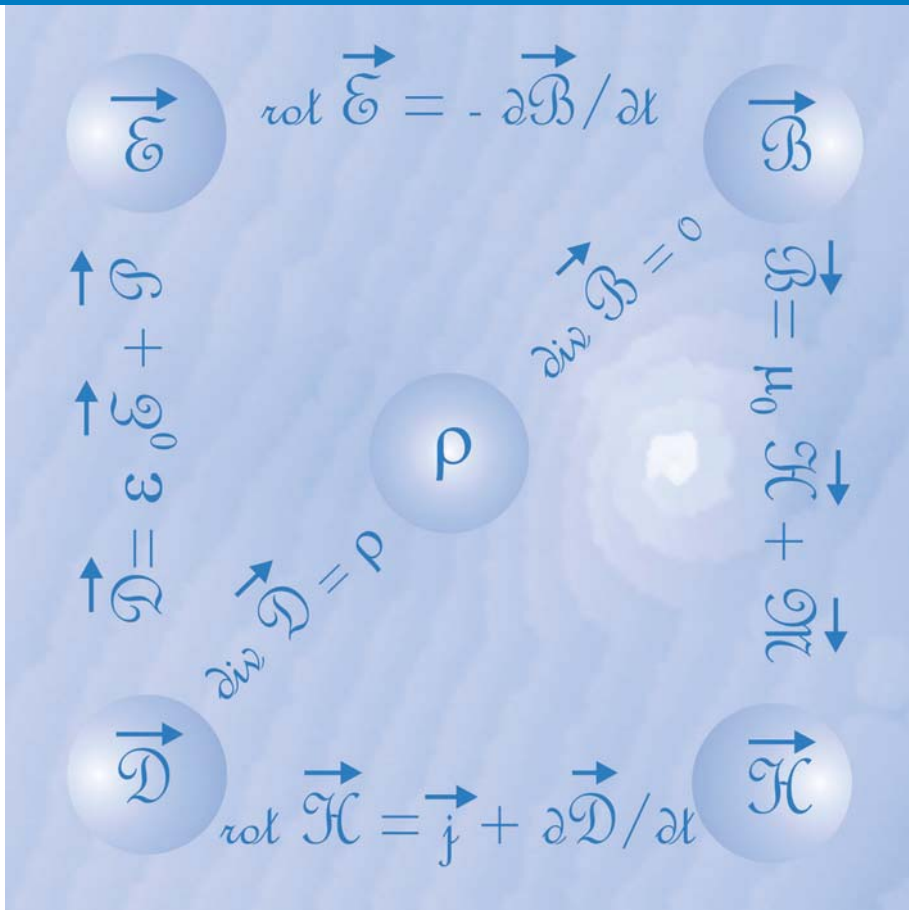


Electromagnetisme

Manuel Varela Fernández



ELECTROMAGNETISME

Manuel Varela Fernández

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



ÍNDEX

1. ELECTROSTÀTICA EN EL BUIT	13
1.1. Equacions fonamentals del camp elèctric en forma integral	13
1.2. Divergència del camp elèctric. Teorema de Gauss en forma local	19
1.3. Rotacional del camp elèctric. Potencial elèctric. Gradient de potencial	20
1.4. Condicions de continuïtat del camp elèctric	23
1.5. Equacions de Poisson i de Laplace	25
1.6. Propietats del potencial	26
1.7. Dipol elèctric. Moment dipolar	28
1.8. Desenvolupament multipolar del potencial	33
 2. ELECTROSTÀTICA EN MEDIS DIELECTRICS	51
2.1. Medis dielèctrics. Polarització	51
2.2. Camp a l'exterior d'un dielèctric. Densitats de càrrega de polarització .	54
2.3. Camp a l'interior d'un dielèctric	58
2.4. Teorema de Gauss en dielèctrics. Desplaçament elèctric	59
2.5. Susceptibilitat elèctrica i permitivitat	62
2.6. Equacions fonamentals en medis lineals i isòtrops	64
 3. ELECTROSTÀTICA EN MEDIS CONDUCTORS	69
3.1. Conductor únic en equilibri electrostàtic	69
3.2. Teorema de Coulomb. Pressió electrostàtica	70
3.3. Problema fonamental de l'equilibri electrostàtic en un conductor.	
Capacitat	72
3.4. Sistemes de conductors	75
3.5. Condensadors	82
3.6. Imatges elèctriques	83
 4. ENERGIA I FORCES ELECTROSTÀTIQUES	95
4.1. Energia electrostàtica en el buit	95
4.2. Energia en funció del camp en el buit	100
4.3. Energia electrostàtica en presència de dielèctrics	101

