a$  són els coeficients corresponents a cada edat  $x$ ;  $\varepsilon_x$  és una mesura de dispersió per cada edat; permet calcular els valors dels límits màxim i mínim de l'interval de  $q_x$  que correspon al valor de l'entrada, i del qual  $q_x$ , la solució de l'equació, és la mediana. Ledermann raona i justifica que aquest  $q_x$  (la mediana) és el més adequat i convenient per a la taula que es busca, corresponent al valor  $Q$  conegut (d'una sèrie de variables).

*S'ha escollit el model 100*, que té com a entrada, justament,  $e_0MF$ , perquè es demostra que és una bona síntesi de la informació coneguda sobre el període 1900-1950, amb algunes incursions al segle XIX.

Paradoxalment, per raons que Ledermann explica clarament, el model dona com a resultat una taula de mortalitat amb una  $e_0MF$  *diferent* a l'entrada (per exemple, la primera de les publicades d'aquest model, amb una entrada de  $e_0MF = 25$ , té com a  $e_0MF$  resultant 20,86).

*A l'obra de Ledermann es publiquen les taules amb els valors  $a$  de cada edat i sexe i del total, de tots els models.*

En conseqüència, actualment, amb un PC i un full de càlcul, i introduïts els valors de  $a_x$  i l'equació del model, es calcula tota la taula per un valor  $e_0MF$  aproximat al que es vol obtenir, i després, amb ràpids temptejos canviant el valor de l'entrada (que

fan canviar automàticament tota la taula) s'aconsegueix fàcilment que  $e_0^{MF}$  –o qualsevol altra variable– tingui el valor que es desitja, amb la precisió que es vulgui.

A la taula B figuren els valors de l'entrada amb què s'han calculat les taules de mortalitat, amb les  $e_0^{MF}$  que s'han enumerat abans (i les corresponents  $e_0^M$  i  $e_0^F$ ) i que són les utilitzades a totes les sèries. Totes les taules estan agrupades al capítol "Taules de mortalitat". Les taules arriben fins als 90 anys –edat exacta– (l'últim valor de  $q_x$ ,  $s_q$  85 es calcula amb una equació *ad hoc*). A partir del conjunt  $\{q_x\}$  i d'una arrel  $\ell_0 = 100.000$  es calculen les sèries  $\ell_x$ ,  $d_x$ ,  $L_x$ ,  $m_x$  i  $e_x$  per a cada sexe i el total. Per als primers cinc anys de vida s'ha admès que  $L_0 = 0,25\ell_0 + 0,75\ell_1$  i que  $L_{1-4} = 1,9\ell_1 + 2,1\ell_5$ .

Per a la resta de  $L_x$  s'ha aplicat l'expressió tradicional  $(\ell_x + \ell_{x+5}) \times 2,5$ .

Això implica que  $e_{90} = 2,5$ . Els altres valors utilitzats són molt semblants (com per exemple  $\log \ell_{90}$ ) i no afecta pràcticament els valors de  $e_0$  (en valors enters). Aquests valors s'han calculat fins al 5è decimal, com mostra la taula B.

S'ha de precisar que per calcular  $L_0$  i  $L_{1-4}$  s'han assajat també les expressions de Coale-Demeny (1966),  $L_0 = 0,34 \ell_0 + 0,66 \ell_1$ , i  $L_{1-4} = 1,36 \ell_1 + 2,64 \ell_5$ .

*La coherència general de la xarxa de poblacions estables és millor amb les fórmules que hem utilitzat* (vegeu l'epígraf 9), que són les de la primera sèrie de taules-model de mortalitat de l'ONU (1957), ideada i creada per V. Valaoras.

#### 4. LA DETERMINACIÓ DE LES POBLACIONS ESTABLES

Les variables seleccionades, considerades constants, invariables en el temps, determinen una població estable. Les principals fórmules que les relacionen i defineixen i en què es basen els càlculs, figuren a continuació. Es refereixen a una població igual a la unitat i al sexe femení (com és sabut, la seva formulació simultània per als dos sexes és incompatible).

- a) relació entre la mortalitat, la fecunditat i la taxa de creixement natural:

$$\int_u^v e^{-rx} \cdot p(x) \cdot \phi(x) \cdot dx = 1 \quad (1)$$

designant per  $p(x)$  la funció de supervivència i per  $\phi(x)$  la de fecunditat;  $u$  i  $v$  són les edats mínima i màxima de possibilitat de concepció i es considera convencionalment que  $u = 15$  i  $v = 50$  anys (de vegades, es fa  $v = 45$ ).

- b) la població d'edat  $x$  i la distribució per edats de la població vénen determinades per:

$$c(x) = e^{-rx} \cdot p(x) \cdot dx \quad (2)$$

$$C(x) = \frac{e^{-rx} \cdot p(x) \cdot dx}{\int_u^w e^{-rx} \cdot p(x) \cdot dx} \quad (2 \text{ bis})$$

- c) la taxa bruta de natalitat ve definida per:

$$b = \frac{1}{\int_u^w e^{-rx} \cdot p(x) \cdot dx} \quad (3)$$

- d) la taxa bruta de mortalitat es pot expressar per:

$$d = b - r \quad (4)$$

$$\text{i per } d = \frac{\int_u^w e^{-rx} \cdot p(x) \cdot q(x) \cdot dx}{\int_u^w e^{-rx} \cdot p(x) \cdot dx} \quad (4 \text{ bis})$$

- e) les defuncions ( $D(x)$ ) i la seva distribució per edats ( $d(x)$ ) vénen determinades per:

$$D(x) = e^{-rx} \cdot p(x) \cdot q(x) \cdot dx \quad (5)$$

$$d(x) = \frac{e^{-rx} \cdot p(x) \cdot q(x) \cdot dx}{\int_0^w e^{-rx} \cdot p(x) \cdot q(x) \cdot dx} \quad (5 \text{ bis})$$

f) la taxa bruta de reproducció està definida per:

$$R = \int_0^v \varphi(x) \cdot dx \quad (6)$$

en què  $\varphi(x)$  és la funció de fecunditat (i la seva distribució per edats es designa  $F(x)$ )

g) la taxa neta de reproducció està definida per

$$R_0 = \int_0^v p(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \quad (7)$$

L'associació d'una funció de supervivència i d'una taxa de creixement natural determina una població estable i només una. Però l'associació d'una fecunditat resumida per la taxa bruta de reproducció i d'una funció de supervivència pot generar més d'una població (J. Bourgeois-Pichat) (1994), com es comprovarà més endavant. Per determinar una única població cal afegir-hi la distribució de la fecunditat per edats.

S'ha calculat la Sèrie 1 associant les 11 taules de mortalitat abans definides amb les 15 taxes de creixement enumerades, *i no considerant les poblacions que resultaven amb una  $R > 4,5$  per a la distribució  $F(x)$  amb 29 anys de mitjana*. Les 165 possibles es converteixen en 146. I s'han calculat tres sèries, A, B, C, associant les 13 R i les 3  $F(x)$  suposades, amb les 11 taules de mortalitat. Les 462 possibles es converteixen en 251, eliminant les que resulten amb  $r < 0$  i  $r > 2,5 \%$ .

El seu càlcul i presentació es concreten als epígrafs següents.

## 5. EL CÀLCUL: APROXIMACIONS, CONVENCIONS I PRECISIONS

Tots els càlculs s'han efectuat amb un PC i un full de càlcul modern.

