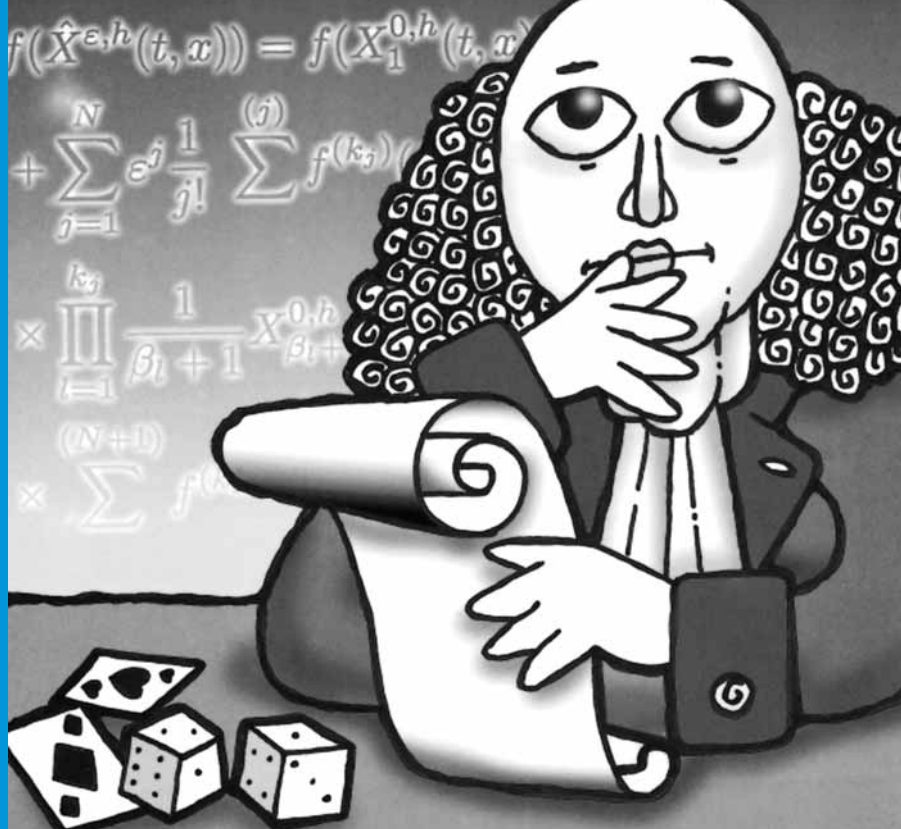


Probabilitats

Marta Sanz i Solé

$$\begin{aligned}
 M_{t,x}^{\varepsilon} &= E\{f(X_1^{0,h}(t,x)) \exp(\lambda S^{0,h}(t,x))\} \\
 &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \sum_{j=0}^i \frac{1}{j!(i-j)!} E\left\{ \sum_{k_j}^{(j)} \sum_{k_{i-j}}^{(i-j)} f^{(k_j)}(X_1^{0,h}(t,x)) \right. \\
 &\times \exp(\lambda S^{0,h}(t,x)) \times \lambda^{k_{i-j}} \prod_{l=1}^{k_j} \frac{X_{\beta_l+1}^{0,h}(t,x)}{\beta_l+1} \\
 &\times \left. \prod_{l'=1}^{k_{i-j}} \frac{X_{\beta_{l'}+2}^{0,h}(t,x)}{(\beta_{l'}+1)(\beta_{l'}+2)} \right\} + \varepsilon^{n+1} R_{n+1}^{3,\varepsilon}(t,x)
 \end{aligned}$$



Probabilitats

Marta Sanz i Solé

Índex

Introducció	xi
1 El model probabilístic	1
1.1 Fenòmens aleatoris	1
1.2 Espais de probabilitat	2
1.2.1 Propietats de la probabilitat	4
1.2.2 Espais de probabilitat finits	8
1.3 La combinatòria en el càlcul de probabilitats	10
1.4 Alguns exemples de models probabilístics	13
1.4.1 Problema de l'escrutini	14
1.4.2 Una paradoxa de Bertrand	17
1.5 Probabilitat condicionada	20
1.5.1 Urnes de Pólya	23
1.5.2 Inversió de les condicions: fórmula de Bayes	25
1.6 Esdeveniments independents	27
1.6.1 Propietats dels esdeveniments independents	27
Exercicis	31
2 Variables i vectors aleatoris	35
2.1 Variables aleatòries	35
2.2 Llei d'una variable aleatòria	41
2.3 Variables aleatòries discretes	49
2.4 Exemples de variables aleatòries discretes	50