4.4. Força i moment resultant per a una distribució de càrrega	102
4.5. Força i moment resultant per a un sistema de conductors	104
5. ELECTROCIÒNÈTICA	111
5.1. Corrent filiforme, corrent volumic i corrent superficial	111
5.2. Equació de continuïtat per a un corrent elèctric: divergència de la densitat de corrent	114
5.3. Equació de continuïtat en la superfície per a un corrent de conducció ..	116
5.4. Corrents estacionaris. Corrents òhmics i estacionaris. Càlcul de resistències	116
5.5. Generadors: Camp electromotor i força electromotiu	122
5.6. Balanç energètic en un circuit	124
5.7. Equacions fonamentals dels corrents estacionaris	129
6. MAGNETOSTÀTICA AL BUIT	135
6.1. Força entre corrents filiformes. Llei d'Ampère	135
6.2. Camp magnètic creat pels corrents filiformes, volumics, superficials ..	137
6.3. Força magnètica. Força de Lorentz	140
6.4. Divergència del camp magnètic. Potencial vector magnètic	142
6.5. Teorema d'Ampère. Rotacional del camp magnètic	144
6.6. Condicions de continuïtat del camp magnètic	146
6.7. Equacions fonamentals del potencial vector	148
6.8. Corrent elemental. Potencial vector i camp magnètic. Moment magnètic	150
6.9. Moviment de partícules carregades	153
7. MAGNETOSTÀTICA EN PRESENCIA DE MEDIS MATERIALS ..	161
7.1. Imantació. Camp B creat per corrents i medis imantats. Densitat de corrent d'imatació	161
7.2. Camp H . Teorema d'Ampère	166
7.3. Condicions de continuïtat	168
7.4. Susceptibilitat magnètica i permeabilitat	168
7.5. Equacions fonamentals	170
7.6. Imants. Densitats de pols magnètics. Potencial escalar magnètic	170
7.7. Circuits magnètics	174
8. INDUCCIÓ ELECTROMAGNÈTICA. ENERGIA I FORCES MAGNÈTIQUES	181
8.1. Corrents quasi estacionaris	181
8.2. Llei d'inducció de Faraday	182

8.3. Equació de Maxwell-Faraday	184
8.4. Inducció mútua i autoinducció	186
8.5. Transitori en un circuit R-L	189
8.6. Energia magnètica d'un sistema de corrents	191
8.7. Energia magnètica en funció del camp	196
8.8. Forces magnètiques en funció de l'energia	197
9. EQUACIONS DE MAXWELL	205
9.1. Corrent de desplaçament. Equació d'Ampère-Maxwell	205
9.2. Equacions de Maxwell	207
9.3. Equació d'ones. Ones planes en buit	210
9.4. Energia i moment electromagnètic. Teorema de Poynting	213
9.5. Potencials electromagnètics	219
10. CORRENT ALTERN	227
10.1. Equació fonamental del corrent altern	227
10.2. Llei d'Ohm en corrent altern. Impedància	230
10.3. Potència del corrent altern. Factor de potència	236
10.4. Ressonància	241
BIBLIOGRAFIA	247

PREFACI

En aquest text es presenta un tractament a nivell intermedi de les matèries d'electricitat i magnetisme i en el qual es té com a objectiu final l'establiment de les equacions fonamentals de l'electromagnetisme, equacions de Maxwell. Està adreçat a estudiants de llicenciatures en ciències, en particular física, i de diverses enginyeries que ja han seguit cursos d'introducció a la física i a l'anàlisi matemàtica, i per als quals l'electricitat i el magnetisme constitueixen part del seu currículum acadèmic. La presentació es fa de manera que serveixi a l'alumne com a complement als excel·lents llibres que hi ha sobre la matèria tractada i que s'assenyalen en l'apartat de bibliografia. El contingut presentat parteix d'una experiència de més de quinze anys impartint assignatures basades en la matèria objecte del text i s'ha adaptat, amb els vaivens propis dels canvis en els diversos plans d'estudis inherents a tan dilatat període de temps, a la planificació actual de les matèries en els descriptors per a la llicenciatura de Física. L'ànim en preparar el present text és pal·liar la manca de destresa per prendre notes de classe per part dels estudiants, que en disposar de forma escrita de les explicacions del professor poden centrar la seva atenció en la presentació que es realitza durant el desenvolupament de les classes. En aquest punt cal assenyalar que la presa de notes de classe sembla una pràctica que tendeix a desaparèixer ja que és difícilment compatible amb les tendències actuals de presentació de la matèria. Finalment, el text també pretén facilitar un primer estudi de la matèria que caldrà completar amb la consulta de la bibliografia pertinent.

El text es pot dividir en quatre grans grups. El primer grup correspon a la matèria que s'anomena electrostàtica i se centra en els fenòmens elèctrics estàtics. S'inicia amb l'estudi de les propietats del camp elèctric en el buit amb l'objectiu d'establir-ne les equacions fonamentals, tant per al camp com per al potencial (Tema 1). A continuació s'apliquen dites propietats als medis materials dielèctrics (Tema 2) i conductors (Tema 3). Aquesta primera part finalitza establint les relacions energètiques en sistemes carregats (Tema 4).