El programa treballa calculant fins a 15 decimals. Per tant, tots els números que es presenten són arrodonits, però calculats amb l'anterior precisió.

El càlcul es fa amb quantitats discretes, els valors indicats a l'epígraf 3. En conseqüència, cal traduir les anteriors fórmules de càlcul infinitesimal en termes de càlcul algebraic, discret, i això comporta una sèrie d'aproximacions que s'admeten generalment.

Ara, tot i que s'admeten generalment, cal remarcar que són aproximacions i que això pot significar diferències quan un resultat ha de complir una relació determinada o es pot obtenir per diferents camins, càlculs o utilitzant diferents variables. Com que aquest serà el cas, com es veurà més endavant, serà possible fer-se una idea de la correcció de les aproximacions i de la seva coherència comparant aquests resultats entre si i/o comprovant si verifiquen determinades relacions.

Tractem en general amb grups d'edat de cinc anys. Per alleugerir l'escriptura i quan no indueixi a confusió, denotarem en general  $x$  per significar grup d'edat ( $x, x+5$ ). Cal precisar que quan es diu ( $x, x+5$ ),  $x$  és una *edat exacta*. Les taules de presentació, com és habitual, es refereixen a població o fets demogràfics (com les defuncions) en termes d'edat en anys fets (referint-se a un moment del temps). En resum, a les formulacions següents,  $C_x$ , per exemple, vol dir exactament  $C_{x, x+5}$  i la taula estadística corresponent dirà, per exemple, (20-24), no (20-25).

La mitjana d'un grup d'edat s'expressarà en *edat exacta*; així, la mitjana del grup d'edats (1-5), en edats exactes, (1-4) en anys fets, és 3, edat exacta (el 3r aniversari és la mitjana de l'interval de temps transcorregut entre el 1r i el 5è aniversari).

Finalment, sembla convenient recordar que s'ha triat com a valor de l'arrel de la taula de mortalitat (de  $\ell_0$ ) 100.000; per tant, per comoditat i coherència dels càlculs, és convenient continuar suposant que es tracta d'una població (femenina) amb 100.000 naixements anuals.

## 6. LES POBLACIONS ESTABLES DETERMINADES PER LA FUNCIO DE SUPERVIVÈNCIA I LA TAXA DE CREIXEMENT NATURAL (QUAN SÓN CONEGUDES)

Les variables  $p(x)$  i  $r$ , invariables en el temps, determinen una població estable. És a dir que, quan són conegudes, permeten definir-la numèricament. Considerant que tenen els valors que hem enumerat anteriorment (epígraf 3), s'han calculat les seves característiques com s'indica a continuació, considerant que la població no és igual a la unitat sinó a la que generen 100.000 naixements femenins. És a dir, que continuem referint-nos exclusivament a la població femenina. Posteriorment es concretarà com es tracten la població masculina i la població total.

### a) Estructura per edats de la població

La funció de supervivència en termes discrets i anys fets (referida a un moment del temps) s'expressa per la sèrie  $L_x$  de la taula de mortalitat coneguda.

Per a un grup de cinc anys, s'admet que la fórmula (2) es pot expressar així:

$$c_x = e^{-r\alpha} \cdot L_x \quad (8)$$

essent  $\alpha$  l'edat mitjana del grup quinquennal d'edat (en general, de  $x+n$ ).

La seva proporció sobre el total és:

$$C_x = \frac{e^{-r\alpha} \cdot L_x}{\sum_0^w e^{-r\alpha} \cdot L_x} \quad (8 \text{ bis})$$

En conseqüència, es multiplica la sèrie  $L_x$  per  $e^{-r\alpha}$ , per  $\alpha = 0,5; 3; 7,5; 12,5; \dots$  per tenir la població de cada edat. La divisió pel total de població, de tots els grups, ens donarà la distribució de la població per edats.

### b) La taxa de natalitat

S'admet igualment que la fórmula 3, en termes discrets, pren aquesta forma:

$$b = \frac{1}{\sum_0^w e^{-r\alpha} \cdot L_x} \quad (9)$$

que per a 100.000 naixements és:  $b = \frac{100.000}{\sum_0^w e^{-r\alpha} \cdot L_x} \quad (9 \text{ bis})$

### c) La taxa de mortalitat

La fórmula 4 continua sent vàlida:  $d = b - r$ .

### d) La distribució de les defuncions per edat

S'admet que les defuncions d'un grup d'edat es poden expressar per:

$$D_x = e^{-r\alpha} L_x \cdot q_\alpha \quad (10)$$

i a més s'admet que la probabilitat  $q_x$  és igual a la taxa de mortalitat del grup  $x$ ,  $m_x$ .

$$\text{En definitiva,} \quad D_x = e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot m_x \quad (11)$$

$$\text{i} \quad d_x = \frac{e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot m_x}{\frac{w}{0} e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot m_x} \quad (12)$$

Per tant, concretament, multiplicant la població d'edat  $x$  per  $m_x$  es tenen les defuncions d'aquesta edat i dividint les de totes les edats pel total de defuncions la seva distribució.

Observem de pas que si tenim el total de defuncions, dividint-lo per la població també obtenim  $d$ , la taxa bruta de mortalitat, que ha de ser la mateixa que la calculada amb  $d = b - r$ . És el que diu la fórmula 4 *bis*, en termes discrets:

$$d = \frac{\frac{w}{0} e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot m_x}{\frac{w}{0} e^{-r\alpha} \cdot L_x}$$

#### e) La taxa bruta de reproducció

S'admet que la fórmula 1 en termes discrets és:

$$\frac{v}{u} e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot f_x = 100.000 \quad (13)$$

(quan es considera una població femenina amb 100.000 naixements).

Hem partit de la base que no coneixem  $f_x$  (només  $L_x$  i  $r$ ). Per tant, cal una condició suplementària per fixar la fecunditat. Aquesta condició és  $F(x)$ , la distribució de la fecunditat per edats (si no coneixem ni això, la fecunditat de la població no es pot determinar). Si es coneix  $F(x)$ , llavors (estem parlant de grups quinquennals d'edat):

$$R \cdot F_x = 5 f_x, \text{ per tant, } f_x = \frac{R \cdot F_x}{5} \quad (14)$$

i l'anterior equació (13) es pot escriure així:

$$R \frac{v}{u} e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot F_x = 500.000$$

$$\text{Per tant,} \quad R = \frac{500.000}{\frac{v}{u} e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot F_x} \quad (15)$$

En conseqüència, definida una població estable femenina, s'han calculat les tres taxes brutes de reproducció que pot tenir, segons les tres distribucions  $F(x)$  que s'han suposat, i les taxes de fecunditat femenines per edat.

#### f) La taxa neta de reproducció

La fórmula (7) en termes discrets és:

$$R_0 = \frac{50}{15} L_x \cdot f_x \quad (16)$$

Com que  $L_x$  prové d'una rel  $\ell_0 = 100.000$  i  $f_x$  –taxa de fecunditat femenina referida als naixements femenins– s'expressa en ‰, la multiplicació de  $L_x$  per  $f_x$  s'ha de dividir per (1.000x100.000).

## 6.1. LES POBLACIONS MASCULINES I LA POBLACIÓ TOTAL

Totes les fórmules són vàlides per a la població masculina tota sola. Però no ho són si es vol sumar amb la població femenina per obtenir la població total. Per fer-ho cal tenir en compte la desigualtat numèrica dels sexes en el conjunt dels naixements. S'admet, de manera estàndard, que la relació de masculinitat dels naixements (proporció

de mascles sobre femelles) és constant i d'un valor als voltants d'1,05, que serà el que adoptarem.

