

PROBLEMES DE TERMODINÀMICA

Eduard Vives i Santa-Eulàlia
Carlos Frontera Beccaria

Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria



TEXTOS DOCENTS

93

PROBLEMES DE TERMODINÀMICA

Eduard Vives i Santa-Eulàlia
Carlos Frontera Beccaria

Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA

U

B

Vives i Santa Eulàlia, Eduard

Problemes de termodinàmica. – (Textos docents ; 93)

ISBN 84-475-2933-9

I. Frontera Beccaria, Carlos II. Universitat de Barcelona. Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria III. Títol

1. Termodinàmica 2. Problemes i exercicis

© PUBLICACIONS I EDICIONS DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA, 2005
Adolf Florensa, s/n; 08028 Barcelona; Tel. 934 035 442; Fax 934 035 446;
comercial.edicions@ub.edu; www.publicacions.ub.es

Dipòsit legal: B-27645-2005

ISBN: 84-475-2933-9

Impressió: Gráficas Rey, S.L.

Imprès a Espanya / Printed in Spain

Aquesta publicació ha comptat amb l'ajut de la Generalitat de Catalunya.

Queda rigorosament prohibida la reproducció total o parcial d'aquesta obra. Cap part d'aquesta publicació, inclòs el disseny de la coberta, pot ser reproduïda, emmagatzemada, transmesa o utilitzada per cap tipus de mitjà o sistema, sense l'autorització prèvia per escrit de l'editor.

Introducció

L'assignatura de Termodinàmica és una assignatura troncal de l'ensenyament de Física de la Universitat de Barcelona que s'imparteix durant el tercer semestre del primer cicle. Comprèn un total de 9 crèdits, dels quals 6 són teòrics i 3 de problemes. L'objectiu de l'assignatura és el d'iniciar l'estudiant en el tractament dels sistemes macroscòpics en els quals la temperatura té un paper important, establint el formalisme de la termodinàmica clàssica de l'equilibri. Els continguts de l'assignatura estan dividits en:

1 Principi zero i temperatura

- 1.1 Introducció i definicions.
- 1.2 Equilibri tèrmic. Enunciat del principi zero. Temperatura empírica.
- 1.3 Equació d'estat. Exemples. Procés quasiestàtic.

2 Primer principi i energia

- 2.1 Conceptes de treball, energia interna i calor.
- 2.2 Enunciat del primer principi. Capacitats calorífiques.
- 2.3 Aplicacions.

3 Segon principi i entropia

- 3.1 Enunciats de Kelvin-Planck i Clausius-Poincaré.
- 3.2 Cicle de Carnot. Temperatura termodinàmica.
- 3.3 Desigualtat de Clausius. Entropia. Principi de l'augment d'entropia.
- 3.4 Primer i segon principis combinats. Aplicacions.

4 Potencials i equilibri

- 4.1 Potencials termodinàmics.
- 4.2 Relacions de Maxwell i aplicacions.
- 4.3 Condicions d'equilibri i d'estabilitat.
- 4.4 Sistemes oberts monocomponents: potencial químic.

5 Transicions de fase

- 5.1 Transicions de fase de primer i de segon ordre.
- 5.2 Construcció de Maxwell.
- 5.3 Equació de Clausius-Clapeyron.

6 Tercer principi i baixes temperatures

- 6.1 Efecte Joule-Kelvin. Desimantació adiabàtica.
- 6.2 Enunciats de Nernst i de Planck.

Aquesta és, probablement, una de les assignatures que més sorprèn l'alumne/a. És una disciplina matemàticament senzilla, que es basa en uns principis que semblen senzills a primera vista però l'aplicació dels quals és universal i permet enfrontar-se a l'estudi de qualsevol sistema macroscòpic (des de proteïnes fins a cúmuls de galàxies i forats negres). Per tant, és raonable que en l'assignatura es doni molta importància a la part de problemes. De fet, l'avaluació es fa en un examen final escrit que consta únicament de problemes curts i llargs, i es valora també la participació en la resolució de problemes a classe. És per això que s'ha elaborat aquest recull de problemes resolts, amb l'objectiu d'ajudar l'alumne/a a passar de la teoria a la pràctica.