La segona part està dedicada a l'estudi dels corrents elèctrics. S'inicia amb el tractament general dels corrents, les magnituds que els caracteritzen i les implicacions del principi de conservació de la càrrega en el cas d'un corrent, per considerar a continuació el cas dels corrents estacionaris. Seguidament se centra l'estudi en els corrents estacionaris de conducció i s'estableixen les equacions fonamentals. Fi-

nalment, s'obtenen les relacions energètiques dels corrents i es considera el balanç energètic en els diferents elements d'un circuit. Com a aplicació dels principis de conservació de càrrega i d'energia s'estableixen les lleis de Kirchhoff (Tema 5). L'estudi dels corrents variables amb el temps es posposa per al final del text (Tema 10) i es considera el cas de la variació lenta. Es tracten les característiques més notables: equació fonamental en un circuit RLC, potència del corrent altern i fenòmens de ressonància.

La magnetostàtica es tracta d'una forma similar a l'electrostàtica. S'estudien en primer lloc els fenòmens magnètics en el buit, establint les equacions dels camps (Tema 6), i a continuació es generalitza per al cas de medis magnètics (Tema 7). En aquesta part, ateses les seves importants aplicacions, es dedica un apartat al moviment de partícules carregades en camps estàtics i un altre a l'estudi dels circuits magnètics.

Els règims variables amb el temps s'introdueixen considerant en primer lloc el cas de la variació lenta i els fenòmens relacionats amb la inducció electromagnètica (Tema 8). S'estableix el balanç energètic en un circuit en règim variable amb el temps, fet que permet considerar l'energia magnètica dels corrents. L'estudi de la variació temporal en el cas general s'inicia amb un tema dedicat a les equacions de Maxwell (Tema 10). En dit tema es considera una primera conseqüència de les equacions fonamentals, l'equació d'ones. Com a introducció a les ones electromagnètiques, es resol aquesta en el cas més senzill d'ones planes monocromàtiques en el buit. Finalment, es dediquen dos apartats al tema de l'energia i moment electromagnètics i a la formulació de la teoria en termes dels potencials.

Al final de cada tema es proposen una sèrie de qüestions i problemes bàsics relacionats amb la teoria presentada.

Finalment, l'autor vol agrair les nombroses influències, comentaris, ajudes i crítiques rebudes al llarg del dilatat període de docència de la matèria abans esmentat i base del present text. De forma general l'agraïment s'adreça a tots els companys del Departament de Física Aplicada i Òptica (inicialment en part Departament d'Electricitat i Electrònica) que en nombroses ocasions han mostrat el seu interès per la publicació dels inicialment "Apunts d'Electromagnetisme". En particular voldria agrair al Dr. José María Codina Vidal les seves ensenyances com a professor de la matèria durant el període d'estudiant i com a company en l'etapa de formació com a professor. Ell em va inculcar l'interès per la matèria, juntament amb una excel·lent visió per a la seva transmissió als alumnes i fomentar l'interès d'aquests. El meu reconeixement, també, envers els diferents professors amb qui he compartit la docència de la matèria, en particular els Drs. José Luis Morenza, Enric Bertrán, Jordi Andeu, Arturo Lousa, Juan Carlos Delgado, José Luis Andujar i Pere Serra. En darrer lloc, i de forma especial, el meu agraiement a la Dra. María Victoria García-Cuenca, companya de despatx i de docència durant molts anys, per la seva visió sempre crítica, però constructiva, sobre com abordar els continguts del text.

1. ELECTROSTÀTICA EN EL BUIT

1.1. Equacions fonamentals del camp elèctric en forma integral

- Càrrega elèctrica. Distribucions de càrrega

La càrrega elèctrica és una propietat intrínseca de la matèria que és la causant de la interacció electromagnètica. La càrrega pren els valors discrets 0 , $+e$ (càrrega del protó), $-e$ (càrrega de l'electró) i múltiples discrets d'aquests. La distribució de càrrega en els cossos, a nivell microscòpic, és discontinua, la qual cosa fa difícil el tractament matemàtic de les seves interaccions. A la figura 1.1 s'hi presenta esquemàticament l'estructura del Silici en la qual s'hi observa clarament el caràcter discret de la distribució de massa/càrrega. Des d'un punt de vista macroscòpic, aquest problema es tracta definint una densitat volumètrica de càrrega $\rho(\vec{r})$ que representa la càrrega neta per unitat de volum de la que se n'ha fet la mitjana per a una regió adequada al voltant del punt caracteritzat pel radi vector $\vec{r}$