Per tant, quan es vol calcular la població total, sumant la masculina i la femenina, prèviament cal multiplicar la primera per 1,05 i considerar, en el nostre cas, que els naixements masculins són 105.000 i que, per tant, els totals són 205.000.

És a dir (i diferenciant les  $L_x$  de les taules de mortalitat masculina i femenina amb un apòstrof):

$$\text{Població total de l'edat } x = e^{-r\alpha} \cdot L_x \text{ (dones)} + e^{-r\alpha} \cdot 1,05 L'_x \text{ (homes)}$$

$$\text{Població total} = \sum_0^w e^{-r\alpha} \cdot L_x + \sum_0^w e^{-r\alpha} \cdot 1,05 L'_x$$

$$\text{Taxa bruta de natalitat (de tota la població)} = \frac{205.000}{\text{Població total}}$$

$$\text{Estructura per edats de la població (total)} = \frac{\text{Població total edat } x}{\text{Població total}}$$

Igualment, en el càlcul de les defuncions totals per edat de la població, cal multiplicar el  $L_x$  masculí per 1,05, abans de multiplicar per  $m_x$ , la taxa de mortalitat de l'edat  $x$  (de la taula de mortalitat masculina). És a dir, es calcula primer la població masculina, com s'ha dit unes ratlles més amunt, i després les defuncions, abans de sumar-les, totes dues, amb la població i les defuncions femenines, per obtenir la població i les defuncions totals.

Per tant, les defuncions totals de l'edat  $x$  són:

$$e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot m_x + e^{-r\alpha} \cdot 1,05 L'_x \cdot m'_x$$

La seva suma són les defuncions totals i amb la divisió de les primeres per la segona s'obté l'estructura per edat de les morts de la població. La taxa de reproducció bruta es calcula com s'ha dit abans; però si es volen conèixer les *taxes de fecunditat* (comprentent naixements masculins i femenins), cal multiplicar les femenines ( $f_x = \frac{R \cdot F(x)}{5}$ ) per 2,05.

## 6.2. LA SÈRIE 1

La Sèrie 1 de poblacions estables s'ha calculat com s'acaba d'explicar. Els valors de  $r$  i de  $L_x$  són els adoptats (epígraf 3).

Com s'ha dit abans, les 165 poblacions possibles es converteixen en 146, quan s'eliminen aquelles que amb la distribució de la fecunditat per edats,  $F(x)$ , mitjana 29 anys, resulta que tenen una  $R > 4,5$  (si  $R(29) < 4,5$ , però  $R(27)$  o  $R(31)$  o les dues, resulten superiors a 4,5, la població es considera i està recollida a la Sèrie).

La Sèrie està precedida per un resum amb les principals variables de cada població.

Les poblacions s'agrupen pels valors de  $e_0MF$  en ordre creixent, i a cada  $e_0$  per  $r$ , i en ordre també creixent.

Per cada població es mostra:

- l'estructura per edats i sexes (per grups quinquennals estàndard, iguals al de les taules de mortalitat) sobre un total de 100.
- les principals característiques, a sota de cada població, en dues columnes; a la primera hi figuren:  
 $e_0MF$  esperança de vida, en néixer, de la població (de tots dos sexes alhora)

$R$  taxa bruta de reproducció (corresponent a la distribució per edats de la fecunditat de 29 anys de mitjana)  
 $r$  taxa anual de creixement natural  
 $b$  taxa bruta de natalitat  
 $d$  taxa bruta de mortalitat

A la segona columna hi ha:

$R(31)$  taxa bruta de reproducció corresponent a la distribució per edats de 31 anys de mitjana

$R(27)$  taxa bruta de reproducció corresponent a la distribució per edats de 27 anys de mitjana

$e_0 M$  esperança de vida en néixer del sexe masculí

$e_0 F$  esperança de vida en néixer del sexe femení

Després de les poblacions figuren, agrupades pels mateixos criteris, i per tant amb un ordre estrictament correlatiu al de les poblacions, les estructures per edat de les defuncions *de tota la població* (tots dos sexes alhora), sobre un total de 100,00.

Hi ha dues classificacions per edat d'aquesta estructura. La que s'ha contemplat en el text, la proporció de cada grup d'edats sobre el total. Però a efectes d'aplicació pràctica i de la realitat documental s'ha considerat útil presentar també la composició per edat de les morts de cada població, sobre el total de les morts menys la de nens que no han fet un any (total- $d_0$ ), d'edat 0.

## 7. LES POBLACIONS ESTABLES DETERMINADES PER UNA FUNCIO DE SUPERVIVÈNCIA I LA FECUNDITAT DEFINIDA PER UNA TAXA BRUTA DE REPRODUCCIÓ I LA SEVA DISTRIBUCIÓ PER EDATS

Una mortalitat i una fecunditat constants determinen una població estable. El problema que es planteja és establir-la numèricament quan aquestes fecunditat i mortalitat es coneixen; la segona en forma de taula de mortalitat i la primera en forma de distribució per edats de la fecunditat i de taxa bruta de reproducció (equivalent, com s'ha vist –fórmula 14–, a conèixer el conjunt de les taxes femenines de fecunditat). Les relacions entre fecunditat i mortalitat, en una població igual a la unitat, s'expressen en una equació en  $r$  (com s'ha dit anteriorment):

$$\int_0^{\infty} e^{-rx} \cdot p(x) \cdot \phi(x) \cdot dx = 1 \quad (1)$$

Resolent-la, convertim el problema en l'anterior i el resollem de la mateixa manera (sense calcular  $R$ , que ja coneixem).

### 7.1. EL CÀLCUL DE $r$

Hi ha diferents mètodes per resoldre l'equació (1) coneixent  $p(x)$  i  $\phi(x)$ , i calcular  $r$ , sempre de manera més o menys aproximada. Aquests mètodes els expliquen detalladament J. Bourgeois-Pichat (1966) i N. Keyfitz. L'equació 1 té una arrel real i infinites arrels imaginàries; aquestes arrels imaginàries expliquen les oscil·lacions de la població abans d'arribar a l'estat estable, en què la taxa de creixement és constant, i igual a l'arrel real,  $r$ .

Per trobar l'arrel real, s'ha seguit el camí tradicional proposat pel mateix Lotka; la seva laboriositat (incentiu d'A. Coale el 1957 per proposar el seu mètode), actualment, amb un PC i un full de càlcul no és cap problema. És una aproximació

numèrica que fa intervenir un desenvolupament en sèrie (recordeu que parlem d'una població femenina igual a la unitat).

Després de diverses transformacions matemàtiques i de l'ús dels conceptes de *moment* i *cumulant* d'ordre  $n$ ,  $R_n$  i  $\mu_n$ , s'arriba a l'expressió:

$$\mu_1 r - \mu_2 \frac{r^2}{2!} + \mu_3 \frac{r^3}{3!} - \dots - \lambda n R_0 = 0 \quad (17)$$

Els moments  $R_n$  estan definits per la integral  $\int_0^\infty x^n f(x) dx$

Si la funció és  $p(x) \cdot \varphi(x)$ , els moments seran  $\int_0^\infty x^n p(x) \varphi(x) dx$

En termes discrets:

$$R_0 = \frac{50}{15} L_x \cdot f_x \quad (18)$$

(és la taxa neta de reproducció –fórmula 16)

$$R_1 = \frac{50}{15} L_x \cdot f_x \cdot \alpha \quad (\alpha \text{ edat mitjana del grup } x) \quad (19)$$

$$R_2 = \frac{50}{15} L_x \cdot f_x \cdot \alpha^2 \quad (20)$$

.....

