

PROBABILITATS: PROBLEMES I MÉS PROBLEMES

Olga Julià de Ferran
David Márquez-Carreras
Carles Rovira Escofet
Mònica Sarrà Rovira



UNIVERSITAT DE BARCELONA



PROBABILITATS: PROBLEMES I MÉS PROBLEMES

Olga Julià de Ferran
David Márquez-Carreras
Carles Rovira Escofet
Mònica Sarrà Rovira

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



Probabilitats: problemes i més problemes

Bibliografia

ISBN 84-475-2906-1

I. Julià de Ferran, Olga II. Títol

1. Probabilitats 2. Problemes i exercicis

© PUBLICACIONS I EDICIONS DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA, 2005

Adolf Florensa, s/n; 08028 Barcelona; Tel. 934 035 442; Fax 934 035 446;

lcuenca@ub.edu; <http://www.publicacions.ub.es>

Impressió: Gráficas Rey, S.L.

Dipòsit legal:

ISBN: 84-475-2906-1

Impres a España / Printed in Spain

Aquesta publicació ha comptat amb l'ajut de la Generalitat de Catalunya.

Queda rigorosament prohibida la reproducció total o parcial d'aquesta obra. Cap part d'aquesta publicació, inclòs el disseny de la coberta, pot ser reproduïda, emmagatzemada, transmesa o utilitzada per cap tipus de mitjà o sistema, sense l'autorització prèvia per escrit de l'editor.

Índex

1	Introducció	5
2	Probabilitats	7
2.1	Espais de probabilitat	7
2.1.1	Esdeveniments o successos	7
2.1.2	Definició de probabilitat	8
2.1.3	Espais de probabilitats finits	9
2.1.4	Propietats de la probabilitat	9
2.2	Probabilitat condicionada	10
2.3	Esdeveniments independents	11
2.4	Fórmula de Bayes	11
2.5	Problemes	12
2.6	Problemes amb indicació	42
2.6.1	Indicacions	46
3	Variables aleatòries unidimensionals	55
3.1	Variable aleatòria	55
3.2	Llei i funció de distribució	56
3.3	Tipus de variables aleatòries	57
3.4	Transformacions de variables aleatòries	58
3.5	Esperança matemàtica	59
3.6	Variables aleatòries més usals	61
3.7	Problemes	63
3.8	Problemes amb indicació	108
3.8.1	Indicacions	111
4	Vectors aleatoris	121
4.1	Funcions de distribució conjunta i marginals	121
4.2	Independència	122
4.3	Vectors aleatoris discrets	123
4.4	Vectors aleatoris absolutament continus	124
4.5	Transformació de vectors aleatoris	125

4.6	Moments	125
4.7	Vectors aleatoris més usuals	127
4.8	Suma de distribucions	128
4.9	Problemes	128
4.10	Problemes amb indicació	182
4.10.1	Indicacions	186
5	Successions de variables aleatòries	195
5.1	Lemes de Borel-Cantelli	195
5.2	Convergències de variables aleatòries	196
5.2.1	Convergència quasi segura	196
5.2.2	Convergència en probabilitat	197
5.2.3	Convergència en L^p o mitjana d'ordre p	198
5.2.4	Convergència en llei	198
5.3	Relacions entre les convergències	199
5.4	Llei forta dels grans nombres	200
5.5	Teorema del límit central	201
5.6	Problemes	201
5.7	Problemes amb indicació	236
5.7.1	Indicacions	240
6	Apèndix	251
6.1	Combinatòria	251
6.2	Llista de símbols	254

Capítol 1

Introducció

La teoria de la probabilitat és possiblement una de les àrees de la matemàtica amb un desenvolupament més intens des de la segona meitat del segle XX. Això es deu a diverses raons: d'una banda, la probabilitat forma el cos metodològic bàsic necessari per a l'estadística i, d'altra banda, les seves aplicacions són molt diverses i en camps de gran actualitat com les finances o la genètica. Per tant, la probabilitat ha esdevingut una de les àrees més rellevants de la matemàtica i una part fonamental del seu estudi, així com també d'altres com la informàtica o enginyeries superiors.