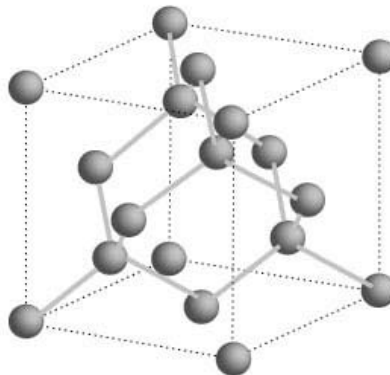


Figura 1.1

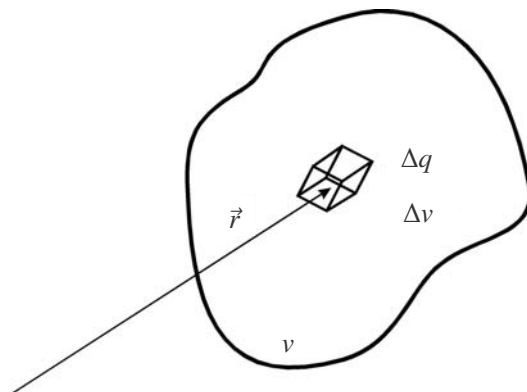


Figura 1.2

(Figura 1.2). El concepte *regió adequada* significa gran a escala microscòpica perquè ρ no variï de forma erràtica, i petita a escala macroscòpica perquè en la mitjana no s'hi amagui variacions en la distribució de càrrega, i pugui ser tractada matemàticament com una regió infinitesimal. Per exemple, si tenim en compte que la distància interatòmica en la matèria és de l'ordre de dècimes de nm, regions de l'ordre de desenes o centenars de nm contenen milers d'àtoms, la qual cosa permetrà realitzar les mitjanes adients, i són suficientment petites per ser considerades infinitesimals. La densitat volumètrica de càrrega $\rho(\vec{r})$ s'expressarà com:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \quad (1.1)$$

En un estudi macroscòpic de les interaccions entre cossos carregats, aquests estaran caracteritzats per una densitat volumètrica $\rho(\vec{r})$. No obstant això, de vegades i depenent de les seves dimensions i/o de la seva distància als punts on se n'estudien els efectes, és més convenient tractar-los com distribucions superficials, filiformes (o lineals) o elements puntuals. El cas més extrem és el de les càrregues puntuals, és a dir, aquelles que no ocupen volum. En un sentit estricte només l'electró, dins la teoria quàntica, és considerat com a un punt, encara que, en general, no es limita el terme de càrrega puntual a les càrregues elementals, sinó que també es tracten com a càrregues puntuals aquelles distribucions de càrrega en les quals les seves dimensions són negligibles comparades amb les distàncies a les quals se'n consideren els efectes. Així, per exemple, un cos carregat que la seva dimensió major sigui d'1 cm observat a una distància d'1 m es comporta com una distribució volumètrica, mentre que si s'estudia el seu efecte a una distància de 10 m es pot tractar com una càrrega puntual.

Una altra situació que cal considerar és aquella en què una de les dimensions del cos carregat és negligible enfront de les altres dues i de la distància. En aquest cas

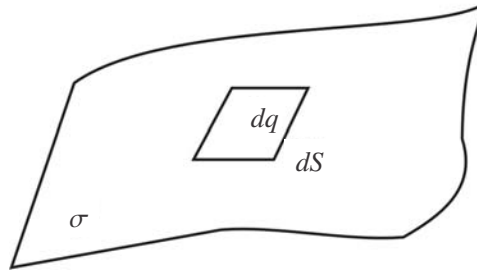


Figura 1.3

ens trobem davant d'una distribució superficial de càrrega (Figura 1.3). La densitat de càrrega superficial $\sigma(\vec{r})$ es defineix com:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (1.2)$$

Finalment es poden considerar les distribucions filiformes o lineals. Aquest cas correspon a la situació en què dues de les dimensions del cos càrrega siguin molt menors que l'altra i que la distància. Per a aquestes distribucions es defineix una densitat lineal de càrrega $\lambda(\vec{r})$ de la forma:

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{dq}{dl} \quad (1.3)$$

• Llei de Coulomb

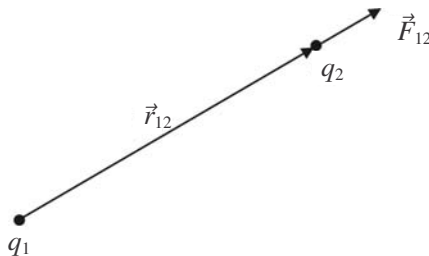


Figura 1.4

La força entre cossos carregats va ser mesurada directament per Ch. Coulomb (1785). Per a dues càrregues puntuals en el buit (a la pràctica, per a cossos carregats de dimensions negligibles enfront de la seva separació) la força sobre una deguda a l'altra és: 1) Proporcional en magnitud al producte de les magnituds de les càrregues;

2) Inversament proporcional al quadrat de la seva distància; 3) Dirigida al llarg de la línia que les uneix i 4) Repulsiva si les càrregues són del mateix signe i atractiva si són del signe contrari. En formulació matemàtica, i seguint la terminologia de la Figura 1.4, s'escriurà (**Llei de Coulomb**):