Els *cumulants*, funció dels moments (solució d'una sèrie d'equacions en  $R_n$ ) s'expressen per:

$$\mu_1 = \frac{R_1}{R_0}, \quad \mu_2 = \frac{R_2}{R_1}, \dots \quad (21)$$

Substituint  $R_1$  i  $R_0$  pels seus valors (18 i 19), resulta que  $\mu_1$  és l'edat mitjana de les mares en néixer les seves filles a la població estacionària ( $L_x$ ).

$$\mu_1 = \frac{\frac{50}{15} L_x \cdot f_x \cdot \alpha}{\frac{50}{15} L_x f_x} \quad (22)$$

Per la mateixa taula de mortalitat, i donada una funció de distribució de la fecunditat  $F(x)$ ,  $\mu_n$  és el mateix per a totes les poblacions estables que les tinguin en comú, sigui quina sigui  $R$ .

Considerant només el primer i l'últim terme de l'expressió (17), i negligint la resta, s'obté, com a primera aproximació, un valor de  $r$ :

$$r = \frac{\lambda n R_0}{\mu_1} \quad (23)$$

Aquest és el càlcul aproximat de  $r$  que normalment es troba als manuals de demografia.

Considerant, a més, el segon terme, s'obté la segona aproximació de  $r$ , millor que la primera i suficient, pràcticament del tot, per a les poblacions humanes:

$$r = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1 - 2\mu_2 \lambda n R_0}}{\mu_2} \quad (24)$$

(el signe de davant del radical es tria de forma que doni un valor aproximat al de la primera aproximació; els detalls del càlcul a J. Bourgeois-Pichat (1966)).

Les diferències entre la primera i la segona aproximació es mostren a la taula C, amb l'exemple de les poblacions de la sèrie B que corresponen a les esperances de vida en néixer de 28 i 30 anys i nou (9) taxes brutes de reproducció; en total, 18 poblacions. La primera aproximació –en termes de percentatge, amb dos decimals–, és bona i

suficient en la majoria dels casos, és a dir per als valors normals històricament (entre 0 i 2) de  $r$ ; a mesura que  $r$  augmenta, disminueix la precisió.

Per maximitzar l'exactitud i coherència dels resultats (taula 1), s'ha arribat fins a la segona aproximació.

Com que s'ha considerat que es coneixia una sèrie de taxes brutes de reproducció,  $R$ , i tres distribucions per edat de la fecunditat  $F_i(x)$  –amb mitjanes de 31, 29 i 27 anys–, hi havia dues possibilitats.

- a) Calcular  $r$  amb els valors de  $R$  i un conjunt  $F(x)$  i, quan estiguessin determinades les poblacions, calcular per a cada una els altres dos valors de  $R$ , corresponents a les altres dues distribucions  $F(x)$  (procediment seguit per Coale-Demeny (1966)); això permetria definir 165 poblacions ( $11/e_0 \times 14/R$ ) –menys aquelles amb  $r < 0$  o  $r > 2,5$ – estructurades pels valors de  $e_0MF$  i  $R$ .
- b) Calcular  $r$  amb els valors de la sèrie de  $R$  i cada una de les tres distribucions  $F(x)$ ; per tant, aproximadament, tres vegades més de  $r$  –i de poblacions– i una xarxa molt més atapeïda, estructurada per l'única sèrie de  $R$  i les tres distribucions  $F(x)$ , a més dels valors de  $e_0MF$ .

S'ha seguit la segona possibilitat i per tant s'han calculat tres conjunts de  $r$ , en funció de l'associació de la sèrie  $e_0MF$  i la sèrie  $R$  amb cada una de les  $F(x)$ :  $R(31)$ ,  $R(29)$ ,  $R(27)$ .

Els tres conjunts s'han sotmès a la restricció, per l'acceptació de  $r$ , que  $r > 0$  i  $r \leq 2,5$  (realment, recordeu, 2,56).

## 7.2. LES SÈRIES A, B, C

Amb cada una de les sèries de  $r$  s'ha procedit com en el cas anterior per al càlcul de les poblacions, les seves defuncions i les seves característiques. Només s'havien de calcular les  $R$  corresponents a les dues  $F(x)$  no utilitzades en el càlcul de  $r$  (i és quan en alguns casos tornen a aparèixer, de manera similar a la sèrie 1,  $R > 4,5$ ).

En resum, s'han determinat tres sèries:

Sèrie A: 87 poblacions ( $R(31)$ )

Sèrie B: 86 poblacions ( $R(29)$ )

Sèrie C: 78 poblacions ( $R(27)$ )

Un resum molt sintètic de les tres sèries figura a la taula D.

En total 251 poblacions, que amb les 146 de la Sèrie 1 formen un conjunt de 397 poblacions estables.

Les tres sèries es presenten de manera similar a la Sèrie 1, però dintre de cada grup, segons  $e_0MF$ , s'ordenen per valors creixents de  $R$  (la  $R$  utilitzada en el seu càlcul). Cada sèrie està precedida per un resum amb les principals variables de cada població.

A sota de les poblacions representades per la seva estructura per edats i sexes (també sobre un total igual a 100,00), hi figuren les seves principals característiques en dos columnes:

a la primera igual que a la sèrie 1:

$e_0MF$

$R$  taxa bruta de reproducció; la utilitzada en el càlcul de  $r$  juntament amb la distribució per edats de la fecunditat que defineix la sèrie.

$r$ ,  $b$  i  $d$  (mateix significat que a la sèrie 1)

a la segona columna hi figuren:

$R_0$  taxa neta de reproducció corresponent a la  $R$  anterior ( $R_0$  no s'ha calculat a la sèrie 1).

$R(y)$   
 $R(z)$  les taxes brutes de reproducció corresponents a la població si la distribució per edats de la fecunditat fos  $F(y)$  o  $F(z)$ , les altres distribucions. És a dir que a la sèrie A seran  $R(29)$  i  $R(27)$ ; a la sèrie B seran  $R(31)$  i  $R(27)$ ; i a la sèrie C,  $R(31)$  i  $R(29)$ .

$e_0M$  i  $e_0F$ , com a la sèrie 1.

El mateix ordenament tenen les sèries d'estructura dels morts per edat de cada població, que segueixen posteriorment, i que estan presentats de la mateixa manera que a la sèrie 1: sobre el total i sobre el total menys les morts de 0 anys (abans de complir el 1r aniversari), i de tota la població (tots dos sexes alhora). S'identifica la població amb les mateixes variables que a la Sèrie 1 però en ordre diferent, com les poblacions:  $e_0MF$ ,  $R$ ,  $r$ .

## 8. RESUMS GENERALS

A causa de la varietat de sèries i de l'encreuament i encavalcament de variables, es presenten diferents resums generals de les sèries A, B, C, i un de totes les sèries, de manera que ofereixin visions de conjunt de les poblacions i dels seus paràmetres essencials,  $e_0MF$ ,  $R$  i  $r$ .

Les taules 1 i 2 recullen els resultats del càlcul de  $r$ , a partir d'una funció de supervivència –representada simbòlicament per  $e_0MF$ – una taxa bruta de reproducció,  $R$ , –la línia superior– i les tres distribucions per edat de la fecunditat, A, B, C.