La procedència dels enunciats és diversa, i es fa difícil enumerar totes les persones que poden haver contribuït a la seva recopilació. Bàsicament correspon al llibret de problemes per resoldre que s'ha usat a la Facultat de Física ens els darrers anys. La col·lecció inicial procedia de l'antic Departament de Termologia i havia estat recopilada pels Drs. J.M. Vidal, E. Rojas, V. Torra i E. Cesari, entre d'altres. L'any 1988, quan el Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria es féu càrrec de l'assignatura la col·lecció va ser completada i organitzada pels Drs. A. Planes i T. Castán. Posteriorment es va ampliar amb contribucions dels Drs. L. Mañosa, J. Ortín i, més recentment, J. Casademunt i J. M. Sancho. La tardor de 2000, la Universitat de Barcelona ha reconegut aquests últims 6 professors, conjuntament amb el Dr. Eduard Vives, com a Grup d'Innovació Docent en Termodinàmica i Física Estadística. La tercera edició revisada d'aquest text s'enmarca dins dels projectes endegats per aquest grup.

La col·lecció és extensa i s'ha fet un esforç per detallar la resolució dels problemes de manera que cada un d'ells sigui autoconsistent. El text inclou també uns formularis al començament de cada tema que recullen els conceptes i les equacions bàsiques per resoldre els problemes. No es pretén que siguin un resum de la teoria, sinó simplement una eina de treball per resoldre els problemes. També s'ha fet un esforç per homogeneïtzar el conveni de signes en tots els problemes. S'ha optat pel conveni amb més sentit físic des del punt de vista del sistema. Això fa que els signes en alguns problemes del tema 4 puguin sorprendre a primera vista. L'ordenació dels problemes en capítols no correspon exactament als temes de l'assignatura. Això és perquè hi ha alguns temes de fonamentació que són exclusivament teòrics.

Factors de conversió i dades importants:

Unitats d'energia:

$$1 \text{ cal} = 4.1860 \text{ J} \quad 1 \text{ J} = 0.23889 \text{ cal}$$

$$1 \text{ atm l} = 101.325 \text{ J} \quad 1 \text{ J} = 9.87 \cdot 10^{-3} \text{ atm l}$$

Unitats de pressió:

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} \quad 1 \text{ Pa} = 9.87 \cdot 10^{-6} \text{ atm}$$

$$1 \text{ mmHg} = 133.3 \text{ Pa} \quad 1 \text{ Pa} = 7.502 \cdot 10^{-3} \text{ mmHg}$$

Constant dels gasos:

$$R = 0.082 \text{ atm l/K mol} = 1.986 \text{ cal/K mol} = 8.314 \text{ J/K mol}$$

 Calors específiques de l' H_2O :

$$c_{H_2O \text{ líquida}} = 1 \text{ cal/}^\circ\text{Cg}$$

$$c_{H_2O \text{ sòlida}} = 0.45 \text{ cal/}^\circ\text{Cg}$$

 Calors latents de l' H_2O (1 atm):

$$l_{H_2O \text{ l-g}} = 540 \text{ cal/g}$$

$$l_{H_2O \text{ s-l}} = 80 \text{ cal/g}$$

 Punt triple de l' H_2O :

$$T_3 \equiv 273.16 \text{ K} \quad P_3 = 6.03 \cdot 10^{-3} \text{ atm}$$

 Punt d'ebullició de l' H_2O a 1 atm (PEN):

$$T_v = 373.125 \text{ K}$$

 Punt de coexistència s-l de l' H_2O a 1 atm:

$$T_g = 273.15 \text{ K}$$

Llista de símbols

N	nombre sencer genèric
i	índex genèric
K	constant de proporcionalitat
X, Y, Z, a, b, A, B, D	constants o funcions genèriques
y, y', y''	funció genèrica i derivades
ϵ	error o incertesa
n, x	nombre de mols, fracció molar
m, M	massa, massa molecular
ρ	densitat
v, V	volum (intensiu, extensiu)
p	pressió
T, θ	temperatura, altres temperatures
S	superfície, àrea
σ	tensió superficial
ℓ	longitud
τ	tensió
$\mathcal{M}$	magnetització
$\mathcal{H}$	intensitat de camp magnètic
I	corrent
$\mathcal{V}$	diferència de potencial
$\mathcal{R}$	resistència
P	potència
z	alçada
r	radi
t	temps
ϑ	velocitat
g	gravetat
k	conductivitat tèrmica
$\dot{Q}$	flux de calor
ϕ	altres fluxos
c, C	calor específica, capacitat calorífica
c_V, c_p, C_V, C_p	calor específica a volum constant i a pressió constant
γ	c_p/c_V
R	constant dels gasos
α	coeficient de dilatació lineal
β	coeficient de dilatació volúmica
κ	coeficient de compressibilitat
ϖ	coeficient piezotèrmic
$\mathcal{Z}$	factor de compressibilitat
$\mathcal{Y}$	mòdul de Young
$\mathcal{J}, \mathcal{J}_K$	coeficients de Joule i de Joule-Kelvin
$\mathcal{C}$	constant de Curie
u, U	energia interna
w, W	treball
q, Q	calor
s, S	entropia
h, H	entalpia
f, F	energia lliure de Hemholtz
g, G	energia de Gibbs
l, L	calor latent de transformació
η, ε	rendiment, eficiència