2.4.1	Variable aleatòria de Bernoulli	50
2.4.2	Variable aleatòria binomial	51
2.4.3	Variable aleatòria geomètrica	52
2.4.4	Variable aleatòria binomial negativa	52
2.4.5	Variable aleatòria hipergeomètrica	54
2.4.6	Variable aleatòria de Poisson	56
2.5	Variables aleatòries absolutament contínues	57
2.6	Exemples de variables aleatòries absolutament contínues	58
2.6.1	Llei uniforme	59
2.6.2	Llei exponencial	59
2.6.3	Llei normal estàndard	61
2.6.4	Llei Gamma	62
2.7	Densitat de transformacions de variables aleatòries	63
2.8	Vectors aleatoris	66
2.9	Densitat de transformacions de vectors aleatoris	73
2.10	Variables aleatòries independents	74
2.11	Distribucions condicionades	79
	Exercicis	83
3	Esperança matemàtica	87
3.1	Esperança matemàtica de variables aleatòries simples	87
3.2	Esperança matemàtica de variables aleatòries no negatives . . .	90
3.3	Variables aleatòries amb esperança matemàtica finita	91
3.4	Càlcul d'esperances matemàtiques	93
3.4.1	Variables aleatòries discretes	94
3.4.2	Variables aleatòries absolutament contínues	95
3.5	Esperança matemàtica de funcions de variables aleatòries . . .	99
3.6	Moments de variables aleatòries	101
3.6.1	Moments d'ordre k	101
3.6.2	Desigualtats	103
3.7	Independència de variables aleatòries i moments	105
3.8	Regressió lineal	111

3.9	Funcions generatrius	112
3.9.1	Generalitats	113
3.9.2	Càlcul d'algunes funcions generatrius	114
3.9.3	Funcions generatrius i càlcul de moments	116
3.10	Funcions generatrius de moments	118
	Exercicis	119
4	Successions de variables aleatòries	123
4.1	Lemes de Borel-Cantelli	124
4.2	Convergència quasi segura	129
4.3	Convergència en probabilitat	134
4.4	Convergència en mitjana d'ordre p	139
4.5	Convergència en llei	141
4.6	Relacions entre els diferents tipus de convergències i aplicacions	149
	Exercicis	160
5	Lleis dels grans nombres	165
5.1	Lleis febles dels grans nombres	166
5.2	Lleis fortes dels grans nombres	171
5.2.1	Llei forta dels grans nombres per a variables incorrelacionades	172
5.2.2	Llei forta dels grans nombres de Kolmogorov	175
	Exercicis	184
6	El teorema del límit central	187
6.1	Convergència de la llei binomial	188
6.2	El teorema del límit central de Lévy-Lindeberg	190
6.3	Algunes aplicacions del teorema del límit central	197
6.3.1	Una demostració de la llei feble dels grans nombres de J. Bernoulli	197
6.3.2	Estimació de l'error comès en aproximar la freqüència relativa per la probabilitat	197

6.3.3	Determinació del nombre d'enquestats necessaris per obtenir resultats fiables	198
6.3.4	Errors en les mesures físiques	199
6.4	Apèndix	200
	Exercicis	202
A	Simulació de variables aleatòries	205
A.1	Generadors de nombres aleatoris	205
A.2	Mètodes generals per a la simulació de variables aleatòries . .	207
A.2.1	Mètode de la transformació inversa	207
A.2.2	Mètode de composició	209
A.2.3	Mètode d'acceptació-rebuig	210
A.3	Simulació d'algunes variables aleatòries particulars	211
A.3.1	Simulació de la distribució binomial	211
A.3.2	Simulació de la llei de Poisson	211
A.3.3	Simulació de la llei $\mathcal{N}(0, 1)$	212