Taula 1(a) Totes les  $r$  resultat del càlcul.

Taula 1(b) Les  $r$  seleccionades amb el criteri  $0 < r \leq 2,5$  (de fet, 2,56).

Taula 1(c) Igual que l'anterior, però més compacta.

Taula 2 Síntesi de les anteriors; les poblacions de les tres sèries, ordenades per iguals  $e_0MF$  i  $R$ , i les  $r$  en ordre decreixent.

Les taules 3, 4 i 5 recullen els diferents conjunts de  $R$  de les poblacions de A, B, C.

Taula 3  $R$  calculades *a posteriori* a les poblacions determinades per una  $R$  i una  $F(x)$  amb la mateixa  $F(x)$ ; haurien de ser les mateixes que les de partida; ho són gairebé sempre, excepte pels valors de  $R$  3,25 – 3,75 – 4,25 quan  $e_0MF$  va augmentant els seus; la diferència és d'una centèsima.

Taules 4(a)(b)(c) Recullen per a cada població d'una sèrie calculada amb una distribució  $F(x)$  i una  $R$ , les  $R$  corresponents a les altres dues distribucions.

Taula 5 Recull les taxes netes de reproducció,  $R_0$ , que correspon en cada sèrie a les taxes brutes de reproducció,  $R$ , i a la distribució  $F(x)$ , que han servit per calcular les  $r$  i poblacions de la sèrie.

Les taules 6 recullen totes les  $R$  corresponents a una distribució  $F(x)$  de totes les poblacions de les tres sèries; les poblacions s'identifiquen per  $e_0MF$  i  $r$ ; les  $r$  estan ordenades per ordre decreixent.

Taula 6(a) Totes les  $R(31)$ ; les calculades amb la sèrie adoptada de  $R$  i la distribució  $F(31)$ , i les de les altres sèries calculades amb aquesta distribució.

Taula 6(b) Igualment, per  $R(29)$ .

Taula 6(c) Igualment, per  $R(27)$ .

(Les  $r$  i  $R$  de les poblacions de la sèrie amb  $F(x)$  igual a la indicada  $-R(x)-$  estan en negreta).

La taula 7 és una síntesi de les tres sèries A,B,C, i 1, i totes les poblacions, ordenades per valors creixents de  $e_0MF$ , identificades per  $r$  en ordre decreixent; i amb els tres valors de  $R$  corresponents a les tres distribucions  $F(x)$ .

## 9. COHERÈNCIA I CORRECCIÓ D'APROXIMACIONS I CÀLCULS

La magnitud de les operacions i dels resultats és considerable i el càlcul de les poblacions i les seves característiques es basa en una sèrie d'aproximacions.

Per comprovar la correcció dels càlculs i de les aproximacions i la seva coherència s'han realitzat una sèrie d'operacions i tabulacions:

- Com s'ha dit anteriorment (epígraf 6) s'admet que la fórmula (1), en termes discrets, es pot expressar per la fórmula (13)

$$\frac{v}{u} e^{-r\alpha} \cdot L_x \cdot f_x = 100.000 \quad (13)$$

(quan es considera una població femenina amb 100.000 naixements)

Per tant, es pot comprovar si les  $r$  calculades verifiquen l'equació 13 –un cop determinades les poblacions i les  $f_x$  femenines (respecte als naixements femenins). *En tots els casos el resultat ha estat 100.000 exactament.*

- S'ha calculat  $R$  a les poblacions determinades per  $R$  i  $F(x)$  (Taula 3 dels resums generals). L'acord entre aquesta  $R$  i la inicial és bo, com s'ha vist, amb tendència a disminuir una centèsima quan augmenta  $e_0MF$  (o  $r$ ).
- S'ha calculat  $d$  amb les fórmules:  $d = b - r$

$$i \quad d = \frac{\text{defuncions totals}}{\text{Població total}}$$

El resultat és el mateix o amb diferències d'una centèsima de punt percentual –i molt poques vegades dues–, quan  $r$  augmenta.

Quan s'utilitzen per a  $L_0$  i  $L_{1-4}$  les expressions de Coale-Demeny (epígraf 3.3.1.), les diferències d'una centèsima es generalitzen, les de dos augmenten molt, i algunes vegades s'arriba a tres i quatre (amb la mateixa tendència que anteriorment: quan  $r$  augmenta).

Com s'ha afirmat a l'epígraf 4 i mostra la taula 7, les poblacions amb la mateixa funció de supervivència i la mateixa taxa bruta de reproducció són diferents quan la fecunditat té una distribució per edats diferent. Per contra, dues poblacions, amb les mateixes  $r$  i  $e_0MF$ , tenen diferents taxes brutes de reproducció, en funció de la distribució per edats de la fecunditat femenina.

## 10. POBLACIONS REPETIDES O GAIREBÉ

La taula 7 evidencia que hi ha poblacions repetides a les diferents sèries (iguals  $r$  i  $R$  per a una mateixa  $e_0MF$ ) o gairebé. És a dir, poblacions d'una sèrie iguals a una altra població d'una altra sèrie. I també que hi ha poblacions que si estrictament no són les mateixes, s'hi aproximen molt (diferències entre les seves  $r$  d'una o dues centèsimes de punt percentual). Concretament, al conjunt de les poblacions de les sèries A, B i C, hi ha 12 poblacions que es troben repetides en diferents sèries. I 29 que pràcticament s'acosten a la mateixa situació.

És a dir, que les 251 poblacions de les tres sèries es divideixen en 208 poblacions, 12 que són repeticions d'alguna de les anteriors, i 31 que s'hi assemblen molt (en el sentit precís indicat).

Si considerem la Sèrie 1 i la comparem amb el conjunt  $\{A, B, C\}$ , –taula 5– comprovem que 7 poblacions són repeticions d'alguna de les tres sèries i que 33 són gairebé iguals (en el mateix sentit que anteriorment) que unes altres 33 de  $\{A, B, C\}$ .

En resum, doncs, les 397 poblacions de les sèries A, B, C i 1 es classifiquen entre 314 poblacions, 19 que són duplicacions d'alguna de les anteriors i 64 que són molt semblants.

Aquestes poblacions repetides o gairebé a diferents sèries aporten l'última prova de la coherència i correcció dels càlculs i les aproximacions: per a una mateixa  $e_0MF$ , a una  $r$  igual li correspon  $R$  iguals per a les mateixes  $F(x)$ , o amb diferències entre dues  $R$  d'una mateixa  $F(x)$  d'una centèsima. Per les gairebé repetides es produeix un fet anàleg: diferències mínimes entre  $R$  (una o dues centèsimes) per a iguals diferències entre  $r$ .

En conseqüència, es pot afirmar, a part de la correcció dels càlculs, que les aproximacions admeses es confirmen àmpliament com a justificades i que la coherència general de la xarxa és força bona.

## 11. CONSIDERACIONS GENERALS SOBRE ELS MÈTODES PER CALCULAR XARXES DE POBLACIONS ESTABLES

Quan es defineix una sèrie de poblacions estables a partir d'un parell de variables fonamentals, com la funció de supervivència,  $p(x)$ , i la taxa de creixement natural,  $r$ , o la funció de supervivència i la funció de fecunditat –definida per la seva distribució per edats,  $F(x)$ , i la taxa bruta de reproducció,  $R$ –, el nombre de poblacions, i la xarxa que formen, queda determinat per la sèrie de valors que pren cada variable.