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{a}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1.4)$$

on $\vec{F}_{12}$ és la força sobre la càrrega 2 deguda a la càrrega 1, $\vec{a}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ és un vector unitari dirigit de la càrrega 1 a la càrrega 2, i K és una constant que depèn del sistema d'unitats. En el Sistema Internacional SI (MKSA) K s'escriu $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ amb $\epsilon_0 = 8.845 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$, i la unitat de càrrega és el Coulomb (C) que és igual a $6.25 \times 10^{18} e$ (e és la càrrega del protó/electró, $e = 1.6 \times 10^{-19} C$). En el SI la Llei de Coulomb s'escriurà com:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{a}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1.5)$$

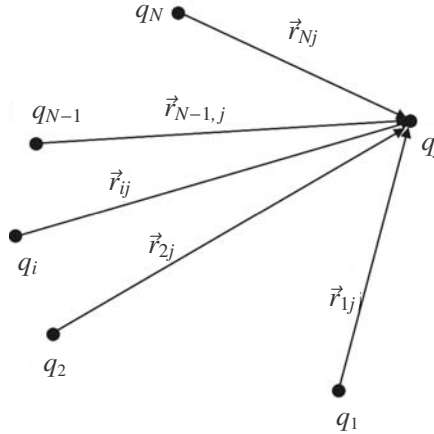


Figura 1.5

Les forces entre càrregues puntuals compleixen el **principi de superposició**, és a dir, que la força deguda a un sistema de càrregues és la suma de les forces deguda a cada una d'elles si es trobés sola (Figura 1.5). És a dir,

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (1.6)$$

• Camp elèctric

L'origen de la força entre dues càrregues puntuals pot ser considerat des de dos punts de vista: *a)* l'acció directa a distància per la qual la força sobre la càrrega 2 és deguda directament i instantània a la càrrega 1; *b)* el procés d'interacció entre les càrregues 1 i 2 es divideix en dues etapes. La càrrega 1 causa una condició en l'espai que l'envolta (**camp**) de manera que quan la càrrega 2 se situa en un punt determinat de l'espai, sobre aquesta hi actua una força (acció del camp). En condicions estàtiques ambdós punts de vista són equivalents, encara que en els efectes que depenen del temps el punt de vista associat al camp és l'adient.

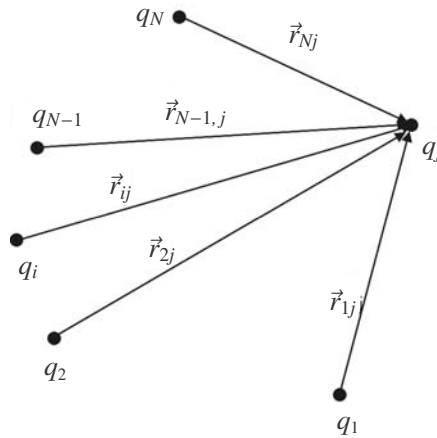


Figura 1.6

La llei de Coulomb representa el punt de vista d'acció a distància, encara que la podem descompondre en dos termes. Un representa la creació del camp:

$$\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1.7)$$

i l'altre té en compte l'acció d'aquest:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_{12} \quad (1.8)$$

L'expressió (1.7) té en compte la font del camp (càrrega 1), la posició d'aquesta i el punt on es calcula el camp. L'expressió (1.8) representa l'acció del camp ($\vec{E}_{12}$) sobre la càrrega 2 (q_2). D'acord amb l'equació (1.8), l'intensitat del camp es defineix

com la força per unitat de càrrega sobre una càrrega de prova (petita en grandària i magnitud) situada en el punt considerat. La unitat de camp elèctric en el SI és el N/C o d'una manera equivalent el V/m.

L'expressió (1.7) representa el camp elèctric creat per una càrrega puntual. Per a un sistema de càrregues, aplicant el principi de superposició, tindrem (figura 1.6):

$$\vec{E}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{ij}} \vec{r}_{ij} \quad (1.9)$$

Mitjançant un procediment anàleg es poden obtenir les expressions corresponents a distribucions contínues de càrrega. Així es tindrà:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dv \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \vec{r}}{r^3} dS \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda \vec{r}}{r^3} dl \end{aligned} \quad (1.10)$$

respectivament per a distribucions volumètriques, superficials i filiformes.

• Propietats del camp elèctric

El flux del camp elèctric $\vec{E}$ a través d'una superfície tancada S es relaciona directament amb la càrrega tancada per aquesta superfície mitjançant l'anomenat Teorema de Gauss (veure l'Apèndix I per a la seva deducció):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (1.11)$$

L'expressió anterior, conseqüència directa de la dependència de la interacció electrostàtica amb la inversa del quadrat de la distància, constitueix una de les equacions fonamentals del camp electrostàtic en forma integral.

La segona propietat important relacionada amb el camp elèctric està referida a la circulació del camp a un camí tancat. Aquesta circulació per al cas electrostàtic sempre és nul·la (veure la deducció a l'Apèndix II), és a dir,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.12)$$

Aquest resultat és conseqüència directa del caràcter central de la força electrostàtica.