Índex de figures

1.1	Una possible disposició de k boles en n urnes	12
1.2	Un element del conjunt Ω	14
1.3	Elements dels conjunts C , D i E , respectivament	15
1.4	Bijecció entre els conjunts D i E	16
1.5	El punt ω és triat a l'atzar en el cercle	18
1.6	C és fix, D es tria a l'atzar	18
1.7	El punt ω és triat a l'atzar en el radi $\overline{OR}$	18
2.1	Gràfica d'una funció de distribució	44
2.2	Gràfica de la funció de distribució d'una funció indicatriu . . .	45
2.3	Gràfica de la funció de distribució d'una variable aleatòria simple	45
2.4	Gràfiques de les parts contínua i discontinua de la funció de distribució de la figura 2.1	49
2.5	Funcions de distribució i de densitat d'una llei uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$	59
2.6	Funcions de distribució i de densitat d'una llei $\exp(1)$	61
2.7	Funció de densitat de la llei $\mathcal{N}(0, 1)$	62
3.1	Gràfica de la funció de distribució F	98
3.2	Exemple 3.1	110
4.1	Exemple 4.1	126
4.2	Exemple 4.4	130
4.3	Exemple 4.11	146
4.4	Exemple 4.13	156

5.1	Histograma de freqüències i gràfica d'una densitat exponencial amb $\lambda = 41,1$	169
6.1	Aproximació de la binomial per la normal	189

Introducció

La teoria de la probabilitat ha estat, des de l'inici del seu desenvolupament, molt relacionada amb aplicacions de la matemàtica. Citem, per exemple, problemes d'assegurances que apareixen a partir del segle XIV amb l'establiment de companyies d'assegurances navals a Itàlia i Holanda, dissenys de loteries, particularment popularitzades al segle XVIII, taules de mortalitat i altres elements per a l'estudi de qüestions demogràfiques, etc. Més recentment la probabilitat és utilitzada com a ingredient valuós de la modelització matemàtica en problemes de la física, l'economia financera, l'evolució de poblacions, entre d'altres. Actualment, en el públic no especialitzat, la popularitat de la probabilitat prové de la seva gran incidència en l'estadística. De fet, els models de l'estadística matemàtica són models probabilístics i bona part de les tècniques emprades en estadística provenen de la probabilitat.

És per això que la teoria de la probabilitat pot resultar atractiva a un públic amb interessos ben diversos. El científic, o futur científic, motivat per la matemàtica, hi pot trobar l'al·licient de la modelització de l'atzar amb tècniques pròpies i d'altres branques de la matemàtica que van des d'un nivell elemental a un de molt sofisticat. Al tecnòleg l'ajudarà en l'elecció i la comprensió de models i marcs d'estudi que responen de manera força acurada a la realitat. L'usuari de l'estadística podrà entendre quins són els mecanismes que el porten a prendre decisions davant de la incertesa. I, en fi, qualsevol persona amb curiositat intel·lectual podrà intentar resoldre problemes atractius de jocs i d'estratègia.

Aquest llibre va adreçat de manera prioritària a estudiants de la llicenciatura en matemàtiques. Els temes que s'hi desenvolupen abasten uns continguts bàsics en teoria de la probabilitat que haurien de ser adquirits per l'estudiant en el primer cicle de la llicenciatura. Per coherència amb aquest objectiu, he defugit conscientment utilitzar elements avançats de la teoria de la mesura,

tot ubicant aquest text en un nivell no especialitzat. Sóc plenament conscient dels riscos que això comporta, especialment pel que fa al rigor, concepte que, en el col·lectiu dels matemàtics, forma part d'una ètica irrenunciable. He intentat, doncs, un equilibri entre la necessitat de comunicar ingredients rellevants i àmpliament utilitzats de la matemàtica als joves estudiants i la de contribuir a la formació en l'ofici del matemàtic amb les característiques que tal aprenentatge porta implícites.

La presentació es fa seguint un nivell de dificultat progressiu, la qual cosa permet una lectura en dues etapes i estén sensiblement el públic destinatari. Per a un curs marcadament elemental es recomana incidir en els capítols 1–3.

L'elaboració d'aquest llibre ha estat possible gràcies a l'ajut concedit per la Universitat de Barcelona a *Projectes de formació del professorat, innovació docent i avaluació* de la convocatòria de 1996. El Dr. José Manuel Corcuera, amb la seva acurada lectura de versions prèvies a aquest manual, m'ha transmès moltes idees i comentaris que han contribuït a millorar-ne el resultat. En Roger Trias Sanz ha tingut cura eficient de la composició del text i els gràfics, suportant amb paciència tants de canvis i noves versions. A tots ells, el meu agraïment.

Capítol 1

El model probabilístic

En aquest capítol comencem introduint l'axiomàtica de Kolmogorov, que proporciona un model matemàtic per al tractament de l'atzar. En el cas particular del model finit, expliquem la relació entre combinatòria i càlcul de probabilitats. Introduïm també els conceptes bàsics de la independència i el condicionament des d'una perspectiva elemental. En capítols posteriors aquests conceptes seran tractats amb més profunditat.

