

TEXTOS DOCENTS

280

INTRODUCCIÓ A L'ANÀLISI FUNCIONAL

Joan Lluís Cerdà Martín

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi

TEXTOS DOCENTS

280

INTRODUCCIÓ A L'ANÀLISI FUNCIONAL

Joan Lluís Cerdà Martín

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



Cerdà Martín, Joan Lluís

Introducció a l'anàlisi funcional. – (Textos docents ; 280)

Bibliografia. Índex

A la portada: Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi

ISBN 84-475-2934-7

I. Universitat de Barcelona. Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi II. Títol III. Col·lecció:
Textos docents (Universitat de Barcelona) ; 280

1. Anàlisi funcional

© PUBLICACIONS I EDICIONS DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA, 2005
Adolf Florensa, s/n; 08028 Barcelona; Tel. 934 035 442; Fax 934 035 446;
comercial.edicions@ub.edu; www.publicacions.ub.es

Dipòsit legal: B-27644-2005

ISBN: 84-475-2934-7

Impressió: Gráficas Rey, S.L.

Imprès a Espanya / Printed in Spain

ÍNDEX

PREÀMBUL	11
PRÒLEG	15
1. ESPAIS NORMATIS	27
1.1 Propietats generals	28
1.1.1 Espais de Banach	30
1.1.2 Subespais	32
1.1.3 Productes	34
1.1.4 Quocients	35
1.2 Els exemples fonamentals	35
1.2.1 L'espai de les funcions contínues sobre un compacte . . .	35
1.2.2 Espais L^p	39
1.3 Operadors lineals	42
1.3.1 Operadors lineals acotats	42
1.3.2 Isomorfismes i equivalència de normes	44
1.3.3 Espais de dimensió finita	45
1.3.4 L'espai normat dels operadors lineals acotats	47
1.3.5 La sèrie de Neumann	49
1.3.6 Teoremes de l'aplicació oberta i de la gràfica tancada . . .	52
1.3.7 Principi d'acotació uniforme	55
1.4 Exercicis	56
1.5 Resum del capítol 1	63
2. ESPAIS DE HILBERT	67
2.6 Productes escalars	67
2.7 El teorema de la projecció	71
2.8 Dualitat	75
2.8.1 L'adjunt	76
2.9 Bases ortonormals i sèries de Fourier	78
2.10 Aplicació a la teoria del senyal	84

2.10.1	Anàlisi multiresolució	85
2.10.2	Les transformacions de Haar	86
2.10.3	Onetes de les AMR	89
2.10.4	El càlcul amb onetes	90
2.10.5	Onetes de Daubechies	92
2.11	Exercicis	94
2.12	Resum del capítol 2	100
3.	DUALITAT	103
3.13	Teorema de Hahn-Banach	103
3.14	Exemples de duals	106
3.14.1	Duals dels espais L^p	107
3.14.2	El dual de $\mathcal{C}[a, b]$	108
3.15	L'adjunt	111
3.16	Exercicis	114
3.17	Resum del capítol 3	116
4.	OPERADORS COMPACTES	119
4.18	Propietats bàsiques i exemples	119
4.19	Valors propis i espectre	124
4.20	L'alternativa de Fredholm	125
4.21	Operadors compactes autoadjunts	129
4.22	Operadors compactes no lineals	133
4.22.1	Teorema de Brower	134
4.22.2	Teorema de Schauder del punt fix	138
4.22.3	Aplicació a equacions integrals no lineals	140
4.23	Exercicis	141
4.24	Resum del capítol 4	145
EPÍLEG		147
BIBLIOGRAFIA SUGGERIDA		151
ÍNDIX ALFABÈTIC		153

PREÀMBUL

Aquestes pàgines pretenen ser una primera aproximació als mètodes de l'anàlisi funcional, que es caracteritza per la seva naturalesa abstracta, amb la substitució de l'estudi de funcions individuals que satisfan determinades equacions de l'anàlisi, per la consideració de classes de funcions i d'operadors entre elles, determinats per la naturalesa de cada problema.

Sorgeix com a branca autònoma de l'anàlisi matemàtica a partir de la consideració, de manera sistemàtica, d'operadors en espais de Hilbert i de Banach, al llarg del primer terç del segle passat.

Es va desenvolupar inicialment per tractar problemes clàssics, especialment els relacionats amb les equacions diferencials, ordinàries i en derivades parcials, les equacions integrals i el càlcul de variacions.

Malgrat que els seus mètodes, per si sols, no solen resoldre aquests problemes, són molt útils per aclarir els seus aspectes essencials i, a més, els progressos en anàlisi funcional han estimulat i motivat nous problemes de l'anàlisi.