Índex

Introducció	I
1 Introducció als fenòmens tèrmics	1
2 Principi zero i temperatura	11
3 Equacions d'estat	19
4 Primer principi: treball, calor i energia interna	33
5 Màquines tèrmiques	53
6 Segon principi i entropia	65
7 Conseqüències del segon principi i altres potencials termodinàmics	87
8 Transicions de fase	121

que la temperatura puja fins a 22.5°C . Negligint les pèrdues de calor per radiació, troben la calor específica del coure.

El problema es pot resoldre per balanç energètic. Anomenarem 1 el coure que forma el calorímetre i 2 el coure que s'introdueix. Les calors absorbides i cedides per l'aigua, el coure del calorímetre i el coure de la mostra són:

$$\begin{aligned} Q_{H_2O} &= c_{H_2O} m_{H_2O} (T_f - T_{iH_2O}) \\ Q_1 &= c_{Cu} m_1 (T_f - T_{i1}) \\ Q_2 &= c_{Cu} m_2 (T_f - T_{i2}) \end{aligned}$$

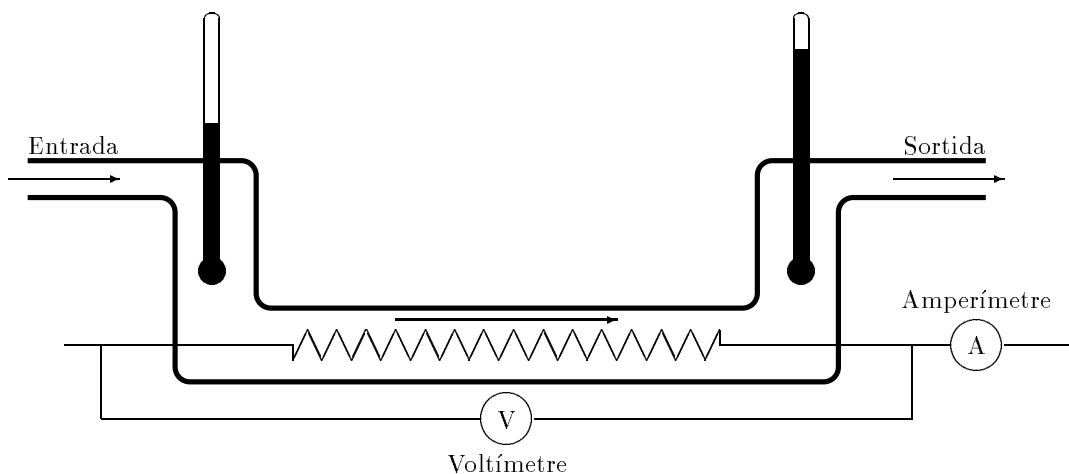
El balanç energètic és $Q_{H_2O} + Q_1 + Q_2 = 0$:

$$\begin{aligned} c_{H_2O} m_{H_2O} (T_f - T_{iH_2O}) + c_{Cu} [m_1 (T_f - T_{i1}) + m_2 (T_f - T_{i2})] &= 0 \\ c_{Cu} &= - \frac{c_{H_2O} m_{H_2O} (T_f - T_{iH_2O})}{m_1 (T_f - T_{i1}) + m_2 (T_f - T_{i2})} \\ c_{Cu} &= 1 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C} \frac{500 \text{ g } 7.5^{\circ}\text{C}}{(560 \text{ g } 77.5 - 300 \text{ g } 7.5) \text{ g}^{\circ}\text{C}} = 0.091 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

Nota: les taules donen $0.093 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$.