Com que els límits de variació d'aquestes variables estan pràcticament acotats, això implica que el nombre de poblacions dependrà dels intervals de variació de les variables, i, per tant, del nombre de valors que prenguin.

Però hi ha un altre camí per estendre l'abast i densitat d'una xarxa de poblacions estables, diferent del de la "saturació" de valors d'una o dues de les variables utilitzades en el seu càlcul. Aquest camí és servir-se de més d'una funció respecte a una variable. És a dir, més d'una funció de supervivència, o més d'una funció de fecunditat (definida com s'ha dit). Les primeres xarxes publicades, el 1966, les de l'ONU –autor, Jean Bourgeois-Pichat (1966) –, i les de la Universitat de Princeton, d'A. Coale i P. Demeny (1966), van utilitzar el camí de multiplicar les sèries de la funció de supervivència.

Jean Bourgeois-Pichat va utilitzar els mètodes de l'article capital de S. Ledermann i J. Breas de 1959, per calcular, a partir de la sèrie de taules-model de mortalitat de l'ONU de 1955 –l'única existent quan va fer el treball–, una sèrie "desviada cap a dalt" (mortalitat més alta) i una sèrie "desviada cap avall" (mortalitat més baixa), només per a mitja dotzena de taules. Coale i Demeny van utilitzar les pròpies sèries de taules-model de mortalitat –quatre, anomenades Nord, Sud, Est i Oest–, que van publicar simultàniament. I encara que van considerar quatre distribucions de la fecunditat per edats (Bourgeois-Pichat només una), i van calcular les quatre taxes brutes de reproducció corresponents a aquelles distribucions de cada una de les poblacions, *només van utilitzar una distribució (la de 29 anys de mitjana), juntament amb totes les taules de mortalitat i l'única sèrie de  $R$ , per calcular  $r$ .*

Les sèries posteriors, de l'ONU i l'OCDE, utilitzen les pròpies sèries de taules de mortalitat (basades en –i dedicades a– els països en desenvolupament), i un conjunt de valors de  $r$ .

*L'altre camí possible per estendre una xarxa, no explorat fins ara, és el d'utilitzar més d'una funció de fecunditat. És a dir, donada una sèrie única de  $R$ , associar-la a diverses distribucions  $F(x)$ , i a una sèrie de funcions de supervivència, per calcular  $r$ .*

Aquest és el camí que ara s'ha seguit. La seva conseqüència és que es multipliquen les poblacions estables –les  $r$ – associades a una  $e_0$  no a base de "densificar" la progressió de  $r$ , sinó a base de canvis regulats de la progressió de les fecunditats  $i$ , per tant, les xarxes s'estenen a base d'una sèrie de nusos comuns: els mateixos valors de  $R$  i  $e_0$  (però amb diferents  $F(x)$ ).

Una altra conseqüència, en el nostre cas, derivada dels petits intervals de variació d'aquestes variables, és que a les tres sèries de  $r$  calculades amb l'associació de  $e_0$ ,  $F(x)$  i  $R$ , ofereixen  $r$  repetides, com s'ha pogut comprovar.

L'ús i aplicació de les sèries de poblacions estables està tractat extensament i metòdicament a l'obra de Coale-Demeny (1969), i les d'una xarxa a la de J. Bourgeois-Pichat (1994 i 1996).

Ara, les virtualitats i aplicacions de la xarxa que aquí es presenta –del seu ús conjunt, no el de cada sèrie individualment– està per fer.

## 12. OBSERVACIONS FINALS

El conjunt de les quatre sèries delimita el terreny històric de l'evolució de les poblacions humanes, almenys fins al segle XIX, i el cobreix amb una xarxa molt densa de poblacions estables, que minimitza la necessitat de fer interpolacions.

Aquesta xarxa està formada per la superposició de les quatre sèries definides per conjunts de valors dels seus paràmetres essencials,  $e_0$ MF,  $R$  i  $r$ , en gran part comuns. En conseqüència, molts nusos i algunes línies de les xarxes se superposen i el conjunt és molt atapeït.

Les taules de mortalitat en què es basa la xarxa s'han calculat amb el model 100 de S. Ledermann. És a dir, no s'han utilitzat les publicades, juntament amb els models, el 1969.

Barcelona  
Maig de 2005  
Armand Sáez

## BIBLIOGRAFIA

- Bourgeois-Pichat, Jean. *La dynamique des populations*. INED. París, 1994.
- Bourgeois-Pichat, Jean. *Le concept de population stable*. ONU. New York, 1966.
- Coale, A.; Demeny, P. *Métodos para establecer mediciones demográficas fundamentales a partir de datos incompletos*. ONU. 1968.
- Coale, A.; Demeny, P. *Regional Model Life Tables and Stables Populations*. Princeton, 1966. (2a edició 1983)
- Coale, Ansley J. "A new method for calculating Lotka's  $r$ ". *Population Studies*, núm. 11, 1957.
- Keyfitz, Nathan. *Introduction to the mathematics of population*. Addison. Massachusetts, 1968.
- Lederman, Sully. *Nouvelles tables type de mortalité*. INED, 1969.
- Ledermann, S.; Breas, J. "Les dimensions de la mortalité". *Population*. T. 4, 1959.
- Lotka, Alfred J. *Theorie analytique des associations biologiques*. Herman. París, 1939.
- Méthodes de projections démographiques par sexe et par âge*. ONU, 1957.

## **Taules i Resums generals**

**Taula 1 (a)**

[illegible]