La creació d'un model matemàtic per al tractament de l'atzar no ha estat un problema senzill. Com en altres àrees de la matemàtica, la seva fonamentació rigorosa s'ha produït quan, a nivell de resultats, la probabilitat ja havia adquirit un desenvolupament notable, encara que no exempt de certs traumatismes (vegeu més endavant les paradoxes de Bertrand).

L'axiomàtica de Kolmogorov, concretada en la noció d'*espai de probabilitat*, fou introduïda per aquest autor en una monografia publicada l'any 1933. Els conceptes matemàtics que s'utilitzen provenen de la teoria de la mesura, desenvolupada a partir de l'any 1900 per H. Lebesgue, M. Fréchet, E. Borel, J. Radon, C. Carathéodory, entre d'altres.

1.1 Fenòmens aleatoris

La teoria de la probabilitat analitza fenòmens dels quals, tot i conèixer les condicions de la seva realització, no és possible deduir-ne exactament el resultat. S'anomenen fenòmens aleatoris, en contraposició als deterministes, per als quals hi ha una relació clara causa-efecte. Els jocs d'atzar ens en pro-

porcionen exemples típics: el llançament d'una moneda, l'extracció de boles d'una urna, etc. Altres problemes més lligats a la realitat, com un procés de producció o el pas d'automòbils per un peatge, tenen també un component de fenomen aleatori a causa de la manca de control sobre totes les causes possibles que poden afectar el resultat.

En els fenòmens aleatoris suposem, però, conegut el conjunt dels resultats possibles, així com també l'assignació d'una *versemblança* a cadascun d'aquests resultats. Vegem-ne uns quants exemples.

Exemple 1.1 Llançem una moneda tres vegades seguides. El conjunt de resultats possibles és $\Omega = \{(+++), (++)C, (+C+), (C++), (CC+), (CC+), (C+C), (CCC)\}$, on $+$ indica *creu* i C indica *cara*. Podem fer una assignació de $\frac{1}{8}$ a cadascun dels resultats, ja que res fa pensar que hi hagi resultats privilegiats.

Exemple 1.2 Llançem dues monedes idèntiques i observem el nombre de cares que surten. El conjunt de resultats possibles és $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Aquí és raonable assignar als resultats 0 i 2 un pes de $\frac{1}{4}$, mentre que al 1 li assignem un pes de $\frac{1}{2}$.

Exemple 1.3 En el joc de *cara o creu*, ens pot interessar tenir informació sobre *la primera vegada que sortirà cara*. Aquí ens convindrà considerar un conjunt Ω que, a diferència dels exemples anteriors, no és finit. En efecte, Ω és l'espai de les successions $\{(a_n)_{n \geq 1}, a_n \in \{C, +\}\}$.

1.2 Espais de probabilitat

Un *espai de probabilitat* és un tern $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ω és un conjunt que correspon al dels resultats possibles de l'experiència aleatòria. S'anomena *espai mostral*.

$\mathcal{A}$ és una família de parts d' Ω que té estructura de σ -àlgebra; és a dir,

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ és estable per pas al complementari: Si $A \in \mathcal{A}$, també $A^c \in \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{A}$ és estable per unions numerables: Si $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$, es compleix $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

La σ -àlgebra $\mathcal{A}$ serveix per descriure tots els *esdeveniments* possibles relacionats amb l'experiència aleatòria.

El darrer element de l'espai de probabilitat, P , s'anomena *probabilitat* i determina l'assignació de *versemblança* als esdeveniments. És una aplicació

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

que té les propietats següents:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. (σ -*additivitat*) Si $\{A_n, n \geq 1\}$ és una successió de conjunts de $\mathcal{A}$ disjunts dos a dos, aleshores

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

En el llenguatge de la teoria de la mesura, un espai de probabilitat és un espai de mesura finita, amb mesura total igual a 1.

Donem, tot seguit, una breu llista d'algunes de les equivalències més importants entre el llenguatge conjuntista i probabilista, basades en el model que acabem d'introduir.