3 La figura representa un escalfador elèctric l'objectiu del qual és subministrar aigua calenta de forma contínua. L'aigua flueix a raó de 300 g/min , el termòmetre d'entrada indica 15°C , el voltímetre assenyalava 120 V i l'amperímetre, 10 A .

- Què indica el termòmetre de sortida una vegada s'ha arribat a l'estat estacionari?
- Per què no cal tenir en compte la capacitat calorífica de l'aparell?



- Un cop a l'estat estacionari, si suposem que l'aparell no té fuites de calor, podem dir que en un cert interval de temps Δt la calor dissipada en la resistència és absorbida per l'aigua:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} c \Delta T \Rightarrow P = \phi \Delta T c_{H_2O}$$

on ϕ és el flux d'aigua, això és, la quantitat d'aigua que passa per unitat de temps. D'altra banda la potència que es dissipa a la resistència és $P = IV = 10 \text{ A} \cdot 120 \text{ V} = 1200 \text{ W} = 1200 \text{ J/s}$. Així:

$$T_f = T_i + \frac{P}{\phi c_{H_2O}} = 15^\circ\text{C} + \frac{1200 \text{ J/s}}{(300 \text{ g/min}) (1 \text{ min}/60 \text{ s}) (1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) (4.1868 \text{ J/1 cal})} = 72.32^\circ\text{C}$$

- (b) En l'estat estacionari no cal tenir en compte la capacitat calorífica de l'aparell ja que aquest no se segueix escalfant, sinó que està, localment, a temperatura constant. Així, no absorbeix calor.

4 Un vas de massa molt petita conté 500 g d'aigua a la temperatura de 80°C . Quants grams de gel a la temperatura de -20°C s'han de deixar caure per tal que la temperatura final del sistema sigui de 50°C ?

Cal fer el balanç energètic, però cal tenir en compte la calor latent de fusió:

$$-Q_{H_2O} = Q_{gel}$$

$$-c_{H_2O}m_{H_2O}(T_f - T_{i_{H_2O}}) = c_{gel}m_{gel}(T_g - T_{i_{gel}}) + lm_{gel} + c_{H_2O}m_{gel}(T_f - T_g)$$

on $T_g = 0^\circ\text{C}$ és el punt de fusió de l' H_2O i $l = 80 \text{ cal/g} > 0$ la calor latent d'aquest canvi d'estat. Aïllant la massa del gel:

$$m_{gel} = \frac{(1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) (500 \text{ g}) (80 - 50)^\circ\text{C}}{(0.45 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) (20^\circ\text{C}) + 80 \text{ cal/g} + (1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) (50^\circ\text{C})} = 108 \text{ g}$$

5 Un dipòsit d'energia solar té capacitat per emmagatzemar 10^9 cal . Compareu les necessitats d'espai:

- (a) Si la calor s'emmagatzema en aigua escalfada des d'una temperatura mínima de 27°C fins a una màxima de 50°C .
- (b) Si la calor s'emmagatzema en sal de Glauber ($Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$) escalfada en el mateix interval de temperatura.

Propietats de la sal de Glauber:

Calor específica (sòlid)	$c_s = 0.46 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$
Calor específica (líquid)	$c_l = 0.68 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$
Densitat	$\rho = 1.6 \text{ g/cm}^3$
Punt de fusió	$T_{fus} = 32^\circ\text{C}$
Calor de fusió	$l = 50 \text{ cal/g}$

- (a) Vegem quin volum es necessita en el cas de l'aigua:

$$Q = c_{H_2O}m_{H_2O}\Delta T \Rightarrow m_{H_2O} = Q/c_{H_2O}\Delta T = \frac{10^9 \text{ cal}}{1 \text{ cal/g}^\circ\text{C} (50 - 27)^\circ\text{C}} = 4.35 \cdot 10^7 \text{ g},$$

els quals, tenint en compte que l'aigua té un volum específic de 1 l/kg :

$$V_{H_2O} = 4.35 \cdot 10^4 \text{ l} = 43.5 \text{ m}^3.$$

(b) Si es fa servir la sal de Glauber:

$$Q = c_s m (T_{fus} - T_i) + m l + c_l m (T_{fin} - T_{fus})$$

$$m = \frac{Q}{c_s (T_{fus} - T_i) + l + c_l (T_{fin} - T_{fus})} =$$

$$\frac{10^9 \text{ cal}}{(0.46 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) (32 - 27)^\circ\text{C} + 50 \text{ cal/g} + (0.68 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) (50 - 32)^\circ\text{C}} = 1.55 \cdot 10^7 \text{ g}$$

El volum que ocupa aquesta sal serà:

$$V_{\text{sal}} = m/\rho = \frac{1.548 \cdot 10^7 \text{ g}}{1.6 \text{ g/cm}^3} = 9.684 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 9.684 \text{ m}^3$$

Nota: L'aigua és una de les substàncies amb calor específica més elevada, i per tant una bona candidata per emmagatzemar calor. El que passa és que usant una transició de fase es pot emmagatzemar encara molta més energia.