Els seus objectes, operadors i espais entre els que actuen, i els seus teoremes resulten de recollir situacions i arguments que apareixen reiteradament de manera més o menys explícita en construccions i teoremes diversos de l'anàlisi, on s'observa que sobre les classes de funcions sovint se superposen estructures algebraïques i topològiques o mètriques. Nosaltres ens fixarem especialment en la combinació de les propietats d'espai vectorial i d'espai topològic que donen lloc a l'anàlisi funcional lineal.

Més concretament, els espais funcionals que ens interessaran seran espais normats, espais vectorials reals o complexos (en general de dimensió infinita) provistos d'una distància que prové d'una norma semblant a la dels espais euclidians,

amb la qual són contínues les operacions d'espai vectorial. Els operadors normalment seran aplicacions lineals contínues entre espais normats.

Hem triat les equacions integrals associades a problemes de valors inicials i de contorn per a equacions diferencials de segon ordre com a exemple de l'anàlisi que pot servir de motivació dels teoremes del curs i on s'apliquen les seves conclusions.

En el pròleg es mostra com aquests problemes de valors inicials i de contorn es transformen en l'estudi d'operadors integrals, aplicacions lineals de l'espai $C[a, b]$ de les funcions contínues sobre $[a, b]$ (que es dotarà de la convergència uniforme), o de l'espai $L^2(a, b)$ de les funcions de quadrat integrable (amb la convergència en mitjana quadràtica). Aquests espais i operadors podran servir al lector com a models de referència i el problema de contorn es reprèn a l'epíleg com a il·lustració dels resultats de l'últim capítol.

A més d'aquests pròleg i epíleg, el text consta de quatre capítols.

El capítol 1 conté fets fonamentals referents a espais de Banach generals i als operadors lineals acotats entre aquests espais, amb els exemples bàsics dels espais L^p i $C(K)$ de les funcions contínues sobre un compacte.

El capítol 2 està destinat als espais de Hilbert, la classe dels espais de Banach amb una norma que prové d'un producte escalar, com succeeix amb els espais euclidians i els espais L^2 de funcions de quadrat integrable. A partir del resultat fonamental que és el teorema de la projecció, estudiem la dualitat i els desenvolupaments en sèries de Fourier respecte de bases ortonormals. Les onetes de la teoria del senyal serveixen per mostrar la conveniència i utilitat de la construcció de sistemes ortonormals diferents del trigonomètric.

El capítol 3 es refereix a la dualitat d'espais normats generals, amb el teorema de Hahn-Banach, que estableix l'abundància de formes lineals contínues, com a resultat central. S'hi inclou la descripció dels duals de $C[a, b]$ i dels espais L^p ($1 \leq p < \infty$).

El capítol 4 se centra en la teoria espectral dels operadors compactes d'espais de Banach i d'operadors compactes autoadjunts d'espais de Hilbert, que permet estendre a dimensió infinita la teoria espectral d'espais euclidians i la diagonalització d'endomorfismes simètrics. En aquest capítol es mostra l'efectivitat dels mètodes i resultats dels capítols anteriors, i els seus teoremes s'apliquen als operadors integrals com els del preàmbul i de l'epíleg. De l'anàlisi funcional no lineal s'hi inclou el teorema del punt fix.

Cal dir que aquest text no és més que una introducció breu a l'anàlisi funcional en el context dels espais de Banach que pretén iniciar el lector en aquesta matèria. Els tres llibres sobre aquesta branca de l'anàlisi esmentats en la bibliografia en poden ser una bona continuació.

Essencialment hi he inclòs el contingut d'un curs trimestral que he estat explicant a la Universitat de Barcelona aquests últims anys, al llarg dels quals he tingut

l'oportunitat de recollir punts de vista de diversos companys del Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi que també han participat en el curs esmentat. Amb tots tinc un deute, ja que les seves opinions han estat, sens dubte, un ajut inestimable en la preparació del text. De manera més concreta, la revisió de diferents parts del text feta per H. Fontich, D. Pascuas, M. Serrahima i J. Soria ha permès localitzar-ne diverses deficiències i millorar-ne sensiblement la redacció final.

Barcelona, gener de 2004

PRÒLEG

Considerem funcions amb valors reals i d'una variable real, definides en un interval $[a, b]$ de la recta.