Notacions	Conjunts	Probabilitats
ω	element de Ω	resultat possible
A	element de $\mathcal{A}$	esdeveniment
$A \cup B$	A reunió amb B	A o B
$A \cap B$	A intersecció amb B	A i B
A^c	complementari de A	no A
$\emptyset$	conjunt buit	esdeveniment impossible
Ω	conjunt total	esdeveniment segur

Observació 1.1 Si el conjunt Ω és finit, que $\mathcal{A}$ sigui una σ -àlgebra és equivalent a dir que sigui una àlgebra (ço és, $\Omega \in \mathcal{A}$, és estable per pas al complementari i per reunions finites). En aquest cas, la σ -additivitat (propietat (2) de la probabilitat) és equivalent a l'additivitat finita: si A i B són conjunts de $\mathcal{A}$, i $A \cap B = \emptyset$, aleshores

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

1.2.1 Propietats de la probabilitat

Les propietats que demostrem a continuació són una conseqüència més o menys evident dels axiomes (1) i (2) de la probabilitat. Totes són molt útils en el càlcul de probabilitats d'esdeveniments.

1. $P(\emptyset) = 0$.

En efecte, fixem $A \in \mathcal{A}$ i apliquem la propietat de σ -additivitat a la successió $A, \emptyset, \emptyset, \dots$. Tindrem que

$$P(A) = P(A) + \sum P(\emptyset).$$

En conseqüència, $P(\emptyset) = 0$.

2. La propietat de σ -additivitat implica l'additivitat finita.

En efecte, sigui $\{A_j, j = 1, \dots, n\}$ una col·lecció finita de conjunts disjunts de $\mathcal{A}$. Clarament $\{A_1, \dots, A_n, \emptyset, \dots, \}$ és una successió de conjunts disjunts de $\mathcal{A}$. Per la σ -additivitat de P i la propietat 1 que acabem de demostrar, tenim que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= P\left(\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \cup \left(\bigcup \emptyset\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n P(A_j) + \sum P(\emptyset) = \sum_{j=1}^n P(A_j). \end{aligned}$$

3. Per a tot $A \in \mathcal{A}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Aquesta igualtat és conseqüència de la descomposició $\Omega = A \cup A^c$ i la propietat d'additivitat finita.

4. Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, aleshores $P(A) \leq P(B)$.

És una conseqüència de la desigualtat següent:

$$P(B) = P(A \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A).$$

5. Siguin A i B de $\mathcal{A}$, aleshores,

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

En efecte, considerem la descomposició $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. Per la propietat d'additivitat finita,

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(B) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cup B). \end{aligned}$$

6. Tota probabilitat P és *subadditiva*; és a dir,

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

per a qualsevol família de conjunts $\{A_i, i = 1, \dots, n\}$ de $\mathcal{A}$.

La demostració d'aquesta propietat es fa per inducció sobre n . Per a $n = 2$ és una conseqüència immediata de la propietat anterior. Suposem la propietat certa per a qualsevol col·lecció de conjunts de $\mathcal{A}$, $\{A_1, \dots, A_j\}$, amb $1 \leq j \leq n - 1$. Sigui $A_n \in \mathcal{A}$. Aleshores, si $A = \cup_{i=1}^{n-1} A_i$, tenim que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = P(A \cup A_n) \leq P(A) + P(A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

7. Una generalització de l'argument de la demostració de la propietat 5 permet de donar una expressió exacta de $P(\cup_{i=1}^n A_i)$ per a qualsevol família de conjunts $\{A_i, i = 1, \dots, n\}$ de $\mathcal{A}$. Més precisament, es compleix que

$$\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i < j \\ 1 \leq i, j \leq n}} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{\substack{i < j < k \\ 1 \leq i, j, k \leq n}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^n A_i).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

La demostració de (1.1) es fa per inducció sobre el nombre de conjunts n . Per a $n = 2$ és la propietat 5. Suposem (1.1) certa per a $n - 1$ esdeveniments, és a dir,

$$\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{\substack{i < j \\ 1 \leq i, j \leq n-1}} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{\substack{i < j < k \\ 1 \leq i, j, k \leq n-1}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-2} P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Descomponem $\cup_{i=1}^n A_i$ en la reunió dels conjunts $B := \cup_{i=1}^{n-1} A_i$ i A_n . Aplicant primer la fórmula (1.1) per a $n = 2$ i després la fórmula (1.2), hom obté que

$$\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^n A_i) &= P(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\cup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)) \\
&= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i < j \\ i, j = 1, \dots, n-1}} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{\substack{i < j < k \\ i, j, k = 1, \dots, n-1}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&- \cdots + (-1)^{n-2} P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) - P(\cup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

El primer terme del segon membre de la segona desigualtat de (1.3) és un dels que hem d'obtenir. Apliquem novament la fórmula (1.2) als conjunts

$$B_i = A_i \cap A_n, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Resulta

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) - \sum_{\substack{i < j \\ i, j = 1, \dots, n-1}} P(A_i \cap A_j \cap A_n) \\
 &+ \sum_{\substack{i < j < k \\ i, j, k = 1, \dots, n-1}} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n) - \dots + (-1)^{n-2} P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right).
 \end{aligned}$$

En substituir aquesta expressió en (1.3) obtenim la fórmula desitjada.