6 En un sistema domèstic de calefacció per aigua calenta, l'aigua arriba als radiadors a una temperatura de 60°C i surt a 38°C . Es vol substituir el sistema de calefacció per un altre de vapor en el qual el vapor a pressió atmosfèrica es condensa en els radiadors sortint d'aquests a 82°C . Quants kilograms de vapor subministraran la mateixa quantitat de calor que subministrava 1 kg d'aigua calenta en la primera instal·lació?

Vegem quanta calor subministra 1 kg d'aigua en el primer cas:

$$Q = c_l m_l \Delta T = (1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) (1000 \text{ g}) (38 - 60)^\circ\text{C} = -22000 \text{ cal}$$

Per a obtenir la mateixa calor amb vapor:

$$Q = l m_v + c_v m_v (T_{fin} - T_v)$$

on l és la calor de condensació específica de l'aigua: $l_{\text{gas} \rightarrow \text{liquid}} = -539 \text{ cal/g}$

$$m_v = \frac{Q}{l + c_v (T_{fin} - T_v)} = \frac{-22000 \text{ cal}}{-539 \text{ cal/g} + (1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) (82 - 100)^\circ\text{C}} = 39 \text{ g} = 0.039 \text{ kg}$$

7 Un bullidor amb un fons d'acer d'1.5 cm de gruix reposa sobre un forn. L'àrea del fons és de 1500 cm^2 . A l'interior del bullidor l'aigua es troba a 100°C , i s'evaporen 750 g d'aigua cada 5 min. Trobeu la temperatura de la superfície inferior del bullidor que està en contacte amb el forn.

Amb les dades que ens dona el problema podem trobar fàcilment l'energia per unitat de temps (potència) que és absorbida per l'aigua:

$$P_{H_2O} = \frac{l \Delta m}{\Delta t} = \frac{(750 \text{ g}) (539 \text{ cal/g})}{(5 \text{ min}) (60 \text{ s/1 min})} = 1.35 \cdot 10^3 \text{ cal/s}$$

L'energia per unitat de temps que travessa el fons del bullidor ve donada per l'expressió:

$$\dot{Q} = k S \frac{T_2 - T_1}{\Delta z}$$

on Δz és el gruix del fons del bullidor. La conductivitat tèrmica de l'acer és: $k = 0.12 \text{ cal/s cm } ^\circ\text{C}$. Atès que la potència absorbida per l'aigua és la que traspasa el fons del bullidor:

$$P_{H_2O} = \dot{Q}$$

$$P_{H_2O} = k S \frac{T_2 - T_1}{\Delta z} \Rightarrow T_2 = \frac{P_{H_2O} \Delta z}{k S} + T_1 = \frac{(1.35 \cdot 10^3 \text{ cal/s}) (1.5 \text{ cm})}{(0.12 \text{ cal/s cm } ^\circ\text{C}) (1500 \text{ cm}^2)} + 100^\circ\text{C} = 111.3^\circ\text{C}$$

- 8 Les parets d'una nevera que funciona amb gel estan construïdes amb un material aïllant de conductivitat tèrmica $k = 10^{-4} \text{ cal/s cm } ^\circ\text{C}$, mesuren 2 m^2 i tenen un gruix de 5 cm . La temperatura exterior és de 20°C i la interior de la nevera ha de mantenir-se a 5°C . El gel fos surt a una temperatura de 15°C . Quin és el consum de gel per hora de la nevera?**

La calor que, per unitat de temps, entra a la nevera és:

$$\dot{Q} = k S \frac{T_2 - T_1}{\Delta z} = (10^{-4} \text{ cal/s cm } ^\circ\text{C}) (2 \cdot 10^4 \text{ cm}^2) \frac{(20 - 5)^\circ\text{C}}{5 \text{ cm}} = 6 \text{ cal/s}$$