Les equacions (1.11) i (1.12) constitueixen les equacions fonamentals, en forma integral, del camp electrostàtic.

1.2. Divergència del camp elèctric. Teorema de Gauss en forma local

L'equació (1.11) representa una relació integral entre el camp (flux del camp) i les fonts d'aquest (càrregues). Aquesta expressió té una d'equivalent des del punt local, és a dir, relaciona la càrrega en un punt (densitat de càrrega) amb el camp o alguna propietat d'aquest. En primer lloc hem de definir la propietat equivalent al flux del camp quan estem tractant una superfície que tanca un volum molt petit (al límit infinitesimal). Així el quocient entre aquest flux i el volum tancat quan aquest es fa molt petit, que representa una densitat volumètrica de flux, rep el nom de divergència del camp $\vec{E}$, és a dir,

$$\operatorname{div} \vec{E} \equiv \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.13)$$

Com a conseqüència de la definició de divergència i considerant una superfície S que tanca un volum finit v s'obté el teorema vectorial conegut com a **teorema de la divergència** (o **teorema de la divergència de Gauss**):

$$\int_v \operatorname{div} \vec{E} dv = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.14)$$

Aplicant el teorema anterior al Teorema de Gauss (equació 1.11) es pot escriure:

$$\int_v \operatorname{div} \vec{E} dv = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv$$

o també:

$$\int_v \operatorname{div} \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv \quad \Rightarrow \quad \int_v \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv = 0$$

La relació anterior es compleix per a qualsevol volum v i, per tant, perquè l'integral sigui nul·la, també ha de ser-ho l'integrand. Això vol dir que tindrem:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.15)$$

Aquesta expressió constitueix el Teorema de Gauss en forma local, i relaciona, en cada punt, la densitat de càrrega amb la divergència del camp elèctric en aquest punt.

Tal com es pot veure a l'Apèndix III, la divergència d'un vector es pot escriure com el *producte escalar* de l'operador nabla ($\vec{\nabla}$) i el camp $\vec{E}$. Per tant, l'expressió (1.15) també s'escriu com:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.16)$$

on $\vec{\nabla}$ en coordenades cartesianes s'escriu:

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{a}_z \quad (1.17)$$

(En la secció «Formulari» al final del tema s'hi pot trobar l'expressió de la divergència en diferents sistemes de coordenades).

1.3. Rotacional del camp elèctric. Potencial elèctric. Gradient de potencial

L'expressió (1.12), que expressa el caràcter conservatiu del camp, també admet una representació des del punt de vista local. Per obtenir aquesta expressió hem de calcular la circulació d' $\vec{E}$ a un camí molt petit. Es defineix el rotacional d' $\vec{E}$ en un punt P , com un vector que la seva component en la direcció d'un determinat vector unitari $\vec{a}$ és el quocient entre la circulació d' $\vec{E}$ al llarg d'un camí al voltant de P i l'àrea tancada per aquest quan aquesta àrea tendeix a zero, i l'àrea és perpendicular al vector $\vec{a}$. És a dir,

$$\vec{a} \cdot \text{rot } \vec{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.18)$$

Ja que el camp $\vec{E}$ és un camp conservatiu (equació 1.12) les components del rot $\vec{E}$ per a qualsevol direcció seran nul·les i, per tant,

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (1.19)$$

Aquesta propietat és equivalent a la del camp conservatiu (un camp de rotacional nul en tots els punts s'anomena **camp irrotacional**).

En general, la circulació d'un vector a un camí tancat es relaciona amb el flux del seu rotacional a través de la superfície que té per contorn la superfície en qüestió.

Aquesta relació rep el nom de **Teorema d'Stokes**, i s'escriu com:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (1.20)$$

D'una manera semblant a la desenvolupada en el cas de la divergència (Apèndix III), podem escriure el rotacional com el *producte vectorial* de l'operador nabla amb el camp. L'equació (1.19) s'escriu com:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.21)$$

En coordenades cartesianes, per exemple, es té:

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (1.22)$$

• Potencial elèctric. Gradient de potencial

El caràcter conservatiu del camp elèctric implica l'existència d'una funció potencial. El treball realitzat pel camp en portar una càrrega unitat positiva entre dos punts, serà la diferència de potencial entre els punts A i B. És a dir,

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.23)$$

En el cas del camp creat per una càrrega puntual q , la diferència de potencial serà:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (1.24)$$