El resultat següent s'anomena propietat de continuïtat seqüencial de la probabilitat.

Proposició 1.1 *Sigui $\{A_n, n \geq 1\}$ una successió de conjunts de $\mathcal{A}$. Aleshores,*

1. *Si la successió és creixent i denotem per A el conjunt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, es compleix que*

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

2. *Si la successió és decreixent i denotem per A el conjunt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, es té també que*

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Demostració: Comencem per l'apartat (1); l'apartat (2) es dedueix fàcilment d'aquest per pas al complementari.

Com que la successió $\{A_n, n \geq 1\}$ és creixent, els conjunts de la successió $\{B_n = A_n \cap A_{n-1}^c, n \geq 1\}$, que són també de $\mathcal{A}$, són disjunts dos a dos i

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

on hem fet el conveni $A_0 = \emptyset$. Aleshores, per la propietat de σ -additivitat de P , tenim que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned}$$

Considerem ara la situació de (2). La successió $\{A_n^c, n \geq 1\}$ és creixent i $\cup_{i=1}^{\infty} A_n^c = A^c$, aleshores, per l'apartat (1),

$$P(A^c) = 1 - P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

□

1.2.2 Espais de probabilitat finits

Si el conjunt Ω és finit, l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'anomena *espai de probabilitat finit*. Els exemples 1.1 i 1.2 corresponen a aquesta situació. En aquest cas l'àlgebra $\mathcal{A}$ és necessàriament finita i es pot donar una descripció dels seus elements.

Definició 1.1 Una família de conjunts de $\mathcal{A}$, $\{A_1, \dots, A_n\}$, és una partició del conjunt Ω , si són disjunts dos a dos i

$$\cup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Definició 1.2 L'àlgebra (respectivament, σ -àlgebra) generada per una classe de conjunts és la mínima àlgebra (respectivament σ -àlgebra) que conté els conjunts de la classe.

Teorema 1.1 Tota àlgebra finita $\mathcal{A}$ de parts de Ω és l'àlgebra generada per una partició finita.

Demostració: Suposem que $\mathcal{A} = \{B_1, \dots, B_m\}$. Els conjunts

$$B_1 \cap \dots \cap B_m, \quad B_1^c \cap \dots \cap B_m, \quad \dots, \quad B_1^c \cap \dots \cap B_m^c,$$

obtinguts a partir del $B_1 \cap \dots \cap B_m$ posant de dos fins a m signes de complementari de totes les maneres possibles, formen una partició del conjunt Ω . En efecte, és clar, per la seva construcció, que són conjunts disjunts i és fàcil comprovar que la seva reunió és Ω . L'àlgebra generada per aquests conjunts, que denotarem per $\mathcal{B}$, coincideix amb $\mathcal{A}$. En efecte, cadascun dels conjunts anteriors ha estat obtingut a partir dels conjunts de $\mathcal{A}$ mitjançant operacions compatibles amb l'estructura d'àlgebra. En conseqüència, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Recíprocament, tot element de $\mathcal{A}$ s'obté fent una reunió de conjunts generadors de $\mathcal{B}$ dels que hem descrit més amunt. Per tant, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. $\square$

Sigui $\mathcal{P}$ una partició finita de Ω com la descrita en la definició 1.1. L'àlgebra generada per $\mathcal{P}$ té 2^n elements i admet la descripció següent:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}, \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

En efecte, denotem per $\mathcal{B}$ el conjunt del segon membre de la igualtat anterior. El nombre de conjunts que són reunió de i conjunts de la partició és $\binom{n}{i}$. D'on, $\text{card } \mathcal{B} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$. Clarament, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, car els conjunts de $\mathcal{B}$ han estat formats a partir d'una operació compatible amb l'estructura d'àlgebra. D'altra banda, $\mathcal{B}$ és una àlgebra que conté els generadors de $\mathcal{A}$; per tant, conté $\mathcal{A}$.