És fàcil escriure qualsevol equació diferencial lineal de segon ordre sobre $[a, b]$ amb coeficients continus, $u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = c(x)$, en l'anomenada **forma autoadjunta** (vegeu l'exercici 1):

$$(pu')' - qu = f \quad (0 < p \in \mathcal{C}^1[a, b]; q, f \in \mathcal{C}[a, b]),$$

i per abreujar usem la notació

$$Lu := (pu')' - qu. \quad (1)$$

Una solució d'aquesta equació és una funció $u \in \mathcal{C}^2[a, b]$ (és a dir, dues vegades contínuament diferenciable) que satisfà $Lu(x) = f(x)$ per a tot $x \in [a, b]$.

Problema de Cauchy

Es tracta del **problema de valors inicials**

$$Lu = f, \quad u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \beta, \quad (2)$$

per a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i $f \in \mathcal{C}[a, b]$ donats.

Integrant dues vegades, aquest problema es pot transformar en el de resoldre una sola equació integral. Comencem amb un exemple senzill.

Exemple 1. *El problema de valors inicials*

$$u'' + u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1,$$

equivale al de la resolució de l'equació

$$\int_0^x K(x, y)u(y) dy - u(x) = -x, \quad (K(x, y) := y - x).$$

En efecte, en aquest cas l'equació diferencial ja està en forma autoadjunta i, integrant entre 0 i s , tenint present la condició $u'(0) = 1$, resulta que necessàriament

$$u'(s) - 1 + \int_0^s u(y) dy = 0.$$

Observeu que el recíproc és cert, si $u \in C^1[0, 1]$ satisfà aquesta equació i la condició $u(0) = 0$, també resol el problema de Cauchy.

Tornem a integrar, ara entre 0 i x , i apliquem la condició $u(0) = 0$, i resulta que el problema de valors inicials equival a resoldre l'equació integral

$$u(x) - x + \int_0^x \int_0^s u(y) dy ds = 0 \quad (u \in C[0, 1]).$$

La integral doble se simplifica aplicant el teorema de Fubini sobre el triangle $\{(s, y); 0 \leq y \leq s \leq x\}$, ja que així tenim

$$\int_0^x \int_0^s u(y) dy ds = \int_0^x u(y) \int_y^x ds dy = \int_0^x (x - y)u(y) dy,$$

i l'equació integral es transforma en

$$u(x) - x + \int_0^x (x - y)u(y) dy = 0 \quad (u \in C[0, 1]),$$

equivalent a la de l'enunciat.

Tornem al problema de Cauchy més general (2) procedint de la mateixa manera.

Integrem entre a i y . De la condició $u'(a) = \beta$ i de (1) obtenim

$$p(y)u'(y) - p(a)\beta - \int_a^y q(t)u(t) dt = \int_a^y f(t) dt,$$

i u és solució del problema si i només si $u \in C^1[a, b]$, $u(a) = \alpha$ i

$$u'(y) = \frac{p(a)\beta}{p(y)} + \frac{1}{p(y)} \int_a^y q(t)u(t) dt + \frac{1}{p(y)} \int_a^y f(t) dt.$$

Integrant ara entre a i x , i imposant la condició $u(a) = \alpha$, observem que això equival que u sigui una funció contínua sobre $[a, b]$,

$$u(x) = \int_a^x \frac{1}{p(s)} \int_a^s q(y)u(y) dy ds - g(x),$$

on hem denotat

$$g(x) := -\alpha - p(a)\beta \int_a^x \frac{ds}{p(s)} - \int_a^x \frac{1}{p(s)} \int_a^s f(y) dy ds. \quad (3)$$

Si $a < x \leq b$, totes les funcions involucrades són contínues sobre el triangle $\Delta := \{(s, y); a \leq y \leq s \leq x\}$ i, per a un producte $v(s)w(y)$ de funcions contínues, el teorema de Fubini permet escriure

$$\int_{\Delta} v(s)w(y) ds dy = \int_a^x v(s) \int_a^s w(y) dy ds = \int_a^x w(y) \int_y^x v(s) ds dy.$$

Per tant,

$$u(x) = \int_a^x q(y)u(y) \int_y^x \frac{ds}{p(s)} dy - g(x).$$

En resum,

Proposició 1. Si g és com en (3) i denotem

$$K(x, y) := q(y) \int_y^x \frac{1}{p(t)} dt,$$

$u \in C^2[a, b]$ és solució del problema (2) si i només si $u \in C[a, b]$ i satisfà l'equació integral

$$\int_a^x K(x, y)u(y) dy - u(x) = g(x).$$

Donada $K(x, y)$, funció contínua sobre el triangle $\Delta := \{(x, y); a \leq y \leq x \leq b\}$, de T definit per