L'objectiu d'aquest llibre és omplir un buit dins el món editorial en el camp de les probabilitats. Els estudiants universitaris que cursen assignatures que tracten probabilitats a un nivell elemental, poden trobar fàcilment un bon grapat de llibres per consultar, tant teòrics com pràctics. En canvi, quan una assignatura no té aquest caràcter tan bàsic, l'estudiant no disposa d'aquesta oferta: malgrat que pot trobar força llibres de consulta teòrics, hi ha una manca bastant gran de referències dedicades a la resolució de problemes. El llibre que teniu a les mans vol solucionar aquesta mancança.

Aquest és, per tant, un llibre de problemes de probabilitats resolts destinat a estudiants d'un primer cicle d'enginyeries o de llicenciatures en matemàtiques o estadística.

El llibre tracta els temes fonamentals de les probabilitats com són els espais de probabilitat, les probabilitats condicionades, les variables i els vectors aleatoris, els moments, les successions de variables aleatòries i les seves convergències i els teoremes límit. Hem agrupat aquests temes en quatre capítols que hem titulat com segueix: probabilitats, variables aleatòries unidimensionals, vectors aleatoris i successions de variables aleatòries.

Cadascun d'aquests capítols consta de tres parts ben diferenciades. A la primera, per tal d'ajudar a la comprensió dels problemes i facilitar la feina dels lectors, hem inclòs un resum dels aspectes teòrics més destacats associats al tema,

obviant les demostracions dels resultats enunciats. Si el lector està interessat en un estudi més exhaustiu d'aquests aspectes teòrics o en la demostració dels resultats presentats, li recomanem la consulta d'algun dels llibres citats a la bibliografia. A la segona part del capítol es plantegen entre vint-i-cinc i trenta-cinc problemes i se'n dóna la resolució detallada, fent tots els passos per comprendre'ls. Finalment, en l'última secció es proposen els enunciats de deu a vint problemes, esmentant després unes indicacions per solucionar-los.

Voldríem destacar la diferència entre els problemes resolts i els indicats. La resolució dels problemes resolts està pensada per ensenyar com s'han d'aplicar les diverses tècniques del càlcul probabilístic, intentant presentar el raonament abstracte i lògic que és necessari per resoldre qualsevol problema matemàtic. Estaríem particularment contents, a més, si el lector hi troba també el plus d'intuïció o imaginació que cal per posar-se davant d'un problema matemàtic i que hem intentat reflectir a la nostra presentació. Els problemes indicats estan menys desenvolupats i es proposen més aviat com un complement per tal que l'alumne pugui practicar i comprovar el seu nivell.

Esperem, per tant, que aquest llibre sigui d'utilitat al lector, i que l'ajudi en la comprensió de les probabilitats.

Capítol 2

Probabilitats

En aquest capítol, el nostre objecte d'estudi són els anomenats **experiments aleatoris**, aquells experiments que tenen diferents resultats possibles i pels quals no podem saber quin es produirà.

2.1 Espais de probabilitat

El primer pas per definir un espai de probabilitat és considerar el conjunt dels resultats possibles de cada experiment, conjunt que anomenarem **espai mostral**.

*L' **espai mostral** Ω es defineix com el conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori.*

L'espai mostral pot ser de molts tipus, no ha de ser sempre numèric i tant pot ser finit com infinit.

Associat a tot experiment aleatori tenim una família $\mathcal{F}$ de subconjunts de Ω , que anomenarem **esdeveniments** o **successos**, i que té estructura de σ -àlgebra, és a dir,

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- si $A \in \mathcal{F}$, aleshores $A^c \in \mathcal{F}$,
- si $\{A_i, i \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}$, aleshores $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Observeu que si en la darrera condició canviem les unions numerables per unions finites, obtenim l'estructura d'àlgebra.

2.1.1 Esdeveniments o successos

Alguns casos particulars:

- el **succés segur**, és el format per tots els resultats possibles, és a dir, el mateix Ω .
- el **succés impossible** és el que no es dona mai, és a dir, $\emptyset$.
- els **successos elementals** són aquells formats per un únic element de Ω .