El problema més delicat en la determinació d'un model probabilístic associat a una experiència aleatòria és, en general, l'assignació de probabilitat, és a dir, la definició de l'aplicació P . Aquest problema, però, no es planteja en el cas finit. Si suposem que el cardinal del conjunt Ω és r , l'assignació d'una probabilitat P queda fixada per r nombres $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ tals que $\sum_{i=1}^r p_i = 1$. En efecte, per a tot $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$, definim

$$P(A) = \sum_{j: \omega_j \in A} p_j, \quad (1.4)$$

i posem $P(\emptyset) = 0$. Això dóna una aplicació $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ que compleix els axiomes de la probabilitat.

Un cas particular important s'obté en prendre

$$p_1 = \dots = p_r = \frac{1}{r}.$$

L'espai de probabilitat obtingut així s'anomena *espai de probabilitat finit i uniforme*. La probabilitat d'un esdeveniment A es calcula mitjançant la fórmula

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \quad (1.5)$$

on la notació $\#A$ indica el cardinal del conjunt A .

Aquest model té una importància històrica. Abans que la teoria de la probabilitat es presentés amb el formalisme que hem introduït, s'estudiaven experiències aleatòries amb resultats igualment probables. La definició de probabilitat donada per Laplace (1812) en la seva obra *Théorie analytique des Probabilités* correspon a aquesta situació.

1.3 La combinatòria en el càlcul de probabilitats

En els espais de probabilitat finits i uniformes, el càlcul de probabilitats d'esdeveniments es redueix al càlcul del cardinal de conjunts, a causa de la fórmula (1.5). L'eina matemàtica per abordar aquest problema és la *Combinatòria*. En aquesta secció introduïm alguns elements relacionats amb aquest tema, basant-nos en problemes d'obtenció de mostres o en problemes d'ocupació.

Suposem que tenim una urna amb n boles diferents, numerades des de 1 fins a n , i que fem k extraccions sota condicions que seran especificades en cada cas. Volem determinar el nombre de resultats possibles.

De vegades resulta també útil considerar el model consistent en n caselles numerades en les quals volem col·locar k boles.

Donat un conjunt A , indicarem amb la lletra minúscula a el seu cardinal.

1. *Mostreig ordenat amb reposició*. Extraïem successivament k boles, i les tornem a l'urna després de cada extracció. Es tracta de comptar el nombre de k -tuples ordenades $(n_1, \dots, n_k)$, on $n_j \in \{1, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, k$. El resultat és n^k .

Aquest nombre és també el cardinal del conjunt de les aplicacions $f : K \longrightarrow N$.

2. *Mostreig ordenat sense reposició.* Suposem $k \leq n$. En aquest cas, les boles extretes no es tornen a l'urna, de manera que les k -tuples obtingudes estan formades per elements diferents. El nombre de resultats possibles és

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Aquest nombre coincideix amb el cardinal del conjunt de les aplicacions injectives $f: K \rightarrow N$.

Observeu també que, quan $k = n$, obtenim $n!$ (*permutacions d'un conjunt de n elements*).

3. *Mostreig sense ordre i sense reposició.* Suposem també $k \leq n$. No tornem les boles extretes a l'urna, ni ens importa l'ordre en què han aparegut. És, doncs, com si haguéssim tret les k boles en una única extracció. Es tracta de comptar els subconjunts de N amb cardinal k . N'hi ha

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Relacionat amb aquest exemple, podem plantejar el càlcul del nombre de particions del conjunt N en r subconjunts $K_1, \dots, K_r$ amb cardinals $k_1, \dots, k_r$, respectivament. Òbviament $k_1 + \dots + k_r = n$. Una manera d'enfocar el problema és comptar primer els subconjunts de N de k_1 elements; ja sabem que n'hi ha $\binom{n}{k_1}$. Tot seguit, comptar els subconjunts de $N - K_1$ de k_2 elements: $\binom{n-k_1}{k_2}, \dots$. Finalment, els subconjunts de $N - K_1 - K_2 - \dots - K_{r-1}$ de k_r elements: $\binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r}$. El resultat que busquem és

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r},$$

que coincideix amb l'anomenat *coeficient multinomial*

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}.$$

4. *Mostreig sense ordre i amb reposició.* Tornem la bola a l'urna després de cada extracció; per tant, després de les k extraccions hi haurà possiblement repeticions en el resultat.