Per definir el potencial en un punt és necessari prendre un cert origen de referència. En el cas de distribucions finites de càrrega (no existeix càrrega a distància infinita), l'origen de potencials es pren a l'infinit (és a dir, a distàncies suficientment grans de les distribucions de càrrega perquè els efectes d'aquestes siguin nuls), mentre que per al cas de distribucions indefinides de càrrega, l'origen de potencials es pren en un punt arbitrari de l'espai, generalment sobre els elements de simetria del sistema (en cas d'existir). Si considerem el cas normal de distribucions finites de càrrega, el potencial en un punt A és el treball que ha de realitzar el camp elèctric per portar la

càrrega unitat des del punt A a l'infinit, és a dir,

$$V(A) = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.25)$$

Aquest treball també coincideix amb aquell que ha de fer un agent extern per, guanyant al camp elèctric, portar la càrrega unitat des de l'infinit fins al punt. Per realitzar aquest procés, l'agent extern ha d'exercir una força $\vec{F}_{\text{ext}}$ sobre la càrrega unitat que contraresti el camp $\vec{E}$, és a dir $\vec{F}_{\text{ext}} = -q' \vec{E}$, però com $q' = 1$, $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{E}$. El treball que ha de realitzar aquesta força serà:

$$W_{\text{ext}}^{+1} = \int_\infty^A \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l} = \int_\infty^A -\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.26)$$

Veiem que aquest treball coincideix amb el valor del potencial a A . El treball que realitza l'agent extern queda emmagatzemat en forma d'energia potencial de la càrrega, i per tant, el potencial en un punt representa també l'energia potencial emmagatzemada per unitat de càrrega. La unitat de potencial en el SI és el Volt (V) que equival a un J/C.

Les expressions del potencial per a sistemes de càrregues puntuals i distribucions de càrrega són:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} \quad (1.27)$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dv \quad (1.28)$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r} dS \quad (1.29)$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda}{r} dl \quad (1.30)$$

L'expressió local que fa palès el caràcter conservatiu del camp,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.21)$$

té com a conseqüència, des del punt de vista matemàtic, que el camp $\vec{E}$ es pot escriure com el gradient d'una funció escalar determinada f :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} f \quad (1.31)$$

Si tenim en compte l'expressió de la diferència de potencial,

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A) \quad (1.32)$$

s'observa que la funció escalar f és el potencial electrostàtic canviat de signe i, per tant,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (1.33)$$

En vista de les propietats considerades als apartats 1.2 i 1.3, perquè un camp sigui electrostàtic ha de complir dues condicions. En primer lloc ha de ser conservatiu (irrotacional), matemàticament ha de verificar $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. En segon lloc, s'ha de relacionar amb les fonts (càrregues) mitjançant el Teorema de Gauss. Per tant, les equacions fonamentals del camp electrostàtic en el buit són:

En forma integral (ja vistes a l'apartat 1.1):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (1.11)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.12)$$

En forma local:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.21)$$

Ja que en les equacions fonamentals en forma local hi intervenen derivades parcials, la seva aplicació requereix, des del punt de vista matemàtic, que el camp elèctric sigui continu i, per tant, derivable. En l'apartat següent, considerarem aquest problema en el cas d'existència de superfícies carregades.

1.4. Condicions de continuïtat del camp elèctric

El fet de tractar determinades distribucions de càrrega com superfícies fa que puguin aparèixer discontinuïtats en el camp quan es passa d'un costat a l'altre de la superfície carregada. Considerem com es relacionen els camps elèctrics en dos punts molt propers a ambdós costats d'una superfície carregada amb densitat σ . Per això descompondrem el camp en les seves components tangencials (paral·leles) (Figura 1.7) a la superfície i en les seves components normals (perpendiculars) (Figura 1.8).

1. Components tangencials

Considerem la circulació del camp al camí indicat en la Figura 1.7.

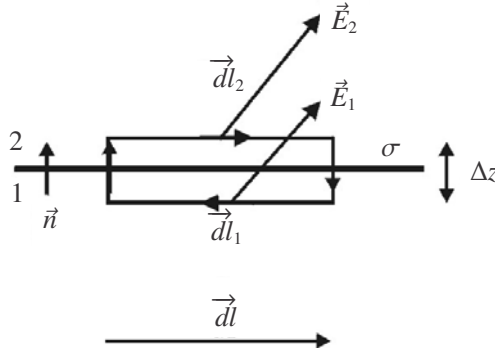


Figura 1.7

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \text{circul}(\Delta z) = 0; \quad d\vec{l} \equiv d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1$$

que es converteix en:

$$-\vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \text{circul}(\Delta z) = 0$$

En fer tendir Δz a zero (punts molt propers a ambdós costats de la superfície) la circulació als costats Δz es fa nul·la i s'obté:

$$\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

L'expressió anterior fa palesa la continuïtat de les components tangencials del camp elèctric. Aquesta propietat, si es té en compte la definició de producte vectorial, també es pot escriure com:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.34)$$