Donats dos esdeveniments A i B podem definir diverses operacions i relacions entre ells:

- l'esdeveniment format per tots els resultats de A i tots els resultats de B (incloent els que estan a A i B alhora) s'anomena **A unió B** i s'escriu com $A \cup B$,
- l'esdeveniment format pels resultats de A i B alhora s'anomena **A intersecció B** i s'escriu com $A \cap B$,
- l'esdeveniment format pels resultats que no són de A s'anomena **complementari** de A i s'escriu com A^c .

Tenim també les definicions següents:

- dos esdeveniments A i B són disjunts si no tenen resultats en comú, és a dir, si $A \cap B = \emptyset$,
- si tot resultat de B també és un resultat de A es diu que B està inclòs en A i s'escriu $B \subseteq A$.

2.1.2 Definició de probabilitat

La definició axiomàtica següent d'espai de probabilitat la va donar Kolmogorov l'any 1933.

Definició 2.1.1 *Un **espai de probabilitat** és una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ tal que: Ω és el conjunt de resultats possibles o espai mostral, $\mathcal{F}$ és la família d'esdeveniments amb estructura de σ -àlgebra i P és una aplicació*

$$\begin{aligned} P : \quad \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longrightarrow P(A) \end{aligned}$$

de manera que

- $P(\Omega) = 1$,
- si $\{A_i, i \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}$, tals que $A_i \cap A_j = \emptyset$ per a tot $i \neq j$, aleshores

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\sigma - \text{additivitat}).$$

2.1.3 Espais de probabilitats finits

Quan l'espai mostral és finit, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$, parlarem d'**espai de probabilitat finit**. En aquests casos considerem com a σ -àlgebra $\mathcal{F}$ la formada per tots els subconjunts de Ω , denotada per $\mathcal{P}(\Omega)$.

En aquest cas una probabilitat P queda definida assignant a cada resultat ω_i una probabilitat p_i , o dit d'una altra manera, $P(\omega_i) = p_i$, $1 \leq i \leq k$. Hem d'imposar certes restriccions: $p_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq k$ i $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Aleshores, donat qualsevol esdeveniment A , podem calcular la seva probabilitat com

$$P(A) = \sum_{i; \omega_i \in A} p_i.$$

Un cas particular important és l'**equiprobable**. En aquesta situació els resultats elementals tenen tots la mateixa probabilitat,

$$p_1 = p_2 = \dots = p_k = \frac{1}{k},$$

on recordem que k és el cardinal de Ω . Aleshores per calcular la probabilitat de qualsevol esdeveniment A hem de fer

$$P(A) = \sum_{i; \omega_i \in A} \frac{1}{k} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Moltes vegades es diu que la probabilitat es calcula com casos favorables dividit per casos possibles (definició donada per Laplace l'any 1812).

Observació: La idea de l'equiprobabilitat es pot estendre a espais de probabilitats no finits, on Ω sigui un conjunt no numerable i poguem relacionar la definició de probabilitat d'un conjunt amb alguna mesura física (longitud, àrea o volum) d'aquest conjunt. Per exemple si agafem com a Ω un interval podem definir la probabilitat de qualsevol subconjunt A de Ω com

$$P(A) = \frac{\text{longitud de } A}{\text{longitud de } \Omega}.$$

2.1.4 Propietats de la probabilitat

A partir de la definició axiomàtica de la probabilitat es poden demostrar tot un seguit de propietats bàsiques.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Additivitat: si $\{B_i, 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{F}$, tals que $B_i \cap B_j = \emptyset$ per a tot $i \neq j$, aleshores

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(B_i).$$

En particular, per a $A, B \in \mathcal{F}$ disjunts, aleshores

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

3. Si $A \in \mathcal{F}$, aleshores $P(A^c) = 1 - P(A)$.

4. Monotonia: si $A, B \in \mathcal{F}$, amb $A \subset B$ aleshores

$$P(A) \leq P(B).$$

5. Si $\{A_i, 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{F}$, aleshores

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_l) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

En particular, per a $A, B \in \mathcal{F}$, aleshores

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

6. Si $A, B \in \mathcal{F}$, aleshores

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

2.2 Probabilitat condicionada

Definició 2.2.1 *Donats dos esdeveniments $A, B \in \mathcal{F}$, tal que $P(B) > 0$, es defineix la **probabilitat de A condicionada per B** com*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Fixat un esdeveniment B amb $P(B) > 0$, l'aplicació

$$\begin{aligned} P_B: \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longrightarrow P(A|B) \end{aligned}$$

defineix una probabilitat de manera que $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ és un nou espai de probabilitat.