$$Tu(x) := \int_a^x K(x, y)u(y) dy$$

es diu que és **operador de Volterra** de nucli integral continu $K(x, y)$. En aquesta situació cal observar que, si $u \in C[a, b]$, la funció $Tu(x) := \int_a^x K(x, y)u(y) dy$ també és contínua i obtenim una aplicació lineal

$$T : C[a, b] \longrightarrow C[a, b].$$

L'equació integral de la Proposició 1 és $(T - I)u = g$ i els mètodes del curs proporcionaran l'operador invers de $T - I$, amb la qual cosa $(T - I)^{-1}g$ serà l'única solució del problema de Cauchy (**teorema d'existència i unicitat** per a aquest problema). Aquest resultat està contingut en el Corol·lari 1.3.4 i la seva demostració dependrà tant de la linealitat de $T : \mathcal{C}[a, b] \longrightarrow \mathcal{C}[a, b]$ com del valor de la norma $\|T\|$ d'aquest operador, definida per

$$\|T\| := \sup\{\|Tu\|_{[a,b]}; \|u\|_{[a,b]} \leq 1\}.$$

on, per a $f \in \mathcal{C}[a, b]$, s'entén que

$$\|f\|_{[a,b]} := \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|,$$

la “norma uniforme”.

Observem també que $L : \mathcal{C}^2[a, b] \longrightarrow \mathcal{C}[a, b]$ és lineal i anem a veure que el teorema d'existència i unicitat esmentat permet demostrar que les solucions de l'equació homogènia $Lu = 0$ formen un subespai vectorial, $\text{Nuc } L \subset \mathcal{C}^2[a, b]$, de dimensió 2.

Prèviament convé definir el **determinant wronskià**

$$W(\xi) := y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_1'(\xi)y_2(\xi)$$

de dues funcions y_1, y_2 derivables.

Lema 1. *El wronskià W de dues solucions y_1 i y_2 de $Lu = 0$ s'anul·la en un punt si i només si y_1 i y_2 són linealment dependents. Aleshores, $W(\xi) = 0$ en tot punt $\xi \in [a, b]$.*

Demostració. Si y_1 i y_2 són linealment dependents, de les relacions

$$c_1y_1 + c_2y_2 = 0, \quad c_1y_1' + c_2y_2' = 0 \quad (c_1 \neq 0 \text{ o } c_2 \neq 0),$$

vàlides en tot punt ξ , en resulta trivialment $W(\xi) = 0$ (regla de Cramer).

Si $W(\xi) = 0$ per a un $\xi \in [a, b]$, el sistema

$$c_1y_1(\xi) + c_2y_2(\xi) = 0, \quad c_1y_1'(\xi) + c_2y_2'(\xi) = 0$$

té solució $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ i $v := c_1y_1 + c_2y_2$ satisfà $Lv = 0$, $v(\xi) = 0$ i $v'(\xi) = 0$, i per tant $v = 0$ sobre $[\xi, b]$ (unicitat en el problema de Cauchy). Per raons similars, $v = 0$ sobre $[a, \xi]$, és a dir, $0 = v = c_1y_1 + c_2y_2$ amb $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ i y_1, y_2 són linealment dependents. $\square$

Proposició 2. Si y_1 és l'única solució de $Lu = 0$ que satisfà les condicions inicials $y_1(a) = 1$ i $y_1'(a) = 0$, i y_2 la que satisfà $y_2(a) = 0$ i $y_2'(a) = 1$, aleshores $\{y_1, y_2\}$ és una base de $\text{Nuc } L$.

Demostració. Del lema 1 resulta la independència lineal de y_1 i y_2 , ja que $W(a) = 1$.

A més, tota altra solució u de $Lu = 0$ és combinació lineal de y_1 i y_2 , ja que $v := u(a)y_1 + u'(a)y_2$ és la solució que satisfà $v(a) = u(a)$ i $v'(a) = u'(a)$; per tant $u = v = u(a)y_1 + u'(a)y_2$. $\square$

Problema de contorn

Una **condició de contorn** per a $u \in \mathcal{C}[a, b]$ derivable en a i en b serà una condició del tipus

$$B_1(u) := A_1 u(a) + A_2 u'(a) = 0 \quad (|A_1| + |A_2| \neq 0)$$

o del tipus

$$B_2(u) := B_1 u(b) + B_2 u'(b) = 0 \quad (|B_1| + |B_2| \neq 0).$$

Donada $g \in \mathcal{C}[a, b]$, considerarem el **problema de contorn**

$$Lu = g, \quad u \in \mathcal{D} \tag{4}$$

per a L amb domini $\mathcal{D} := \{u \in \mathcal{C}^2[a, b]; B_1(u) = 0, B_2(u) = 0\}$.