2. Components normals

Apliquem ara el Teorema de Gauss a la superfície indicada en la Figura 1.8:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \Phi_{\text{lateral}} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

a més, ja que:

$$d\vec{S}_2 = dS \vec{n} \quad \text{i} \quad d\vec{S}_1 = -dS \vec{n}$$

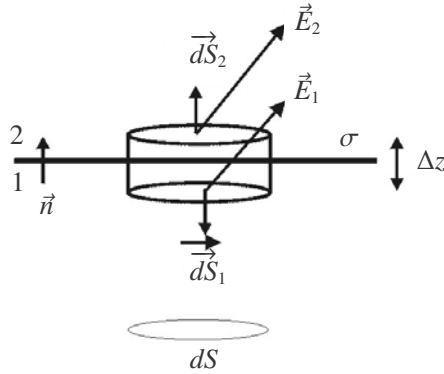


Figura 1.8

el fet que els dos punts, a ambdós costats de la superfície, es trobin molt propers, és a dir $\Delta z \rightarrow 0$, s'obté:

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.35)$$

En resum, el camp elèctric és discontinu (ho són els seus components normals) en creuar superfícies carregades.

1.5. Equacions de Poisson i de Laplace

Les equacions fonamentals del camp es poden escriure en termes del potencial V . Del fet que $\vec{E}$ sigui irrotacional tenim que $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, que podem introduir en el Teorema de Gauss en forma local (equació 1.16) per obtenir:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.36)$$

que constitueix l'equació de Poisson. En coordenades cartesianes s'escriu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si ens trobem en punts de l'espai en què la densitat de càrrega és nul·la tindrem:

$$\Delta V = 0 \quad (1.37)$$

que és l'equació de Laplace. En coordenades cartesianes es té:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

A l'Apèndix III s'hi pot trobar l'expressió de l'operador laplacià en diferents sistemes de coordenades.

1.6. Propietats del potencial

La resolució de les equacions de Poisson i Laplace requereix el coneixement de les propietats que ha de complir el potencial electrostàtic. A més, algunes d'aquestes propietats estan relacionades amb el fet que V és una funció harmònica (funció que satisfà l'equació de Laplace).

1. Finitud

El potencial és finit en tot l'espai (ρ finita). Aquesta propietat deriva directament del significat físic del potencial.

2. Continuitat

a) *Potencial*. El potencial és continu en tots els punts de l'espai, en particular en creuar superfícies carregades. Aquesta propietat és equivalent a la continuïtat dels components tangencials del camp.

$$V_{1S} = V_{2S} \quad (1.38)$$

b) *Derivades del potencial*. En creuar una superfície carregada, les derivades del potencial respecte la direcció normal a aquesta superfície són discontinües. Expressa el fet que les components normals del camp són discontinües.

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial V_2}{\partial n} + \frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.39)$$

3. Absència de màxims i mínims

En una regió de l'espai exempta de càrregues, el potencial no pot presentar ni màxims ni mínims. Perquè el potencial presenti màxims (mínims) s'ha de verificar:

a) Derivades primeres nul·les, $\vec{\nabla}V = 0$; b) Derivades segones totes negatives (positives). La condició b) no es pot complir ja que en una regió sense càrrega el potencial compleix l'equació de Laplace i, per tant, les derivades no poden ser totes positives o negatives simultàniament.

4. Superposició

Si en una regió de l'espai sense càrrega es tenen diverses solucions de l'equació de Laplace $V_1, V_2, \dots$, la combinació lineal d'aquestes és al seu torn una solució.

$$V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots; \quad \Delta V = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2 + \dots; \quad \Delta V = 0$$

5. Constància en punts interiors a superfícies equipotencials

En una regió de l'espai sense càrrega limitada per una *superfície equipotencial*, el potencial és constant. Suposem que el potencial, en un punt del volum tancat per la superfície equipotencial pren un valor menor (major) al de la superfície. En anar per dos camins diferents des d'aquest punt fins a la superfície, el potencial ha d'augmentar (disminuir) per assolir el valor de la superfície. Això implica que en algun punt interior, el potencial ha de presentar un mínim (màxim). Però tenint en compte que és un regió sense càrrega aquesta situació no es pot presentar (propietat 3) i, per tant, el potencial ha de ser constant.

6. Unicitat

Dues solucions de l'equació de Laplace que satisfan les mateixes condicions de frontera difereixen pel cap alt en una constant. Sigui una regió de l'espai limitada per una superfície S en la qual el potencial pren valors V_S , i dues solucions $V_1(P)$ i $V_2(P)$ de l'equació de Laplace que prenen els mateixos valors V_S en la superfície. Si construïm una funció $V(P) = V_1(P) - V_2(P)$, aquesta complirà l'equació de Laplace i, a més, el seu valor sobre tots els punts de la superfície S serà nul. Per tant, com a conseqüència de la propietat 5, la funció $V(P)$ ha de ser nul·la en tot el volum interior i, per tant, $V_1(P) = V_2(P)$, i només existeix una solució.

Relacionat amb aquest teorema es planteja el *Problema de Dirichlet*. El problema consisteix a obtenir una solució de l'equació de Laplace que prengui uns valors fixats sobre una superfície S tancada. Aquest problema sempre té solució (la solució sempre existeix) i, a partir del teorema d'unicitat, aquesta és única.