A partir de la definició de probabilitat condicionada s'obté l'anomenada **fórmula de les probabilitats compostes**: siguin $\{A_i, 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{F}$ tals que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, aleshores

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

2.3 Esdeveniments independents

Definició 2.3.1 Donats dos esdeveniments A i B de $\mathcal{F}$ direm que són **independents** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Proposició 2.3.2 Siguin A i B dos esdeveniments de $\mathcal{F}$ amb $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$. Aleshores les afirmacions següents són equivalents:

1. A i B són independents,
2. $P(A|B) = P(A)$,
3. $P(B|A) = P(B)$.

Propietats dels esdeveniments independents:

1. Els esdeveniments Ω i $\emptyset$ són independents de tot altre esdeveniment A .
2. Són equivalents:
 - (a) A i B són independents,
 - (b) A^c i B són independents,
 - (c) A i B^c són independents,
 - (d) A^c i B^c són independents.

Podem estendre també la definició d'independència a una família d'esdeveniments.

Definició 2.3.3 Donada una família d'esdeveniments $\{A_i, i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$ direm que són **independents** si $\forall r \geq 1$ i $\forall \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq I$,

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_r}).$$

2.4 Fórmula de Bayes

Considerem ara que tenim una partició finita del nostre espai mostral, és a dir, tenim una família d'esdeveniments $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ disjunts dos a dos i tals que $\Omega = \cup_{i=1}^n A_i$. Suposem a més que $P(A_i) > 0$ per a tot i . Donat aleshores qualsevol altre esdeveniment $B \in \mathcal{F}$ tenim la igualtat següent:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) \\ &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n). \end{aligned}$$

Aquest resultat es coneix com la **fórmula de les probabilitats totals**. Recalquem que el resultat s'estén quan la partició és numerable.

Si a més tenim un esdeveniment B amb $P(B) > 0$, llavors

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{P(B | A_1)P(A_1) + \dots + P(B | A_n)P(A_n)}.$$

Aquesta fórmula es coneix com a **fórmula de Bayes** i ens permet invertir l'ordre del condicionament.

2.5 Problemes

1. En cadascun dels experiments següents indiqueu quin és l'espai mostral. En cada apartat digueu si estem en una situació d'equiprobabilitat.
 - (a) Es tria una família de dos fills i s'anoten els sexes dels fills ordenats per edats (suposem que la probabilitat dels dos sexes és la mateixa).
 - (b) El mateix que l'apartat anterior però ara sense tenir en compte l'ordre.
 - (c) S'agafa un llibre qualsevol i es compta el nombre d'errors d'impremta.
 - (d) D'una baralla de 48 cartes se n'extrauen dues amb reemplaçament.
 - (e) El mateix que l'apartat anterior però sense reemplaçament.

Solució:

(a)

$$\Omega = \{(\text{nen}, \text{nen}), (\text{nen}, \text{nena}), (\text{nena}, \text{nen}), (\text{nena}, \text{nena})\}.$$

Tots els esdeveniments elementals tenen probabilitat $1/4$, per tant són equiprobables.

- (b) Ara tindrem una possibilitat menys ja que $(\text{nen}, \text{nena})$ i $(\text{nena}, \text{nen})$ seran el mateix resultat. Aleshores l'espai mostral estarà format pels elements següents:

$$\Omega = \{\{\text{nen}, \text{nen}\}, \{\text{nen}, \text{nena}\}, \{\text{nena}, \text{nena}\}\}$$

i

$$P(\{\text{nen}, \text{nen}\}) = P(\{\text{nena}, \text{nena}\}) = \frac{1}{4} \text{ i } P(\{\text{nen}, \text{nena}\}) = \frac{1}{2}.$$

Per tant, l'espai mostral no és equiprobable.