El problema consisteix a trobar el nombre de conjunts no ordenats, $\{i_1, \dots, i_k\}$, on $i_j \in \{1, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, k$, no necessàriament diferents. Una manera anàloga d'enfocar el problema és comptar el nombre de solucions $(r_1, \dots, r_n)$ d'enters no negatius de l'equació

$$r_1 + \dots + r_n = k.$$

Aquí r_j , $j = 1, \dots, n$, denota el nombre de vegades que ha sortit la bola j en les k extraccions. L'equivalència entre ambdós plantejaments s'explica de la manera següent: De les boles extretes ens interessa el tipus ($j = 1, \dots, n$) i el nombre obtingut de cada tipus (r_j , $j = 1, \dots, n$).

Alternativament, el problema consisteix a comptar el nombre de maneres possible de col·locar k boles en n urnes, per la qual cosa cal fixar el nombre de boles que va a cada urna. Aquest nombre és

$$\binom{n+k-1}{k},$$

que coincideix amb $\binom{n+k-1}{n-1}$. En efecte, escollim els k llocs on van les boles entre $k+n-1$ possibilitats, on $n-1$ és el nombre de separacions entre les n urnes.

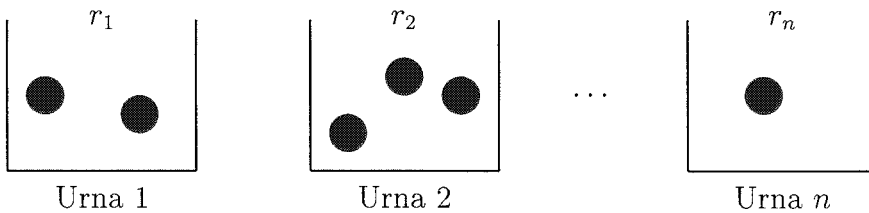


Figura 1.1: Una possible disposició de k boles en n urnes

En la terminologia de la combinatòria, el cas (1) correspon a les *variacions amb repetició* i el cas (2), a les *variacions*. Les dues possibilitats presentades

en el cas (3) corresponen a les *combinacions* i les *permutacions amb repetició*, respectivament, i, finalment el cas (4) a les *combinacions amb repetició*.

Podríem estudiar altres situacions, però ens aturem aquí. Els exemples que hem presentat, ultra un interès didàctic, són útils com a models per a la física i l'enginyeria. Com a il·lustració presentem un exemple clàssic de la mecànica estadística.

Considerem un sistema mecànic format per k partícules indistingibles. En la mecànica estadística és usual subdividir l'espai de fases en un nombre gran n de subregions o cel·les, corresponents a diversos estats d'energia, de manera que cada partícula estigui assignada a una cel·la. L'estat del sistema queda, doncs, descrit (utilitzant el llenguatge d'un problema d'ocupació) en termes d'una distribució aleatòria de k boles en n caselles. Històricament s'han proposat diversos models d'ocupació que el físic anomena *estadístiques*.

L'*estadística de Maxwell-Boltzmann* es basa en el model (1) d'un mostreig ordenat amb reposició. Suposa que les n^k disposicions possibles de les partícules tenen la mateixa probabilitat. Noves teories de la física demostren que cap de les partícules conegudes es distribueix segons aquest model.

L'*estadística de Bose-Einstein* proposa el model (4) d'un mostreig no ordenat i amb reposició. Designem per $A_{k,n}$ el nombre combinatori $\binom{n+k-1}{k}$. Aleshores se suposa que hi ha $A_{k,n}$ maneres diferents de disposar les partícules i cadascuna d'aquestes disposicions és equiprobable. Es demostra que els fotons segueixen aquest model d'ocupació.

Finalment, l'*estadística de Fermi-Dirac* proposa el model (3) de mostreig no ordenat i sense reposició, que atribueix a cadascuna de les $\binom{n}{k}$ distribucions la mateixa probabilitat, és a dir, $\binom{n}{k}^{-1}$. Aquest model s'aplica als electrons, els neutrons i els protons.

1.4 Alguns exemples de models probabilístics

El primer exemple que presentem en aquest apartat pretén il·lustrar la necessitat d'una certa dosi d'imaginació per a descriure el model probabilístic, de manera que sigui fàcil calcular determinades probabilitats. El segon exemple, un clàssic en el càlcul de probabilitats, s'ha triat amb la intenció de posar en evidència com l'elecció del model condiciona els resultats dels càlculs i també l'ambigüitat que es presenta en abordar tota modelització.