Per tant en una hora:

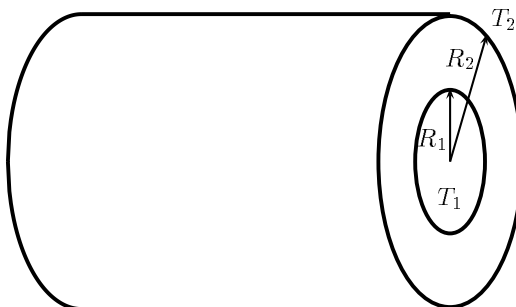
$$Q = \dot{Q} \times \Delta t = 21.6 \text{ kcal}.$$

Per compensar aquesta calor hem de menester la següent quantitat de gel:

$$Q = l m_{H_2O} + c_{H_2O} m_{H_2O} \Delta T$$

$$m_{H_2O} = \frac{Q}{l + c_{H_2O} \Delta T} = \frac{2.16 \cdot 10^4 \text{ cal}}{80 \text{ cal/g} + (1 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}) (15^\circ\text{C})} = 227.4 \text{ g}$$

- 9 La calor flueix radialment cap a fora a través d'un aïllador cilíndric de radi exterior R_2 , que envolta un tub de vapor de radi R_1 . La temperatura de la superfície interior de l'aïllador és T_1 , i la de la superfície exterior, T_2 .**



- (a) A quina distància radial del centre del tub la temperatura és la mitjana aritmètica de T_1 i T_2 ?
- (b) Representeu gràficament T en funció d' r .

En l'estat estacionari el flux de calor radial a través d'una superfície cilíndrica de radi r i alçada z serà independent d' r . Aquest flux de calor vindrà donat per l'equació diferencial:

$$\dot{Q} = -k \mathcal{S} \frac{dT}{dr}$$

Per a una superfície cilíndrica $\mathcal{S} = 2\pi r z$ per tant:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -2\pi k z r \frac{dT}{dr} = \text{cte} \\ \frac{dr}{r} &= -\frac{2}{\dot{Q}} \pi k z dT \\ \int_{R_1}^r \frac{dr}{r} &= -\frac{2}{\dot{Q}} \pi k z \int_{R_1}^r dT \\ \ln r - \ln R_1 &= -\frac{2}{\dot{Q}} \pi k z [T(r) - T_1] \end{aligned}$$

on $T(r)$ és la temperatura a la superfície de radi r . Aïllant el flux de calor:

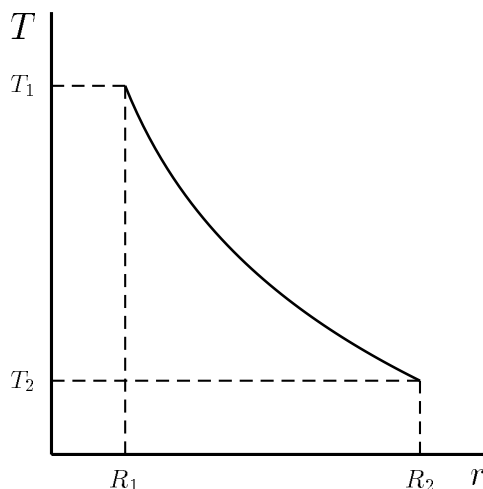
$$\dot{Q} = 2\pi k z \frac{T_1 - T(r)}{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}$$

- (a) Cerquem el punt r_m on $T = \frac{T_1 + T_2}{2} \equiv T_m$. Si imaginem una superfície cilíndrica a $r = r_m$, entre R_1 i r_m l'expressió anterior ha de ser certa. També entre r_m i R_2 . A més a més sabem que el flux de calor és el mateix per a tots dos casos (no hi ha cap absorció de calor a la superfície imaginària a r_m):

$$\begin{aligned} 2\pi k z \frac{T_1 - T_m}{\ln\left(\frac{r_m}{R_1}\right)} &= 2\pi k z \frac{T_m - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{r_m}\right)} \\ \ln\left(\frac{r_m}{R_1}\right) &= \ln\left(\frac{R_2}{r_m}\right) \\ r_m &= \sqrt{R_1 R_2} \end{aligned}$$

- (b) Fent servir que el flux de calor no depèn d' r l'equació que hem deduït pel cilindre ens permet trobar el perfil de temperatura. L'únic que cal fer és determinar la constant $\dot{Q}$ imposant que $T(R_2) = T_2$. Resulta:

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$



- 10 Determineu la dependència de la temperatura amb la distància radial en la regió compresa entre dues superfícies esfèriques concèntriques de radis R_1 i R_2 que es troben, en l'estat estacionari, a les temperatures T_1 i T_2 respectivament.