**Taula 1 (b)**

| r i R de la Xarxa |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|-------------------|---------|--------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| F(29)             | 1,75    | 2      | 2,25   | 2,5    | 2,75     | 3      | 3,25   | 3,5    | 3,75   | 4      | 4,25   | 4,5    |
| R                 |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
| e <sub>0</sub> MF |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
| 20                |         |        |        |        |          |        |        | 0,0003 | 0,0028 | 0,0051 | 0,0072 | 0,0093 |
| 22                |         |        |        |        |          |        | 0,0015 | 0,0041 | 0,0066 | 0,0089 | 0,0111 | 0,0131 |
| 24                |         |        |        |        |          | 0,0021 | 0,0049 | 0,0076 | 0,0101 | 0,0124 | 0,0145 | 0,0166 |
| 26                |         |        |        |        | 0,0021   | 0,0052 | 0,0081 | 0,0107 | 0,0132 | 0,0155 | 0,0177 | 0,0197 |
| 28                |         |        |        | 0,0016 | 0,0049   | 0,0080 | 0,0109 | 0,0135 | 0,0160 | 0,0183 | 0,0205 | 0,0226 |
| 30                |         |        | 0,0004 | 0,0042 | 0,0075   | 0,0106 | 0,0135 | 0,0161 | 0,0186 | 0,0209 | 0,0231 | 0,0252 |
| 32                |         |        | 0,0028 | 0,0065 | 0,0099   | 0,0130 | 0,0159 | 0,0185 | 0,0210 | 0,0234 | 0,0255 |        |
| 34                |         | 0,0008 | 0,0050 | 0,0087 | 0,0121   | 0,0152 | 0,0181 | 0,0208 | 0,0232 | 0,0256 |        |        |
| 36                |         | 0,0029 | 0,0070 | 0,0108 | 0,0142   | 0,0173 | 0,0201 | 0,0228 | 0,0253 |        |        |        |
| 38                | 0,00008 | 0,0048 | 0,0089 | 0,0127 | 0,0161   | 0,0192 | 0,0221 | 0,0247 |        |        |        |        |
| 40                | 0,0018  | 0,0065 | 0,0107 | 0,0144 | 0,0178   | 0,0210 | 0,0238 |        |        |        |        |        |
|                   | 2       | 4      | 6      | 7      | 8        | 9      | 10     | 10     | 9      | 8      | 7      | 6      |
| F(31)             |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
| R                 | 1,75    | 2      | 2,25   | 2,5    | 2,75     | 3      | 3,25   | 3,5    | 3,75   | 4      | 4,25   | 4,5    |
| e <sub>0</sub> MF |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
| 20                |         |        |        |        |          |        |        |        | 0,0013 | 0,0034 | 0,0054 | 0,0073 |
| 22                |         |        |        |        |          |        | 0,0020 | 0,0026 | 0,0049 | 0,0071 | 0,0091 | 0,0110 |
| 24                |         |        |        |        |          | 0,0008 | 0,0035 | 0,0059 | 0,0082 | 0,0104 | 0,0124 | 0,0143 |
| 26                |         |        |        |        | 0,0009   | 0,0038 | 0,0064 | 0,0089 | 0,0112 | 0,0133 | 0,0154 | 0,0173 |
| 28                |         |        |        | 0,0005 | 0,0036   | 0,0065 | 0,0091 | 0,0116 | 0,0139 | 0,0161 | 0,0181 | 0,0200 |
| 30                |         |        |        | 0,0029 | 0,0061   | 0,0090 | 0,0116 | 0,0141 | 0,0164 | 0,0186 | 0,0206 | 0,0225 |
| 32                |         |        | 0,0017 | 0,0052 | 0,0084   | 0,0112 | 0,0139 | 0,0164 | 0,0187 | 0,0209 | 0,0229 | 0,0248 |
| 34                |         |        | 0,0038 | 0,0073 | 0,0105   | 0,0134 | 0,0160 | 0,0185 | 0,0208 | 0,0230 | 0,0250 |        |
| 36                |         | 0,0019 | 0,0058 | 0,0093 | 0,0124   | 0,0153 | 0,0180 | 0,0205 | 0,0228 | 0,0250 |        |        |
| 38                |         | 0,0037 | 0,0076 | 0,0111 | 0,0143   | 0,0172 | 0,0198 | 0,0223 | 0,0246 |        |        |        |
| 40                | 0,0011  | 0,0054 | 0,0093 | 0,0128 | 0,0160   | 0,0189 | 0,0215 | 0,0240 |        |        |        |        |
|                   | 1       | 3      | 5      | 7      | 8        | 9      | 10     | 10     | 10     | 9      | 8      | 7      |
| F(27)             |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
| R                 | 1,75    | 2      | 2,25   | 2,5    | 2,75     | 3      | 3,25   | 3,5    | 3,75   | 4      | 4,25   | 4,5    |
| e <sub>0</sub> MF |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
| 20                |         |        |        |        |          |        |        |        | 0,0044 | 0,0068 | 0,0092 | 0,0114 |
| 22                |         |        |        |        |          |        | 0,0029 | 0,0058 | 0,0084 | 0,0109 | 0,0132 | 0,0154 |
| 24                |         |        |        |        | 0,000171 | 0,0035 | 0,0065 | 0,0094 | 0,0120 | 0,0145 | 0,0169 | 0,0191 |
| 26                |         |        |        |        | 0,0034   | 0,0068 | 0,0098 | 0,0127 | 0,0153 | 0,0178 | 0,0202 | 0,0224 |
| 28                |         |        |        | 0,0028 | 0,0064   | 0,0097 | 0,0128 | 0,0156 | 0,0183 | 0,0208 | 0,0232 | 0,0254 |
| 30                |         | 0,0015 | 0,0055 | 0,0091 | 0,0124   | 0,0153 | 0,0180 | 0,0209 | 0,0236 |        |        |        |
| 32                |         | 0,0040 | 0,0080 | 0,0116 | 0,0150   | 0,0180 | 0,0210 | 0,0236 |        |        |        |        |
| 34                |         | 0,0018 | 0,0063 | 0,0103 | 0,0139   | 0,0173 | 0,0203 | 0,0232 |        |        |        |        |
| 36                |         | 0,0039 | 0,0084 | 0,0124 | 0,0161   | 0,0194 | 0,0225 | 0,0254 |        |        |        |        |
| 38                | 0,0009  | 0,0059 | 0,0104 | 0,0144 | 0,0181   | 0,0214 | 0,0245 |        |        |        |        |        |
| 40                | 0,0027  | 0,0077 | 0,0122 | 0,0162 | 0,0199   | 0,0232 |        |        |        |        |        |        |
|                   | 2       | 4      | 6      | 7      | 9        | 9      | 9      | 9      | 7      | 6      | 5      | 5      |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        |        |          |        |        |        |        |        |        |        |
|                   |         |        |        | </     |          |        |        |        |        |        |        |        |

Taula 1 (c)

| e <sub>0</sub> MF | R    | 2  | 2,25 | 2,5 | 2,75 | 3  | 3,25 | 3,5 | 3,75 | 4  | 4,25 | 4,5 | Poblacions |
|-------------------|------|----|------|-----|------|----|------|-----|------|----|------|-----|------------|
| 20                | 1,75 |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 22                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 14         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 24                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 18         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 26                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 22         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 28                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 24         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 30                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 27         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 32                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 27         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 34                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 26         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 36                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 25         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 38                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 24         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 40                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     | 23         |
| 31                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 29                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| 27                |      |    |      |     |      |    |      |     |      |    |      |     |            |
| Poblacions        | 5    | 11 | 17   | 21  | 25   | 27 | 29   | 29  | 26   | 23 | 20   | 18  | 251        |