Si és possible, es tracta de transformar aquest nou problema també en una sola equació integral, integrant dues vegades. Comencem per un exemple senzill.

Exemple 2. El problema de contorn

$$u'' = g, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (u \in \mathcal{C}^2[0, 1]),$$

on $g \in \mathcal{C}[0, 1]$ és una funció donada, té com a única solució

$$u(x) = - \int_0^1 G(x, y) g(y) dy;$$

on G és la funció contínua sobre $[0, 1]^2$

$$G(x, y) := \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } x > y. \end{cases}$$

De moment ens limitem a fer una comprovació observant que la fórmula integral s'escriu

$$-u(x) = \int_0^x y(1-x)g(y) dy + \int_x^1 x(1-y)g(y) dy,$$

on u és de classe $\mathcal{C}^1$, $u(0) = u(1) = 0$ i

$$-u'(x) = -\int_0^x yg(y) dy + (1-x)xg(x) + \int_x^1 (1-y)g(y) dy - x(1-x)g(x).$$

Després de simplificar, podem tornar a derivar. Resulta u de classe $\mathcal{C}^2$, $u(0) = u(1) = 0$ i

$$-u''(x) = -xg(x) - (1-x)g(x),$$

de manera que u és solució del problema de contorn.

Aquesta és l'única solució, ja que la solució general de l'equació homogènia $u'' = 0$ és $u(x) = Ax + B$, la de $u'' = g$ serà

$$u(x) = Ax + B - \int_0^1 G(x, y)g(y) dy$$

i les condicions de contorn impliquen $A = B = 0$.

Vegem una forma constructiva d'obtenir G per a problemes de contorn (4) més generals.

Si existeixen dues solucions linealment independents, y_1 i y_2 , de $Lu = 0$, de manera que $B_1(y_1) = 0$ i $B_2(y_2) = 0$, l'anomenada **funció de Green** associada a L i a les condicions de contorn està definida sobre el quadrat $[a, b]^2$ per

$$G(x, \xi) := \begin{cases} -\frac{1}{C}y_1(\xi)y_2(x) & \text{si } x \geq \xi \\ -\frac{1}{C}y_2(\xi)y_1(x) & \text{si } x < \xi, \end{cases}$$

on $C := pW$ és una constant no nul·la. En efecte, si $u, v \in \mathcal{C}^2[a, b]$, una simple substitució proporciona la **identitat de Lagrange**

$$uLv - vLu = [p(uv' - u'v)]' = (pW)'.$$

D'aquesta i de les condicions $Ly_1 = Ly_2 = 0$ s'obté, derivant, que pW és constant. No pot ser nul·la ja que y_1 i y_2 són solucions linealment independents de $Lu = 0$ i s'aplica el Lema 1.

La funció de Green satisfà les propietats següents:

Proposició 3. (a) $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ i és contínua sobre $[a, b]^2$.

(b) Fixat $a < \xi < b$, $G(\cdot, \xi)$ satisfà $L(G(\cdot, \xi)) = 0$ sobre $[a, b] \setminus \{\xi\}$, $B_1(G(\cdot, \xi)) = 0$ i $B_2(G(\cdot, \xi)) = 0$.

(c) Fixat $a < \xi < b$, existeixen les derivades laterals de $G(\cdot, \xi)$ en el punt ξ i satisfan

$$\frac{\partial}{\partial x}G(\xi+, \xi) - \frac{\partial}{\partial x}G(\xi-, \xi) = -\frac{1}{p(\xi)}.$$

Demostració. Comprovem (c), per exemple. De la definició obtenim

$$C \frac{\partial}{\partial x}G(\xi+, \xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi), \quad C \frac{\partial}{\partial x}G(\xi-, \xi) = y_1'(\xi)y_2'(\xi)$$

i resulta

$$C \left(\frac{\partial}{\partial x}G(\xi+, \xi) - \frac{\partial}{\partial x}G(\xi-, \xi) \right) = W,$$

equivalent a (d). □

Teorema 1. Siguin $f \in \mathcal{C}[a, b]$ i G la funció de Green anterior. Són equivalents:

(i) u és solució del problema $Lu = f$, $B_1(u) = 0$, $B_2(u) = 0$, i

(ii) $u(x) = -\int_a^b G(x, \xi)f(\xi) d\xi$.

És a dir, l'aplicació lineal $L : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}[a, b]$ és bijectiva, d'inversa l'aplicació $T : \mathcal{C}[a, b] \longrightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{C}[a, b]$, on

$$(Tf)(x) := -\int_a^b G(x, \xi)f(\xi) d\xi,$$

de manera que Tf és l'única solució del problema de contorn (i).