- (c) El nombre d'errors d'impremta serà un nombre natural. Com que no podem posar-hi una fita superior haurem d'agafar com a espai mostrat

$$\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

No estem en un cas d'equiprobabilitat, perquè l'espai mostrat té infinits esdeveniments elementals.

- (d) Per designar les cartes utilitzarem la notació ω_i , $1 \leq i \leq 48$. Considerarem aleshores les parelles (ω_i, ω_j) on ω_i indicarà la primera carta que hem tret i ω_j , la segona. Així

$$\Omega_1 = \{(\omega_i, \omega_j), 1 \leq i \leq 48, 1 \leq j \leq 48\}.$$

Estem en un cas equiprobable perquè tots els esdeveniments elementals tenen probabilitat $\frac{1}{48^2}$.

Considerem l'espai mostrat

$$\Omega_2 = \{\{\omega_l, \omega_k\}, 1 \leq l \leq k \leq 48\},$$

on no es té en compte l'ordre, els resultats ja no són equiprobables.

- (e) Utilitzant la mateixa notació que en l'apartat anterior tenim

$$\Omega_1 = \{(\omega_i, \omega_j), 1 \leq i \leq 48, 1 \leq j \leq 48, i \neq j\},$$

on la probabilitat de cada esdeveniment elemental és $\frac{1}{48 \times 47}$ i els resultats són equiprobables. Si en aquest cas no considerem l'ordre, aleshores

$$\Omega_2 = \{\{\omega_l, \omega_k\}, 1 \leq l < k \leq 48\}$$

i els resultats continuen sent equiprobables.

2. Sigui $\mathcal{F}$ la classe dels subconjunts finits o amb complementari finit de Ω . Demostreu que és una àlgebra. Sigui $\mathcal{G}$ la classe dels conjunts finits o numerables o amb complementari finit o numerable. Demostreu que $\mathcal{G}$ és una σ -àlgebra.

Solució: Donem primer la definició d'àlgebra. Direm que una família $\mathcal{F}$ de Ω té estructura d'àlgebra quan compleixi les tres condicions següents:

- (a) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- (b) si $A \in \mathcal{F}$ aleshores $A^c \in \mathcal{F}$,
- (c) si $A, B \in \mathcal{F}$ aleshores $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Observeu que la diferència entre les estructures d'àlgebra i de σ -àlgebra està només en la darrera condició, on canviem les unions finites per unions numerables. Evidentment tota σ -àlgebra és una àlgebra.

Veurem que $\mathcal{F}$ és una àlgebra. Hem de comprovar les tres condicions:

- (a) $\Omega \in \mathcal{F}$. És evident ja que Ω té complementari finit.
- (b) Si $A \in \mathcal{F}$ aleshores $A^c \in \mathcal{F}$. Surt de la definició de $\mathcal{F}$, que A sigui finit o amb complementari finit equival a dir que A^c sigui finit o amb complementari (és A) finit.
- (c) Si $A, B \in \mathcal{F}$, aleshores $A \cup B \in \mathcal{F}$. En efecte, si A i B són els dos finits, aleshores $A \cup B$ també és finit i per tant $A \cup B \in \mathcal{F}$. Altrament, A o B tenen complementari finit i per tant $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ és finit, de manera que $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Veurem ara que $\mathcal{G}$ és una σ -àlgebra. Hem de comprovar les tres condicions descrites en la secció 2.1.