Taula 2

| e <sub>0</sub> MF | Síntesi de les Sèries A,B,C |       |                   |        |       |                   | R (27) | r (%)  |
|-------------------|-----------------------------|-------|-------------------|--------|-------|-------------------|--------|--------|
|                   | R (31)                      | r (%) | e <sub>0</sub> MF | R (29) | r (%) | e <sub>0</sub> MF |        |        |
| 20,00             |                             |       | 20,00             | 3,5    | 0,03  | 20,00             | 3,5    | 0,17   |
|                   | 3,75                        | 0,13  |                   | 3,75   | 0,28  |                   | 3,75   | 0,44   |
|                   | 4,0                         | 0,34  |                   | 4,0    | 0,51  |                   | 4,0    | 0,68   |
|                   | 4,25                        | 0,54  |                   | 4,25   | 0,72  |                   | 4,25   | 0,92   |
|                   | 4,5                         | 0,73  |                   | 4,5    | 0,93  |                   | 4,5    | 1,14   |
|                   |                             |       |                   |        |       |                   |        |        |
| 22,00             | 3,25                        | 0,020 | 22,00             | 3,25   | 0,15  | 22,00             | 3,25   | 0,29   |
|                   | 3,5                         | 0,26  |                   | 3,5    | 0,41  |                   | 3,5    | 0,58   |
|                   | 3,75                        | 0,49  |                   | 3,75   | 0,66  |                   | 3,75   | 0,84   |
|                   | 4,0                         | 0,71  |                   | 4,0    | 0,89  |                   | 4,0    | 1,09   |
|                   | 4,25                        | 0,91  |                   | 4,25   | 1,11  |                   | 4,25   | 1,32   |
|                   | 4,5                         | 1,10  |                   | 4,5    | 1,31  |                   | 4,5    | 1,54   |
|                   |                             |       |                   |        |       |                   |        |        |
| 24,00             |                             |       | 24,00             |        |       | 24,00             | 2,75   | 0,0171 |
|                   | 3,0                         | 0,08  |                   | 3,0    | 0,21  |                   | 3,0    | 0,35   |
|                   | 3,25                        | 0,35  |                   | 3,25   | 0,49  |                   | 3,25   | 0,65   |
|                   | 3,5                         | 0,59  |                   | 3,5    | 0,76  |                   | 3,5    | 0,94   |
|                   | 3,75                        | 0,82  |                   | 3,75   | 1,01  |                   | 3,75   | 1,20   |
|                   | 4,0                         | 1,04  |                   | 4,0    | 1,24  |                   | 4,0    | 1,45   |
|                   | 4,25                        | 1,24  |                   | 4,25   | 1,45  |                   | 4,25   | 1,69   |
|                   | 4,5                         | 1,43  |                   | 4,5    | 1,66  |                   | 4,5    | 1,91   |
|                   |                             |       |                   |        |       |                   |        |        |
| 26,00             | 2,75                        | 0,09  | 26,00             | 2,75   | 0,21  | 26,00             | 2,75   | 0,34   |
|                   | 3,0                         | 0,38  |                   | 3,0    | 0,52  |                   | 3,0    | 0,68   |
|                   | 3,25                        | 0,64  |                   | 3,25   | 0,81  |                   | 3,25   | 0,98   |
|                   | 3,5                         | 0,89  |                   | 3,5    | 1,07  |                   | 3,5    | 1,27   |
|                   | 3,75                        | 1,12  |                   | 3,75   | 1,32  |                   | 3,75   | 1,53   |
|                   | 4,0                         | 1,33  |                   | 4,0    | 1,55  |                   | 4,0    | 1,78   |
|                   | 4,25                        | 1,54  |                   | 4,25   | 1,77  |                   | 4,25   | 2,02   |
|                   | 4,5                         | 1,73  |                   | 4,5    | 1,97  |                   | 4,5    | 2,24   |

Taula 2

| e <sub>0</sub> MF | Sintesi de les Sèries A,B,C |      |       |      |      | R (31) | r ( % ) | e <sub>0</sub> MF | R (29) | r ( % ) | e <sub>0</sub> MF | R (27) | r ( % ) |
|-------------------|-----------------------------|------|-------|------|------|--------|---------|-------------------|--------|---------|-------------------|--------|---------|
|                   |                             |      |       |      |      |        |         |                   |        |         |                   |        |         |
| 28,00             | 2,5                         | 0,05 | 28,00 | 2,5  | 0,16 | 28,00  | 0,16    | 28,00             | 2,5    | 0,16    | 28,00             | 2,5    | 0,28    |
|                   | 2,75                        | 0,36 |       | 2,75 | 0,49 |        | 0,49    |                   | 2,75   | 0,49    |                   | 2,75   | 0,64    |
|                   | 3,0                         | 0,65 |       | 3,0  | 0,80 |        | 0,80    |                   | 3,0    | 0,80    |                   | 3,0    | 0,97    |
|                   | 3,25                        | 0,91 |       | 3,25 | 1,09 |        | 1,09    |                   | 3,25   | 1,09    |                   | 3,25   | 1,28    |
|                   | 3,5                         | 1,16 |       | 3,5  | 1,35 |        | 1,35    |                   | 3,5    | 1,35    |                   | 3,5    | 1,56    |
|                   | 3,75                        | 1,39 |       | 3,75 | 1,60 |        | 1,60    |                   | 3,75   | 1,60    |                   | 3,75   | 1,83    |
|                   | 4,0                         | 1,61 |       | 4,0  | 1,83 |        | 1,83    |                   | 4,0    | 1,83    |                   | 4,0    | 2,08    |
|                   | 4,25                        | 1,81 |       | 4,25 | 2,05 |        | 2,05    |                   | 4,25   | 2,05    |                   | 4,25   | 2,32    |
|                   | 4,5                         | 2,00 |       | 4,5  | 2,26 |        | 2,26    |                   | 4,5    | 2,26    |                   | 4,5    | 2,54    |
| 30,00             | 2,5                         | 0,29 | 30,00 | 2,25 | 0,04 | 30,00  | 0,04    | 30,00             | 2,25   | 0,04    | 30,00             | 2,25   | 0,15    |
|                   | 2,75                        | 0,61 |       | 2,75 | 0,75 |        | 0,75    |                   | 2,75   | 0,75    |                   | 2,75   | 0,91    |
|                   | 3,0                         | 0,90 |       | 3,0  | 1,06 |        | 1,06    |                   | 3,0    | 1,06    |                   | 3,0    | 1,24    |
|                   | 3,25                        | 1,16 |       | 3,25 | 1,35 |        | 1,35    |                   | 3,25   | 1,35    |                   | 3,25   | 1,55    |
|                   | 3,5                         | 1,41 |       | 3,5  | 1,61 |        | 1,61    |                   | 3,5    | 1,61    |                   | 3,5    | 1,84    |
|                   | 3,75                        | 1,64 |       | 3,75 | 1,86 |        | 1,86    |                   | 3,75   | 1,86    |                   | 3,75   | 2,10    |
|                   | 4,0                         | 1,86 |       | 4,0  | 2,09 |        | 2,09    |                   | 4,0    | 2,09    |                   | 4,0    | 2,36    |
|                   | 4,25                        | 2,06 |       | 4,25 | 2,31 |        | 2,31    |                   | 4,25   | 2,31    |                   |        |         |
|                   | 4,5                         | 2,25 |       | 4,5  | 2,52 |        | 2,52    |                   | 4,5    | 2,52    |                   |        |         |
| 32,00             | 2,25                        | 0,17 | 32,00 | 2,25 | 0,28 | 32,00  | 0,28    | 32,00             | 2,25   | 0,28    | 32,00             | 2,25   | 0,40    |
|                   | 2,5                         | 0,52 |       | 2,5  | 0,65 |        | 0,65    |                   | 2,5    | 0,65    |                   | 2,5    | 0,80    |
|                   | 2,75                        | 0,84 |       | 2,75 | 0,99 |        | 0,99    |                   | 2,75   | 0,99    |                   | 2,75   | 1,16    |
|                   | 3,0                         | 1,12 |       | 3,0  | 1,30 |        | 1,30    |                   | 3,0    | 1,30    |                   | 3,0    | 1,50    |
|                   | 3,25                        | 1,39 |       | 3,25 | 1,59 |        | 1,59    |                   | 3,25   | 1,59    |                   | 3,25   | 1,80    |
|                   | 3,5                         | 1,64 |       | 3,5  | 1,85 |        | 1,85    |                   | 3,5    | 1,85    |                   | 3,5    | 2,09    |
|                   | 3,75                        | 1,87 |       | 3,75 | 2,10 |        | 2,10    |                   | 3,75   | 2,10    |                   | 3,75   | 2,36    |
|                   | 4,0                         | 2,09 |       | 4,0  | 2,34 |        | 2,34    |                   | 4,0    | 2,34    |                   |        |         |
|                   | 4,25                        | 2,29 |       | 4,25 | 2,55 |        | 2,55    |                   | 4,25   | 2,55    |                   |        |         |
|                   | 4,5                         | 2,48 |       |      |      |        |         |                   |        |         |                   |        |         |