Demostració. Suposem (i). De la identitat de Lagrange, integrant, deduïm la fórmula de Green

$$\int_x^y (uLv - vLu) = \left[p(uv' - vu') \right]_x^y,$$

que, aplicada a la solució u del problema de contorn i a $G(\cdot, \xi)$ sobre els intervals $[a, \xi - \varepsilon]$ i $[\xi + \varepsilon, b]$, fent $\varepsilon \rightarrow 0$, dóna

$$\int_a^{\xi-} \left(uL(G(\cdot, \xi)) - G(\cdot, \xi)L(u) \right) = \left[p \left(u \frac{\partial}{\partial x}G(\cdot, \xi) - G(\cdot, \xi)u' \right) \right]_a^{\xi-}$$

i

$$\int_{\xi+}^b \left(uL(G(\cdot, \xi)) - G(\cdot, \xi)L(u) \right) = \left[p \left(u \frac{\partial}{\partial x}G(\cdot, \xi) - G(\cdot, \xi)u' \right) \right]_{\xi+}^b.$$

Però $L(u) = f$ i $L(G(\cdot, \xi)) = 0$ en els dominis d'integració, de manera que la suma dels primers membres és igual a $-\int_a^b G(x, \xi)f(x) dx$.

Per altra banda, de (c) i (b) de la Proposició 3 resulta que la suma dels segons membres és

$$pu \frac{1}{p} + \left[p(u \frac{\partial}{\partial x} G(\cdot, \xi) - u' G(\cdot, \xi)) \right]_a^b = u,$$

i obtenim (ii) si $a < \xi < b$. Es prova per als extrems per pas al límit.

Per al recíproc, si (ii) és cert, de la definició de G obtenim

$$u(x) = -\frac{1}{C} y_2(x) \int_a^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi - \frac{1}{C} y_1(x) \int_x^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi$$

i derivant hi ha una cancel·lació que proporciona

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{1}{C} y_2'(x) \int_a^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi - \frac{1}{C} y_1'(x) \int_x^b y_2(\xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_a^{x-} \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_{x+}^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Amb un raonament similar es calcula $(p(x)u'(x))'$ i, utilitzant les propietats de G , s'obté

$$Lu(x) = \int_a^b L(G(\cdot, \xi))(x) \cdot f(\xi) d\xi - f(x) = -f(x). \quad \square$$

Observació 1. Hi ha funció de Green si i només si l'operador $L : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}[a, b]$ és injectiu, o sigui, $Lu = 0$ només té en $\mathcal{D}$ la solució trivial.

Del teorema 1 resulta la bijectivitat de L . Inversament, si L és injectiva i y_1, y_2 són solucions no nul·les de $Lu = 0$ que satisfan $B_1(y_1) = 0$ (per exemple, solució del problema de valors inicials $y_1(a) = A_2, y_1'(a) = -A_1$) i $B_2(y_2) = 0$, necessàriament y_1, y_2 són linealment independents i tenen una funció de Green associada. En efecte, de $W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$ resulta $B_1(y_2) = B_2(y_1) = 0$ en contradicció amb la injectivitat de L .

Observació 2. La funció de Green de

$$Lu := u'', \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

és la funció

$$G(x, \xi) := \begin{cases} \xi(1-x) & \text{si } x \geq \xi \\ x(1-\xi) & \text{si } x < \xi \end{cases}$$

de l'exemple 2.

En efecte, la solució general de $u'' = 0$ és $u(x) = Ax + B$ i les solucions $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x - 1$ de valors inicials $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$ i $y_2(1) = 0$, $y_2'(0) = 1$ són linealment independents ($W = 1$). En aquest cas, $C = -1/W = -1$ i obtenim $G(x, \xi) = -y_1(\xi)y_2(x) = -\xi(x - 1)$ si $x \geq \xi$ i $G(x, \xi) = -y_2(\xi)y_1(x) = -(\xi - 1)x$ si $x < \xi$.

Les relacions anteriors permeten considerar el problema de contorn per a una equació homogènia amb un paràmetre λ

$$(pu')' - qu = \lambda ru, \quad B_1(u) = 0, \quad B_2(u) = 0,$$

on r és una funció contínua positiva en tot punt de $[a, b]$. El **problema de Sturm-Liouville** consisteix en la determinació de les solucions no idènticament nul·les d'aquest nou problema, i dels valors de λ (anomenats **autovalors**) pels quals existeixen aquestes solucions no trivials o **autofuncions** del problema.