En l'estat estacionari el flux de calor radial a través d'una superfície esfèrica de radi r serà independent d' r . Aquest flux de calor vindrà donat per l'equació diferencial:

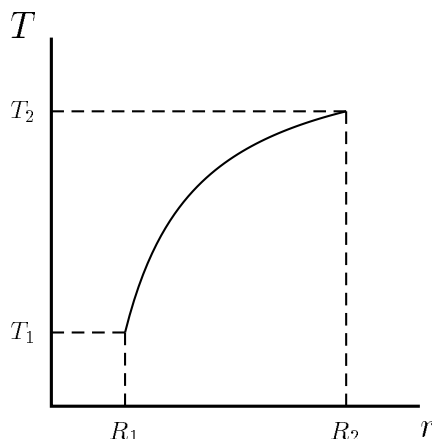
$$\dot{Q} = -k \mathcal{S} \frac{dT}{dr}$$

Per a una superfície esfèrica $\mathcal{S} = 4\pi r^2$ per tant:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = ct \\ \frac{dr}{r^2} &= -\frac{4}{Q} \pi k dT \\ \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2} &= -\frac{4}{Q} \pi k \int_{T_1}^{T(r)} dT \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} &= \frac{4}{Q} \pi k [T(r) - T_1] \end{aligned}$$

Pel fet que a R_2 la temperatura val T_2 :

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 4\pi k \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} (T_2 - T_1) \\ T(r) &= T_1 + \frac{R_2}{r} \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} (T_2 - T_1) \end{aligned}$$



- 11 Un tub de coure de diàmetre exterior 1 cm serveix de conductor de vapor. Per tal de disminuir les pèrdues tèrmiques, s'ha cobert el tub amb una capa d'un material aïllant de 5 mm de gruix. Però després d'això no només no han disminuït les pèrdues sinó que han augmentat. Per què?

L'equació de difusió de la calor és: $\dot{Q} = -\mathcal{S}k \frac{dT}{dr}$. Amb l'aïllant el que es fa és disminuir la k i disminuir $\frac{dT}{dr}$ (la mateixa caiguda de temperatura es produeix en més espai), però en el cas de tenir simetria cilíndrica $\mathcal{S}$ augmenta. Vegem com podem quantificar això:

Si el tub original té radi interior R_1 , exterior R_2 , la temperatura de dins és T_1 , l'exterior T_2 i la seva conductivitat és k_t , el flux de calor per unitat de longitud serà:

$$\frac{\dot{Q}}{z} = 2\pi k_t \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Un cop posat l'aïllant de conductivitat k_a i radi exterior R_3 (suposem que la superfície entre el tub i l'aïllant es troba a una temperatura T):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}'}{z} &= 2\pi k_t \frac{T_1 - T}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 2\pi k_a \frac{T - T_2}{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} \\ T \left\{ \frac{k_t}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} + \frac{k_a}{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} \right\} &= \frac{T_1 k_t}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} + \frac{T_2 k_a}{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} \\ T &= \frac{k_a T_2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + k_t T_1 \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{k_a \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + k_t \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} \end{aligned}$$

Amb el que tenim:

$$T - T_1 = \frac{k_a \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{k_a \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + k_t \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} (T_2 - T_1)$$

$$\frac{\dot{Q}'}{z} = \pi \frac{k_a k_t}{k_a \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + k_t \ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right)} (T_1 - T_2)$$

Perquè sigui $\dot{Q} < \dot{Q}'$:

$$\begin{aligned} \frac{k_t}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} &< \frac{k_a k_t}{k_a \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + k_t \ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right)} \\ k_a \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) &> k_t \ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right) + k_a \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \\ k_t \ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right) &< 0 \end{aligned}$$

Aquesta darrera relació només es pot complir si $R_3 < R_2$, cosa que és falsa.

Per tant, l'augment de les pèrdues de calor no es pot atribuir a la conducció de calor; s'ha d'atribuir a l'augment de la radiació de calor o de la convecció.