- (a) $\Omega \in \mathcal{G}$. És evident ja que Ω té complementari finit.
- (b) Si $A \in \mathcal{G}$, aleshores $A^c \in \mathcal{G}$. Surt de la definició de $\mathcal{G}$, que A sigui finit o numerable o amb complementari finit o numerable equival a dir que A^c sigui finit o numerable o amb complementari (és A) finit o numerable.
- (c) Si $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{G}$ aleshores $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{G}$. En efecte, si tots els A_n , $n \geq 1$ són finits o numerables, aleshores $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ és finit o numerable (la unió numerable de conjunts numerables és numerable) i per tant $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$. Altrament, existeix algun n_0 tal que $A_{n_0}^c$ és finit o numerable, de manera que

$$\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right)^c = \bigcap_{n \geq 1} A_n^c \subset A_{n_0}^c$$

i $\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right)^c$ serà finit o numerable i per tant $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

3. Estudiem si les aplicacions següents defineixen probabilitats a $(\Omega, \mathcal{F})$:

- (a) Sigui $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i fixat $\lambda > 0$,

$$P(A) = \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- (b) Sigui $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i fixat $p \in (0, 1)$,

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k \text{ si } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

(c) Sigui $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ té un nombre finit d'elements,} \\ 1, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Solució:

(a) No pot ser una probabilitat perquè per a $\lambda > 0$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda) \neq 1.$$

(b) Ω és un espai mostral finit de manera que només cal comprovar que les probabilitats dels esdeveniments elementals són nombres positius més petits o iguals que 1 i que sumen 1. En efecte, tenim que

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$$

és sempre un valor entre 0 i 1. A més

$$\sum_{k=0}^n P(\{k\}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k = (p + (1-p))^n = 1.$$

Per tant, sí que defineix una probabilitat.

(c) No és una probabilitat, perquè no és additiva. Veiem-ho: si definim

$$A_1 = \{\text{parells}\} \text{ i } A_2 = \{\text{senars}\},$$

són disjunts i $P(A_1) = P(A_2) = 1$, però en canvi

$$1 = P(A_1 \cup A_2) \neq P(A_1) + P(A_2) = 2.$$

4. Dos estudiants de probabilitats es troben per casualitat fent cua al cinema per anar a veure la mateixa pel·lícula. A la cua hi ha m persones. Calculeu les probabilitats següents:

(a) que estiguin un darrere l'altre,

(b) que estiguin separats exactament per k persones, $k \leq m-2$,

(c) que estiguin separats com a mínim per k persones, $k \leq m-2$.

Solució: Ens interessa només la posició dels dos estudiants. Considerarem així com a casos possibles totes les posicions possibles a la cua dels dos estudiants, és a dir,

$$\text{casos possibles :} \quad m(m-1)$$

(el primer estudiant pot estar en qualsevol de les m posicions i al segon ja només li queden $m-1$ possibilitats). Estem en una situació d'equiprobabilitat. Calcularem les probabilitats comptant els casos favorables i dividint pel nombre de casos possibles.

- (a) Que estiguin un darrere l'altre: els estudiants poden estar en les posicions $(1, 2), (2, 3), \dots, (m-1, m)$. Hi ha, per tant, $m-1$ posicions possibles per a la parella d'estudiants i com que els estudiants poden estar en dos ordres diferents, en total

$$\text{casos favorables :} \quad 2(m-1).$$

Per tant,

$$P(\{\text{estan un darrere l'altre}\}) = \frac{2(m-1)}{m(m-1)} = \frac{2}{m}.$$

- (b) Que estiguin separats exactament per k persones: ara la parella pot estar en les posicions $(1, k+2), (2, k+3), \dots, (m-k-1, m)$. Hi ha $m-k-1$ posicions possibles per a la parella i considerant de nou els dos ordres, tenim

$$\text{casos favorables :} \quad 2(m-k-1).$$

Per tant,

$$P(\{\text{separats exactament per } k \text{ persones}\}) = \frac{2(m-k-1)}{m(m-1)}.$$

- (c) Que estiguin separats com a mínim per k persones: observeu

$$\begin{aligned} & P(\{\text{separats com a mínim per } k \text{ persones}\}) \\ &= \sum_{i=k}^{m-2} P(\{\text{separats exactament per } i \text{ persones}\}) \\ &= \sum_{i=k}^{m-2} \frac{2(m-i-1)}{m(m-1)} = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{j=1}^{m-k-1} j = \frac{(m-k-1)(m-k)}{m(m-1)}. \end{aligned}$$