Aplicant el Teorema 1 a $f = ru$ obtenim una altra descripció d'aquest problema de contorn a partir de la funció de Green G .

Corol·lari 1. La funció $u \in C^2[a, b]$ és una autofunció d'autovalor λ per al problema de Sturm-Liouville anterior si i només si $u \in C[a, b]$ i

$$u(x) = -\lambda \int_a^b G(x, \xi)r(\xi)u(\xi) d\xi.$$

Si $\lambda \neq 0$, aquesta condició significa que u és funció pròpia de valor propi $\mu = 1/\lambda$ per a l'operador $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $Tu(x) := -\int_a^b G(x, \xi)r(\xi)u(\xi) d\xi$.

Exemple 3. Els autovalors λ del problema de Sturm-Liouville

$$u'' = \lambda u, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

són els termes de la successió $\{-\pi^2 n^2\}_{n=1}^\infty$.

A l'exemple 2 hem descrit la funció de Green d'aquest problema. Si hi ha solució no trivial, necessàriament $\lambda < 0$ (en el cas $\lambda = 0$ això és evident i, si $\lambda > 0$, la solució general de $u'' - \lambda u = 0$ és $u(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$, i no n'hi ha cap que satisfaci les condicions de contorn). Per tant $\lambda < 0$, la solució general és $u(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x)$, la condició $u(0) = 0$ implica $A = 0$, de $u(1) = 0$ amb $B \neq 0$ resulta $\lambda = -\pi^2 n^2$ i $u_n(x) := \sin(\pi n x)$ és autofunció d'autovalor $-\pi^2 n^2$.

És interessant observar que $\mathcal{C}[a, b]$, amb la norma del suprem, que descriu la convergència uniforme, es pot substituir per qualsevol dels espais de l'anàlisi real $L^p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$), format per les funcions de potència p -èsima integrable i proveït de la distància associada a la norma $\|f\|_p := (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$ (considerant equivalents dues funcions que coincideixen g.p.t.).¹

El cas $p = 2$ és especialment interessant. De manera semblant al que succeeix amb les normes euclidianes, en aquest cas $\|\cdot\|_2$ procedeix d'un "producte escalar de funcions"

$$(f, g)_2 := \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

ja que $\|f\|_2 = (f, f)_2^{1/2}$, fet que resulta ser molt útil en els càlculs.

Observem que, si $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$, també $\int_a^b |Tf(x)|^2 dx < \infty$, es pot definir

$$(Tf)(x) := - \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

i s'obté un operador $T : L^2(a, b) \longrightarrow L^2(a, b)$. Si $|G| \leq M$, aquests fets són conseqüència, per exemple, de la desigualtat de Cauchy-Schwarz del producte escalar,²

$$|(f, g)_2| \leq \|f\|_2 \|g\|_2,$$

similar a la que satisfà el producte escalar euclidià.

En efecte, si $|G| \leq M$, $\int_a^b |G(x, \xi) f(\xi)| d\xi \leq M(b-a)^{1/2} \|f\|_2 < \infty$, de manera que $G(x, \cdot) f$ és integrable, $(Tf)(x)$ està ben definit i $|Tf(x)|^2 \leq M^2(b-a) \|f\|_2^2$. Per tant,

$$\int_a^b |Tf(x)|^2 dx \leq M^2(b-a)^2 \|f\|_2^2 < \infty$$

i $Tf \in L^2(a, b)$.

Aquesta similitud amb els espais euclidians motiva sovint la conveniència de treballar amb funcions de $L^2(a, b)$, ja que es tracta d'un espai més gran que $\mathcal{C}[a, b]$ i ric en propietats, i les solucions que es troben resulten ser funcions contínues. En efecte, si f és contínua sobre $[a, b]$, també és de $L^2(a, b)$ i, si $u \in L^2(a, b)$ satisfà una equació integral com les de la Proposició 1 o del Teorema 1, la identitat de la mateixa equació integral prova que automàticament u és contínua.

¹ $L^p(a, b)$ conté $\mathcal{C}[a, b]$, ja que si dues funcions de $\mathcal{C}[a, b]$ són equivalents, són idèntiques i, si $f \in \mathcal{C}[a, b]$, $|f|^p$ també és contínua i, per tant, integrable.

²Vegeu la proposició 2.6.1.

Exercicis

1. L'equació diferencial lineal amb coeficients continus $u'' + a_1u' + a_0u = c$ es transforma en forma autoadjunta,

$$(py')' - qy = f \quad (0 < p \in \mathcal{C}^1[a, b]; q, f \in \mathcal{C}[a, b]),$$

multiplicant els dos membres per l'exponencial d'una primitiva de a_1 .

Solució. En efecte, si $p(x) = \exp(\int a_1)$, $p' = pa_1$, de manera que $pu'' + pa_1u' + pa_0u = pc$ equival a $(py')' - p'y' + pa_1y' + pa_0y = pc$ i només cal prendre $q = -pa_0$ i $f = pc$.

2. Escriviu en forma autoadjunta i descriviu com a equacions integrals els problemes de valors inicials sobre $[0, 1]$

(a) $u'' + u = \cos x, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$

(b) $u'' + a_1u' + a_0u = 0, \quad u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta \quad (a_0, a_1 \in \mathbf{R}).$

(c) $u'' + xu' + u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$

Solució. Usem l'exercici anterior aplicat a la proposició 1:

Es tracta de $(pu')' - qu = f$ i $\int_0^x K(x, y)u(y) dy - u(x) = g(x)$ amb els següents valors de $p, q, \alpha, \beta, g, f$ i K (sempre $a = 0, b = 1$):

(a) $p = 1, q = -1, \alpha = 0, \beta = 1, g(x) = -x + \cos(x) - 1, f(x) = \cos x$ i $K(x, y) = y - x.$

(b) $p(x) = \exp(a_1x), q(x) = -a_0 \exp(a_1x), \alpha, \beta, g(x) = -\alpha + (\beta/\alpha_1)(\exp(-a_1x) - 1), f = 0, K(x, y) = (a_0/a_1)(\exp(a_1y - a_1x) - 1).$

(c) $p(x) = x \exp(x^2/2), q(x) = -x \exp(x^2/2), \alpha = 1, \beta = 0, g = -1, f = 0$ i $K(x, y) = x(1 - \exp(x^2/2 - y^2/2)).$

3. Sobre $[a, b]$, la solució general d'una equació diferencial lineal de segon ordre amb coeficients constants,

$$f'' + \alpha f' + \beta f = 0,$$

és del tipus $f = A\varphi_1 + B\varphi_2$ i φ_1, φ_2 es determinen a partir dels zeros λ_1 i λ_2 de $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ de la manera següent:

Si λ_1 i λ_2 són reals i diferents, $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ i $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$; si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\alpha/2 \in \mathbf{R}$, $\varphi_1(x) = e^{\lambda x}$ i $\varphi_2(x) = xe^{\lambda x}$; si $\lambda_1 = r + is$ i $\lambda_2 = r - is$ amb $s \neq 0$, $\varphi_1(x) = e^{rx} \cos(sx)$ i $\varphi_2(x) = e^{rx} \sin(sx).$

Solució. Les solucions constitueixen un subespai vectorial bidimensional de $\mathcal{C}[a, b]$ (Proposició 2). Una comprovació directa, o l'ús del Wronskià, mostra que φ_1 i φ_2 són solucions linealment independents.

4. Si existeixen, trobeu les funcions de Green dels exemples següents:

(a) $Lu = u'', \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$

(b) $Lu = u'', \quad u(0) = u'(0), \quad u(1) + u'(1) = 0.$

(c) $Lu = u'' + \pi^2 u$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

Solució. (a) $\mathcal{D} = \{u = Ax + B; u(0) = 0, u'(0) = 0\} = \{0\}$ i existeix funció de Green. Trobem $y_1(x) = x$ imposant $y_1(0) = 0$ a $y_1(x) = Ax + B$ (prenem $A = 1$). Anàlogament, $y_2(x) = 1$ satisfà $y_2'(1) = 0$. Resulta $W = -1 = -C$, i $G(x, \xi) = \xi$ si $x \geq \xi$ i $G(x, \xi) = x$ si $x < \xi$.

(b) De manera similar, $G(x, \xi) = (\xi + 1)(x + 2)$ si $x \geq \xi$ i $G(x, \xi) = (\xi + 2)(x + 1)$ si $x < \xi$.

(c) $\mathcal{D} = \{u = B \sin(\pi x); B \in \mathbf{R}\}$ i no hi ha funció de Green.

5. Determineu els autovalors i la funció de Green del problema de Sturm-Liouville

$$u'' - \lambda u = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Solució. La funció de Green és la de l'exercici 4-(a).

Si $\lambda > 0$, la solució general de $u'' - \lambda u = 0$ és $u = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ i les condicions de contorn només se satisfan si $A = B = 0$.

Si $\lambda < 0$, la solució general és $u = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x)$, i de les condicions de contorn s'obté $B = 0$ i $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 1$, és a dir $\lambda = k\pi$.